第16卷 第3期 力学进展 Vol. 16 No. 3
1986年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1986

计算地球物理流体力学中的非线性计算不稳定问题

季仲贞
（中国科学院大气物理研究所）

关键词 计算地球物理流体力学；地球物理流体力学；非线性计算不稳定问题

一、序　　论

§1 **引言** 计算地球流体力学中的非定常问题（包括数值天气预报、气候数值模拟、海流数值模拟和风暴潮数值预报等）大多是非线性时变偏微分方程的求解问题，无论是用有限差分法、有限元法还是用谱展开法都可能出现非线性计算不稳定。就以数值天气预报和大气环流数值模拟问题来说，一般是对一组复杂的非线性偏微分方程的初、边值问题数值求解，譬如对原始方程的半个月左右中、长期数值天气预报的显式方案，一般需要计算2000至4000多步（时间步长取5—10分钟），而对气候数值模拟往往需要连续作数年的数值积分，其计算步数大约是几十万步。因此如果一个计算格式不能长时间计算稳定，那就不可能成功地作出数值预报或数值模拟。在这类问题中，计算稳定性问题，特别是非线性计算稳定性问题显得尤其重要。

非线性计算不稳定问题是美国气象学家 Phillps[1] 于1959年最早提出讨论。他把一种特殊波解代入正压无辐散涡度方程中去分析，用混淆误差的概念解释了非线性计算不稳定现象，提出并利用滤去4倍格距波的办法来克服所遇到的非线性计算不稳定。其后 Richtmyer[2] 采用类似方法，对一维非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

的近似格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{[(u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2]}{2\Delta x}=0 \tag{1.2}$$

以形如

$$u_j^n=C^n\cos\frac{\pi}{2}j+S^n\sin\frac{\pi}{2}j+U^n\cos\pi j+V \tag{1.3}$$

的特解代入，得到一个具体的非线性计算不稳定的例子，并分析了特解（1.3）中的基本气

流项 V 对计算稳定性的影响，指出仅当 $|U|>|V|$ 时才可能出现非线性计算不稳定。Shuman[3] 对类似的不稳定现象作了分析和讨论，但他考虑基本气流 V 随时间变化，对几种具体的非线性平流格式得出了非线性计算不稳定的判据。

Kreiss & Oliger[4] 对类似于（1.1）的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.4}$$

的瞬时能量守恒近似格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}=\frac{1}{3}\frac{(u_{j+1}^n+u_j^n+u_{j-1}^n)(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)}{2\Delta x} \tag{1.5}$$

作了具体的分析，指出倘若函数 u 的初始两个时刻的值满足如下分布：

$$\left.\begin{array}{l} u^0:\ \cdots,\ d,\ -c,\ 0,\ c,\ -d,\ 0,\ d,\ -c,\ 0,\ c,\ -d,\ \cdots \\ u^1:\ \cdots,\ -b,\ -a,\ 0,\ a,\ b,\ 0,\ -b,\ -a,\ 0,\ a,\ b,\ \cdots \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

则格式（1.5）将出现非线性计算不稳定。Orszag[5] 却认为把非线性计算不稳定的出现归结为混淆误差是不确切的，并指出只要滤去 $2\Delta x$ 和 $3\Delta x$ 之间的波分量，就足以消除非线性计算不稳定。Arakawa[6] 构造了著名的守恒差分格式，由于这格式保持了微分方程的涡度守恒、涡度平方守恒和动能守恒等的瞬时守恒性，因而计算格式具有较好的计算稳定性。

Fornberg[7] 采用类似于 Kreiss 的办法，并进一步与分离变量法相结合，分析讨论了推广的非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(1-\theta)u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\theta}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}=0 \tag{1.7}$$

的近似格式的计算稳定性，证明了较一般的稳定性定理，在一定的限制条件下找到了一个非线性计算稳定的充分必要条件，并最先指出隐式差分格式也可能出现非线性计算不稳定。他作了许多数值试验，得到的结论是仅当函数 u 接近零值时才可能出现非线性计算不稳定。

前不久 Gary[8] 对非线性计算不稳定问题也作了较详细的讨论。

近年来，我们以非线性平流方程 $\partial u/\partial t+u\ \partial u/\partial x=0$，正压无辐散涡度方程 $\partial\zeta/\partial t+u\ \partial\zeta/\partial x+v\ \partial\zeta/\partial y=0$ 和非线性算子方程 $\partial F/\partial t+AF=G$ 为模型，以非线性计算不稳定为重点，较系统地分析了有关非线性计算稳定性的若干问题，归结起来主要有如下一些进展：

1. 用 Richtmyer-Shuman 的办法分析了瞬时差分格式的非线性计算稳定性问题，找到了在空间离散化而时间不离散化情形下的若干格式的非线性计算不稳定的例子[9]。

2. 把 Richtmyer 的办法应用到推广的非线性平流方程（1.7）的全离散差分格式上，得到了更普遍的计算稳定性判据，使得 Richtmyer 和 Shuman 的非线性计算不稳定的例子都可以作为其特例来得到[9]。并指出只要网格函数 u 在空间或时间方向变号，就容易出现非线性计算不稳定，从而修正了 Fornberg 关于仅当函数 u 接近零值才可能出现非线性计算不稳定的结论[2]。

3. 对一维非线性平流格式找到了更多的 Fornberg 型非线性计算不稳定的例子[10,11]。

4. 讨论了非线性算子方程 $\partial F/\partial t+AF=G$ 所相应的差分格式

$$\frac{F^{n+1}-F^n}{\tau}+A(F^*)\bar{F}=\bar{G}$$

的计算稳定性问题，分析了算子A的非负性与能量守恒性、计算稳定性之间的密切关系[11-13]。

5. 针对二维无辐散涡度方程，给出了在数值天气预报中广泛应用的著名的 Arakawa 格式和 Lilly 格式的非线性计算不稳定的例子[14,15]。

6. 讨论了 Galerkin 近似法和谱展开法的非线性计算稳定性问题，也给出了相应的非线性计算不稳定的例子[16,9,17]。

7. 讨论了耗散对计算稳定性的影响，指出对于显式蛙跳型格式来说，在耗散量过小时容易出现非线性计算不稳定，但耗散量也不宜过大，否则将使解光滑太甚，有时还会造成新的计算不稳定[18,19]。

8. 进一步分析了产生非线性计算不稳定的机理，着重讨论了能量守恒性和初值状态对非线性计算不稳定的影响[13,20,21]。

9. 总结了国内外有利于长时间计算稳定的平方守恒型差分格式的五种构造方法（其中有一种是我们自己提出的），并分析了由此得出的十一种具体的差分格式之间的关系[23,12]。

10. 我们构造的平方守恒差分格式除了在大气环流模拟和数值天气预报中得到应用外，针对海流数值模拟问题，以二维全流方程为模型，又构造了全隐式、跳点、等距的，在不规则边界条件下保持完全能量守恒的差分格式（指忽略耗散和强迫力项后的情形），并对渤海和南海若干典型月平均流作出了较好的数值模拟结果[25-27]。

下面我们将对以上各点分几个问题逐一扼要介绍，其中重点说明如下三点：

①用数学证明和数值试验方法找到许多非线性计算不稳定例子（§§ 3，4，6，7，9，12，13，16）；②一再推广方程形式，逐步深入证明一些稳定性定理，以说明计算稳定性和能量守恒性与算子非负性的密切关系（§§ 5，8，10，11）；③着重介绍我们自己发展的一种能克服非线性计算不稳定的，完全能量守恒的差分格式构造方法。该方法已逐步完善，除在大气环流数值模拟和数值天气预报中应用外，最近已成功地应用于海流数值模拟等问题（§§ 17，18）。

§ 2 非线性计算不稳定的含义 众所周知，在线性偏微分方程的数值求解中存在线性计算不稳定。如果对常系数时变偏微分方程用有限差分法求解，其计算稳定性可以用 Von Neuman 方法进行分析，一般只要时间步长和空间步长之比满足一定的限制条件（即所谓 CLF 条件），则计算格式是线性计算稳定的（显式向前差格式除外），否则是不稳定的；一般当空间步长固定时，只要时间步长取得足够小，格式总是计算稳定的。然而，象数值天气预报这样的非线性问题中，由线性化方程所得的稳定性判据只有参考意义，对线性化方程是稳定的差分格式，应用到相应的非线性方程上去，有时却是计算不稳定的。这说明非线性方程有其特殊的不稳定性，即所谓的非线性计算不稳定。然而，由非线性方程所产生的计算不稳定却不一定都是非线性计算不稳定。通常我们关心的非线性计算不稳定，主要是指对应的线性近似方程是稳定的、对应的非线性偏微分方程的解是有界的那种非线性近似方程所产生的计算不稳定，一般它常常表现为近似解的突变式增长或指数增长现象，并且它不能用缩小时间步长来克服。

§ 3 几个简单的例子 为了搞清楚非线性计算不稳定，我们先对比地看几个简单的例子。由于我们关心的方程大都具有非线性平流形成的非线性项，因此首先从分析最简单的一维非线性平流方程入手。考虑一维非线性平流方程（1.1），它可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial(uu)}{\partial x}=0 \tag{3.1}$$

它有能量关系式

$$\|u(x,t)\|^2=\|u(x,0)\|^2 \tag{3.2}$$

联立（1.1）和（3.1）可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(1-\theta)u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\theta}{2}\frac{\partial(uu)}{\partial x}=0,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 1 \tag{3.3}$$

其中θ是一个参数。在(x,t)空间布网，分别记相应的步长为h和τ，于是逼近（3.3）的微分-差分方程可写为

$$\frac{du_j}{dt}+(1-\theta)u_j^*\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}+\frac{\theta}{2}\frac{u_{j+1}^*u_{j+1}-u_{j-1}^*u_{j-1}}{2h}=0 \tag{3.4}$$

其中u^*是u的某种线性组合或光滑值。将（3.4）再作时间差分可得通常所见的各种差分格式如下：

向前差格式（$\theta=0$）

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0 \tag{3.5}$$

蛙跳格式（$\theta=0$）

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0 \tag{3.6}$$

一次守恒格式（$\theta=1$）

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+\frac{1}{2}\frac{(u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2}{2h}=0 \tag{3.7}$$

一维 Lilly 型格式（$\theta=1/2$）

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+\frac{1}{2}\left[u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}+\frac{1}{2}\frac{(u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2}{2h}\right]=0 \tag{3.8}$$

准平方守恒格式（$\theta=2/3$）

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+\frac{1}{3}\left[u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}+\frac{(u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2}{2h}\right]=0 \tag{3.9}$$

平方守恒格式（$\theta=2/3$）

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\frac{1}{3}\left[\bar{u}_j\frac{\bar{u}_{j+1}-\bar{u}_{j-1}}{2h}+\frac{\bar{u}_{j+1}^2-\bar{u}_{j-1}^2}{2h}\right]=0 \tag{3.10}$$

其中$\bar{u}_j=\frac{1}{2}(u_j^{n+1}+u_j^n)$，等等。

利用 Von Neuman 方法不难分析，在与上述格式相应的线性化格式中，除（3.5）是绝对不稳定，（3.10）是绝对稳定的以外，其余格式均在满足

$$\left|u\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|<1 \tag{3.11}$$

的条件下是计算稳定的。我们可以证明，在非线性情况下，除（3.10）是绝对稳定的以外，

其余的格式都存在非线性计算不稳定。下面给出五个具体例子，同时也介绍五种分析非线性计算稳定性的方法。

例 1　对格式（3.5）由 Taylor 展开可得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\tau}{2!}+\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\frac{\tau^2}{3!}+O(\tau^3) \tag{3.12}$$

$$\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(h^5) \tag{3.13}$$

利用（1.1）可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.14}$$

把（3.14）代入（3.12），再把（3.12）和（3.13）代入（3.5），可得对应于（3.5）的微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\tau}{2!}u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\tau^2,h^2) \tag{3.15}$$

由于（3.15）右端的截断粘性项系数（$-(\tau/2)u^2$）永远为负，故格式绝对不稳定。

例 2　考虑格式（3.7）。Richtmyer[2] 对（3.7）作过详细分析，将形如（1.3）的特解代入方程，得到其系数应满足方程组

$$C^{n+1}-C^{n-1}=2\frac{\tau}{h}S^n(U^n-V),\quad S^{n+1}-S^{n-1}=2\frac{\tau}{h}C^n(U^n+V),\quad U^{n+1}-U^{n-1}=0 \tag{3.16}$$

由（3.16）第 3 式知，U^n 必循环交替地取两个常数，不妨取为 A 和 B，经过一定的数学推导可得，只要 V 充分大，以致 $|V|>|A|$，$|V|>|B|$，则在 $(\tau/h)|u|_{\max}<1$ 时格式稳定，否则当 V 充分小且 A，B 同号时，以致（$A+V$）和（$B-V$）也同号，则不稳定出现，并且这时是一种非线性计算不稳定。

例 3　将格式（3.8）具体写出为

$$u_j^{n+1}=u_j^{n-1}-\lambda(u_{j+1}^n+2u_j^n+u_{j-1}^n)(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n) \tag{3.8$'$}$$

其中 $\lambda=(1/4)(\tau/h)$。可证：任给 $\varepsilon_0>0$，$\varepsilon_1>0$，如果 u_j^0，u_j^1 满足如下分布：

$$\begin{array}{lcccccccc} & & j_0 & j_0+1 & j_0+2 & j_0+3 & & & \\ \{u_j^0\}= & \cdots, & 0, & \varepsilon_0, & -\varepsilon_0, & 0, & \varepsilon_0, & -\varepsilon_0, & 0, \cdots \end{array} \tag{3.17}$$

$$\{u_j^1\}=\cdots,\ 0,\quad \varepsilon_1,\quad -\varepsilon_1,\quad 0,\ \varepsilon_1,\ -\varepsilon_1,\ 0,\ \cdots \tag{3.18}$$

那末格式（3.8）′非线性计算不稳定（即当 $n\to\infty$ 时，u_j^n 无界）。

证明　根据（3.17）和（3.18），由（3.8）′可算得 $u_{j_0}^n=u_{j_0+2}^n=0$（$n=2,3,\cdots$），而

$$u_{j_0+1}^2=\varepsilon_0+\lambda\varepsilon_1^2\equiv\varepsilon_2>\varepsilon_0,\qquad u_{j_0+2}^2=-(\varepsilon_0+\lambda\varepsilon_1^2)=-\varepsilon_2$$

$$u_{j_0+1}^2=\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2^2\equiv\varepsilon_3>\varepsilon_1,\qquad u_{j_0+2}^2=-(\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2^2)=-\varepsilon_3$$

这样一步一步地计算下去，可知当 $n\to\infty$ 时，$u_{j_0+1}^n$ 和 $u_{j_0+2}^n$ 将无界增长，即格式计算不稳定。

用上述例 2 或例 3 的办法可证（3.5）至（3.9）都存在非线性计算不稳定。

例 4　可证格式（3.10）绝对计算稳定。事实上，（3.10）可写为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{1}{6}\frac{\tau}{h}(\bar{u}_{j+1}+\bar{u}_j+\bar{u}_{j-1})(\bar{u}_{j+1}-\bar{u}_{j-1}) \tag{3.10$'$}$$

以 $\bar{u}_j$ 乘（3.10）′ 两边，并对所有内点求和可得

$$\frac{1}{2}\sum_j(u_j^{n+1})^2-\frac{1}{2}\sum_j(u_j^n)^2=\frac{\tau}{6h}\sum_j(\bar{u}_{j+1}\bar{u}_j\bar{u}_j-\bar{u}_j\bar{u}_j\bar{u}_{j-1}+\bar{u}_{j+1}\bar{u}_{j+1}\bar{u}_j-\bar{u}_j\bar{u}_{j-1}\bar{u}_{j-1})$$

只要边界条件是周期的或是取刚壁边条件，即有

$$\sum_j(u_j^{n+1})^2=\sum_j(u_j^n)^2 \tag{3.19}$$

或

$$\|u^{n+1}\|^2=\|u^n\|^2 \tag{3.19$'$}$$

这表明格式（3.10）是完全能量守恒的，故格式绝对稳定。

例 5　取格式（3.8）和（3.9）进行数值试验，对其计算初值都分别取如下两种：

$$u(x,0)=\sin 2\pi x \tag{3.20}$$

$$u(x,0)=\sin 2\pi x+1.5 \tag{3.21}$$

在计算中取 $h=0.1$，$\tau=0.004$，于是有

$$|u\lambda|\leqslant|u|_{max}\lambda=2.5\times0.004/0.1=0.1<1$$

这表明格式满足线性稳定性判据（3.11）。由于我们主要关心其计算稳定性，在图 1 和图 2 中分别给出两种初值下两种格式的动能变化曲线。图 1 对应于(3.20)，图 2 对应于(3.21)。比较这两张图可以看出：①在取初值（3.21）时，两种格式的总动能始终在一定范围内变化，即格式计算稳定；②在取初值（3.20）时，两种格式在计算开始一段时间内，总动能变化是微小的，即计算是稳定的，但是在一定时间以后，突然出现指数增长现象，即出现非线性计算不稳定；③两种初值相差一个常数项 1.5，但这个常数项对计算稳定性起着关键性的影响。

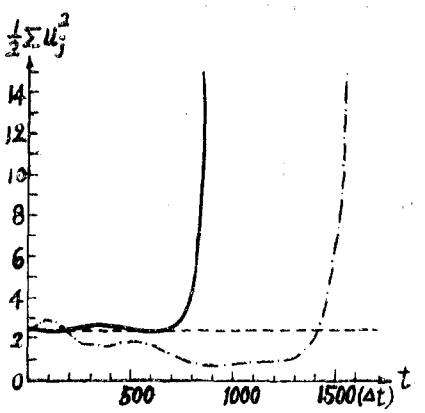

图 1　u(x, 0)=sin2πx 时总动能变化曲线
点划线对应于(3.8)，实线对应于（3.9）

总之，以上几个例子说明了这样几点：①在非线性偏微分方程数值求解中，非线性计算不稳定是经常出现的；②有许多不同的方法都可以分析非线性计算不稳定问题；③非线性计算不稳定与初值分布、格式结构有着密切的关系；④能量守恒是格式计算稳定的一个充分条件，对于那些不满足能量守恒的显式格式，往往都可以找出其非线性计算不稳定的例子。

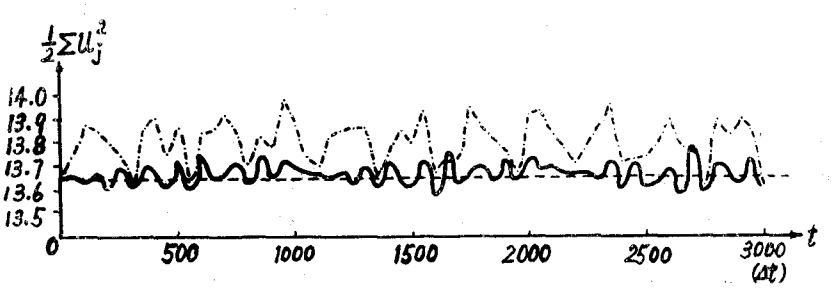

图 2　u(x, 0)=1.5+sin2πx 时总动能变化曲线（说明同图 1）

二、一维平流格式的稳定性

§ 4 瞬时平流差分方程的性质 对于微分-差分方程（或称瞬时差分方程）(3.4) 有如下定理：

定理 1 在周期边界条件下，瞬时差分方程 (3.4) 满足总能量守恒的充分条件是 $\theta=2/3$。

证明 取 $\theta=2/3$ 代入 (3.4)，以 u_j 乘所得式子两边，并对所有内点 j 求和，即得

$$\frac{d}{dt}\sum_j\left(\frac{1}{2}u_j^2\right)=0 \tag{4.1}$$

定理 2 取 $u^*=u$，方程 (3.4) 当 $\theta=2/3$ 时，对于初条件

$$\{u_j^0\}=\{\cdots,\ 0,\ \varepsilon,\ -\varepsilon,\ 0,\ \varepsilon,\ -\varepsilon,\ 0,\ \cdots\} \tag{4.2}$$

是计算不稳定的；即 $\theta=2/3$ 是 (3.4) 计算稳定的一个必要条件，其中 ε 是不为零的任意实数。

证明 用[7]中建议的分离变量法，设 (3.4) 有形式如下的特解

$$u_j(t)=T(t)X_j \tag{4.3}$$

代入 (3.4) 得（取 $u_j^*=u_j$）

$$\frac{dT}{dt}X_j+\frac{T^2}{2h}\left[\frac{\theta}{2}(X_{j+1}^2-X_{j-1}^2)+(1-\theta)X_j(X_{j+1}-X_{j-1})\right]=0 \tag{4.4}$$

记

$$MX_j=\frac{1}{2h}\left[\frac{\theta}{2}(X_{j+1}^2-X_{j-1}^2)+(1-\theta)X_j(X_{j+1}-X_{j-1})\right] \tag{4.5}$$

则 (4.4) 可写为

$$\frac{dT}{dt}X_j+T^2MX_j=0 \tag{4.6}$$

可将 (4.5) 分离为

$$\frac{dT}{dt}\Big/T^2=-\frac{MX_j}{X_j}=-\lambda \tag{4.7}$$

其中 λ 是不为零的常数。由 (4.7) 可得

$$MX_j=\lambda X_j \tag{4.8}$$

$$\frac{dT}{dt}+\lambda T^2=0 \tag{4.9}$$

由 (4.8) 可知，当且仅当 $\lambda=0$ 时解才是稳定的。其实，若 $\lambda=0$，则 $T(t)=T(0)$；若 $\lambda\neq0$，则(4.9)有解 $T(t)=T(0)/[1+\lambda T(0)t]$；若 $\lambda>0$，且 $T(0)=0$，则当 $t\to1/\lambda|T(0)|$ 时，$T\to-\infty$；若 $\lambda<0$，且 $T(0)>0$，则当 $t\to1/|\lambda T(0)|$ 时，$T(t)\to+\infty$，可见，当 $\lambda\neq0$ 时，有计算不稳定解。

现证当 $\theta\neq2/3$ 时，对于 (4.8) 必有 $\lambda\neq0$。其实不妨取 $T(0)=1$，则 X_j 与 u_j^0 有相同分布 (4.2)，于是有

$$\{X_j(X_{j+1}-X_{j-1})\}=\varepsilon\{X_j\} \tag{4.10}$$

$$\{X_{j+1}^2 - X_{j-1}^2\} = -\varepsilon\{X_j\} \tag{4.11}$$

把（4.10）和（4.11）代入（4.5）得

$$\{MX_j\} = \frac{(2-3\theta)\varepsilon\{x_j\}}{4h} \tag{4.12}$$

显然（4.12）满足（4.8），可见当 $\theta \neq 2/3$ 时必有 $\lambda \neq 0$，也就是当 $\theta \neq 2/3$ 时，取 $u^* = u$，格式（3.4）必不稳定。

附注　事实上，在上述定理中，如果取 u_j^* 为 u_j 的某种线性组合，则定理仍成立。

§ 5　瞬时能量守恒的平流格式的计算稳定性　由前一节知，当 $\theta = 2/3$ 时，方程(3.4)具有瞬时能量守恒性，这是我们最为关心的情形。下面进一步分析在这种情况下的差分格式的稳定性。取 $\theta = 2/3$，并把对应于（3.4）的差分格式推广取为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{3}\left(u_j^{**}\frac{u_{j+1}^* - u_{j-1}^*}{2h} + \frac{u_{j+1}^{**}u_{j+1}^* - u_{j-1}^{**}u_{j-1}^*}{2h}\right) = 0 \tag{5.1}$$

其中 u_j^{**} 为 u_j 的某种光滑值，也可取 $u_j^{**} = u_j$ 或 $\overline{u}_j$，而 u_j^* 为 u_j 的某种线性组合，譬如可取

$$u_j^* = \alpha u_j^n + (1-\alpha)u_j^{n+1} \tag{5.2}$$

或

$$u_j^* = u_j^n - \frac{1-\alpha}{3}\frac{\tau}{2h}\left[u_j^n(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + (u_{j+1}^n u_{j+1}^n - u_{j-1}^n u_{j-1}^n)\right] \tag{5.3}$$

等等，其中 α 满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。于是有如下定理：

定理 3　在周期边界条件下，若 u_j^* 按（5.2）计算，则格式（5.1）的稳定性如下：当 $1 \geqslant \alpha > 1/2$ 时，格式绝对不稳定；当 $\alpha = 1/2$ 时，格式稳定（中性）；当 $0 \leqslant \alpha < 1/2$ 时，格式稳定衰减。

证明　以 u_j^* 乘（5.1）两边，并对所有内点 j 求和，在周期边界条件下得

$$\sum_j{}' u_j^*(u_j^{n+1} - u_j^n) = -\frac{1}{3}\frac{\tau}{h}\sum_j{}'\left(u_j^{**}u_j^*u_{j+1}^* - u_j^{**}u_j^*u_{j-1}^* + u_{j+1}^{**}u_{j+1}^*u_j^* - u_{j-1}^{**}u_{j-1}^*u_j\right) = 0$$

但因

$$\sum_j{}'\frac{1}{2}\left[(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2\right] = \sum_j{}'\left[\frac{1}{2}(u_j^{n+1} + u_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^n)\right]$$

故将上两式相加，移项，并以（5.3）代入可得

$$\sum_j{}'\frac{1}{2}\left[(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2\right] = \sum_j{}'\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(u_j^{n+1} - u_j^n)^2$$

可见，当 $1 \geqslant \alpha > 1/2$ 时，总动能增长，格式不稳定；当 $\alpha = 1/2$ 时，总动能守恒，格式稳定且中性；当 $0 \leqslant \alpha < 1/2$ 时，总动能减小，格式稳定，但其解的振幅不断衰减。定理 3 证毕。

附注　如果用时间中央差代替（5.1）中的时间向前差，相应地把（5.2）改为 $u_j^* = \alpha u_j^{n+1} + (1-\alpha)u_j^{n-1}$，定理 3 仍成立。

定理 3 及其附注表明，瞬时能量守恒格式（5.1）的稳定性与 u_j^{**} 的取法无关，主要与参数 α 的数值有关，也就是与格式的隐式程度有关，当 $1 \geqslant \alpha > 1/2$ 时，格式是显式或弱隐式的，尽管这时满足 $\theta = 2/3$，但格式仍不稳定。

§ 6 瞬时平流格式的非线性计算稳定性 现再考虑推广的非线性平流方程（3.3）。如果在与其相应的瞬时差分格式（3.4）中取 $u^*=u$，可得瞬时格式

$$\frac{du_j(t)}{dt}+(1-\theta)u_j(t)\frac{u_{j+1}(t)-u_{j-1}(t)}{2\Delta x}+\frac{\theta}{2}\frac{u_{j+1}^2(t)-u_{j-1}^2(t)}{2\Delta x}=0 \tag{6.1}$$

今取形如

$$u_j(t)=C(t)\cos\frac{\pi}{2}j+S(t)\sin\frac{\pi}{2}j+U(t)\cos\pi j+V(t) \tag{6.2}$$

的特解，并代入（6.1）可得其系数所满足的方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dC}{dt}&=-\frac{1-\theta}{\Delta x}S(U+V)+\frac{\theta}{\Delta x}S(U-V)\\ \frac{dS}{dt}&=-\frac{1-\theta}{\Delta x}C(U-V)+\frac{\theta}{\Delta x}C(U+V)\\ \frac{dU}{dt}&=-\frac{1-\theta}{\Delta x}SC,\quad \frac{dV}{dt}=0\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

这是一个非线性常微分方程组，不易讨论其普遍的非线性计算稳定性问题，下面只讨论其几个特殊情形。

① 取 $\theta=0$。假若 $V\equiv0$，则（6.3）退化为

$$\frac{dC}{dt}=-\frac{1}{\Delta x}SU,\quad \frac{dS}{dt}=-\frac{1}{\Delta x}CU,\quad \frac{dU}{dt}=-\frac{1}{\Delta x}SC \tag{6.4}$$

若进一步假设 $S(t)=C(t)=U(t)=V(t)$，则(6.4)就进一步退化为一个常微分方程

$$\frac{d\phi(t)}{dt}=-\frac{1}{\Delta x}\phi^2(x) \tag{6.5}$$

不难求得

$$\phi(t)=\phi_0\Big/\left(1-\phi_0\frac{t}{\Delta x}\right) \tag{6.6}$$

其中 $\phi_0=\phi(0)$。显然当 $t\to\Delta x/\phi_0$ 时，$\phi(t)\to\infty$，这表明在 $t=\Delta x/\phi_0$ 时，（6.5）的解出现突变式的非线性不稳定，这种不稳定与 Δt 的取法无关，而与初值 ϕ_0 密切相关，在[8]中讨论了这个例子。

② 取 $\theta=1$。这时（6.3）退化为

$$\frac{dC}{dt}=\frac{1}{\Delta x}S(U-V),\quad \frac{dS}{dt}=\frac{1}{\Delta x}C(U+V),\quad \frac{dU}{dt}=0,\quad \frac{dV}{dt}=0 \tag{6.7}$$

由（6.7）可得

$$\frac{d^2C}{dt^2}=\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2C(U^2-V^2) \tag{6.8}$$

积分之可得如下结果

若 $|U|>|V|$，则 $$C(t)=C_0\mathrm{ch}\left(\pm\frac{\sqrt{U^2-V^2}\,t}{\Delta x}\right) \tag{6.9}$$

若 $|U|\leqslant|V|$，则 $$C(t)=C_0\cos(\sqrt{V^2-U^2}\,t) \tag{6.10}$$

可见若 $|U|>|V|$ 时，解（6.9）随时间指数增长，出现非线性计算不稳定，这个例子是曾庆存最先提出讨论的。

③ 取 $\theta=1/2$。这时（6.3）退化为

$$\frac{dC}{dt}=-\frac{SV}{\Delta x},\quad \frac{dS}{dt}=\frac{CV}{\Delta x},\quad \frac{dU}{dt}=\frac{1}{2}\frac{SC}{\Delta x},\quad \frac{dV}{dt}=0 \tag{6.11}$$

若 $V\neq 0$，则由（6.11）可得

$$\frac{d^2C}{dt^2}=-C\left(\frac{V}{\Delta x}\right)^2$$

积分之可得

$$C=C_0\cos\left(\frac{Vt}{\Delta x}\right) \tag{6.12}$$

其中 C_0 为常数，可见解（6.12）有界。同理可证 $S(t)$，$U(t)$ 有界，因此（6.11）的解在 $V\neq 0$ 时不会出现计算不稳定。然而，当 $V\equiv 0$ 时，不难证明 $U(t)$ 会出现线性增长的计算不稳定。

④ 取 $\theta=2/3$。这时可以由（6.3）出发直接验证 $(1/2)(C^2+S^2)+U^2+V^2$ 是守恒的，因此 C,S,U,V 均是有界的。也可以由（6.1）出发，直接验证在周期边界条件下（6.1）满足总动量 $\frac{1}{2}\sum_j u_j^2$ 守恒，从而 u_j 有界，总之在 $\theta=\frac{2}{3}$ 时，（6.1）不可能出现非线性计算不稳定。

§ 7 Leap-Frog 型全离散平流格式的非线性稳定性 上面我们已分析了时间导数项不离散化（即半离散化）情形的非线性计算稳定性，下面进一步分析时间、空间全离散化情形下格式的不稳定性，但也仅限于 leap-frog 型时间离散化情形。

对（6.1）取 leap-frog 型时间差分可得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}+(1-\theta)u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}+\frac{\theta}{2}\frac{(u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2}{2\Delta x}=0 \tag{7.1}$$

相应于（6.2）取形如（1.3）的特解代入（7.1）可得

$$\left.\begin{aligned}
C^{n+1}-C^{n-1}&=\frac{2\Delta t}{\Delta x}[(2\theta-1)U^n-V^n]S^n\\
S^{n+1}-S^{n-1}&=\frac{2\Delta t}{\Delta x}[(2\theta-1)U^n+V^n]C^n\\
U^{n+1}-U^{n-1}&=\frac{2\Delta t}{\Delta x}(\theta-1)S^nC^n\\
V^{n+1}-V^{n-1}&=0
\end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

不难看到，（7.2）是一个非线性代数方程组，求其普遍解仍有困难，不过（7.2）有特解

$$\begin{cases}S^n=0\ (n\text{为奇})\\ C^n=0\ (n\text{为偶})\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}S^n=0\ (n\text{为偶})\\ C^n=0\ (n\text{为奇})\end{cases}$$

于是考虑（7.2）的特殊情形

$$\left.\begin{aligned} C^{n+1}-C^{n-1}&=\frac{2\Delta t}{\Delta x}[(2\theta-1)U^n-V^n]S^n \\ S^{n+1}-S^{n-1}&=\frac{2\Delta t}{\Delta x}[(2\theta-1)U^n+V^n]C^n \\ U^{n+1}-U^{n-1}&=0, \qquad V^{n+1}-V^{n-1}=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

由（7.3）的后两式可得

$$U^n=\widetilde{U}_0+\widetilde{U}_1\cos\pi n, \qquad V^n=\widetilde{V}_0+\widetilde{V}_1\cos\pi n \tag{7.4}$$

其中 $\widetilde{U}_0=\dfrac{(U^0+U^1)}{2}$，$\widetilde{U}_1=\dfrac{(U^0-U^1)}{2}$，$\widetilde{V}_0=\dfrac{(V^0+V^1)}{2}$，$\widetilde{V}_1=\dfrac{(V^0-V^1)}{2}$ (7.5)

由（7.3）的前两式可得

$$C^{n+2}-(2+\mu)C^n+C^{n-2}=0$$

其中 $\mu=\left(\dfrac{2\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left\{\left[(2\theta-1)\widetilde{U}_0+\widetilde{V}_1\cos\pi n\right]^2-\left[(2\theta-1)\widetilde{U}_1\cos\pi n+\widetilde{V}_0\right]^2\right\}$

对 S^n 可得类似的方程，不难求得若 $|1+\mu/2|\leqslant 1$，则 C^n 有界，若 $|1+\mu/2|>1$，则 C^n 无界，出现计算不稳定。故（7.3）的稳定性判据为

$$-1<2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left\{\left[(2\theta-1)\widetilde{U}_0\pm\widetilde{V}_1\right]^2-\left[\widetilde{V}_0\pm(2\theta-1)\widetilde{U}_1\right]^2\right\}<0 \tag{7.6}$$

其中 n 为偶数时取正号，n 为奇数时取负号。（7.6）是较普遍的稳定性判据，若以 $\theta=0$，1，1/2，2/3 的具体值代入，可得[2,3]中所讨论的各具体格式的稳定性判据。换言之，[2,3]中所讨论的非线性不稳定的例子，均可作为这里的特例来得到。不等式（7.6）表明，只要

$$[\widetilde{V}_0\pm(2\theta-1)\widetilde{U}_1]^2<[(2\theta-1)\widetilde{U}_0\pm\widetilde{V}_1]^2 \tag{7.7}$$

则不论 Δt 如何，总出现计算不稳定，这时是非线性计算不稳定；然而当

$$2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left\{\left[(2\theta-1)\widetilde{U}_0\pm\widetilde{V}_1\right]^2-\left[\widetilde{V}_0\pm(2\theta-1)\widetilde{U}_1\right]^2\right\}<-1$$

时，也会出现计算不稳定，但这时是线性计算不稳定，它可以用缩小 Δt 来克服。下面进一步讨论两个特殊情形。

① 若 $\theta=1/2$，则（7.7）变为 $[\widetilde{V}_0]^2<[\widetilde{V}_1]^2$，即

$$[V_0+V_1]^2<[V_0-V_1]^2 \tag{7.8}$$

显然若 $V_0=V_1$，则（7.8）不能满足，即此时不会出现非线性计算不稳定。若 $V_0=-V_1$，则（7.8）显然满足，则必定会出现非线性计算不稳定。

② 若 $V\equiv 0$，则（7.7）退化为 $[\widetilde{U}_1]^2<[\widetilde{U}_0]^2$，即

$$(U_0-U_1)^2<(U_0+U_1)^2 \tag{7.9}$$

显然，若 $U_0=U_1$，则（7.9）满足，则出现非线性计算不稳定；若 $U_0=-U_1$，则（7.9）不能满足，则不会出现非线性计算不稳定。

三、二维涡度平流格式的稳定性

§ 8 瞬时平方守恒的涡度平流格式的计算稳定性 现在我们把§ 5 的结果推到二维涡

度平流格式上去，考虑正压无辐散涡度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \tag{8.1}$$

其中 $\zeta=\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$，$u=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$，$v=\frac{\partial\phi}{\partial x}$ 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{8.2}$$

利用（8.2）可将（8.1）改写为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial u\zeta}{\partial x}+\frac{\partial v\zeta}{\partial y}=0 \tag{8.3}$$

把（8.1）与（8.3）组合可得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\theta\left(\frac{\partial u\zeta}{\partial x}+\frac{\partial v\zeta}{\partial y}\right)+(1-\theta)\left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)=0 \tag{8.4}$$

不难验证，在周期边界条件下，只要取 $\theta=1/2$，方程（8.4）必满足涡度平方守恒。为此，下面我们主要讨论 $\theta=1/2$ 情形的涡度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial u\zeta}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial v\zeta}{\partial y}\right)=0 \tag{8.5}$$

在（x,y,t）空间布网，取空间网格距为 $\Delta x=\Delta y=d$，时间间距为 τ，记

$$\zeta_{+t}=(\zeta^{n+1}_{j,k}-\zeta^{n}_{j,k})/\tau,\qquad \bar{\zeta}^{t}=(\zeta^{n+1}_{j,k}-\zeta^{n-1}_{j,k})/2\tau$$

$$\bar{\zeta}^{x}=\left(\zeta^{n}_{j-\frac{1}{2},k}+\zeta^{n}_{j-\frac{1}{2},k}\right)/2,\qquad \zeta_{x}=\left(\zeta^{n}_{j-\frac{1}{2},k}-\zeta^{n}_{j-\frac{1}{2},k}\right)/d$$

$$\bar{\zeta}^{y}=\left(\zeta^{n}_{j,k+\frac{1}{2}}+\zeta^{n}_{j,k-\frac{1}{2}}\right)/2,\qquad \zeta_{y}=\left(\zeta^{n}_{j,k+\frac{1}{2}}-\zeta^{n}_{j,k-\frac{1}{2}}\right)/d$$

于是从（8.3）出发，可以构造二维 Lilly 格式

$$\bar{\zeta}^{t}_{t}+(\bar{\zeta}^{x}\bar{u}^{x})_{x}+(\bar{\zeta}^{y}\bar{v}^{y})_{y}=0 \tag{8.6}$$

相应地，逼近（8.2）的格式取为

$$\bar{u}^{x}_{x}+\bar{v}^{y}_{y}=0 \tag{8.7}$$

另外，从（8.5）出发可构造格式

$$\bar{\zeta}^{t}_{t}+\frac{1}{2}\left[u\bar{\zeta}^{x}_{x}+(\overline{u\zeta})^{x}_{x}\right]+\frac{1}{2}\left[v\bar{\zeta}^{y}_{y}+(\overline{v\zeta})^{y}_{y}\right]=0 \tag{8.8}$$

不难验证，在（8.7）条件下，（8.8）与（8.6）是等价的。

格式（8.6）或（8.8）是显式格式，虽然它们在（8.7）的条件下具有瞬时平方守恒性，但是在下一节我们将证明，它们仍存在非线性不稳定的例子。

为了得到稳定性更好的格式，可把（8.8）推广为

$$\bar{\zeta}^{t}_{t}+\frac{1}{2}\left[u^{**}\overline{(\zeta^{*})}^{x}_{x}+(u^{**}\zeta^{*})^{x}_{x}\right]+\frac{1}{2}\left[v^{**}\overline{(\zeta^{*})}^{y}_{y}+(v^{**}\zeta^{*})^{y}_{y}\right]=0 \tag{8.9}$$

其中 u^{**}，v^{**} 和 ζ^{*} 分别为 u,v 和 ζ 的某种光滑值，例如可取 $u^{**}=\frac{u^{n+1}+u^{n-1}}{2}$，$v^{**}=$

$\frac{v^{n+1}+v^{n-1}}{2}$，或 $u^{**}=u$，$v^{**}=v$ 等等，而取

$$\zeta^{*}=\alpha\zeta^{n-1}+(1-\alpha)\zeta^{n+1},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1 \tag{8.10}$$

或

$$\zeta^{*}=\zeta$$

然而，就空间差分而言，（8.9）就是[26]中所构造格式在二维涡度方程上的体现。

相应地，我们把（8.7）推广为

$$\overline{(u^{**})}^{x}_{x}+\overline{(v^{**})}^{y}_{y}=0 \tag{8.11}$$

同样地，可以把（8.6）推广写为

$$\overline{\zeta}^{t}_{t}+(\overline{\zeta^{*}}^{x}\overline{u^{**}}^{x})_{x}+(\overline{\zeta^{*}}^{y}\overline{v^{**}}^{y})_{y}=0 \tag{8.12}$$

这个可称之为推广的 Lilly 格式，是一类相当普遍的格式，依赖于 α 值的不同，它们可为显式的或隐式的。记

$$\|\zeta^{n}\|^{2}=\sum_{j}\sum_{k}\zeta^{n}_{jk} \tag{8.13}$$

如果差分方程的解满足

$$\|\zeta^{n}\|^{2}\leqslant C \tag{8.14}$$

则称格式是计算稳定的，其中 C 为常数。显然若 $\|\zeta^{n+1}\|\leqslant\|\zeta^{n-1}\|$ 或 $\|\zeta^{n+1}\|\leqslant\|\zeta^{n}\|$，则格式稳定，于是有如下定理：

定理 4　在周期边界条件下，若 ζ^{*} 按（8.10）计算，则格式（8.9）的稳定性如下：当 $1\geqslant\alpha>1/2$ 时，涡度平方和增长，格式绝对不稳定；当 $\alpha=1/2$ 时，涡度平方和守恒，格式稳定（中性）；当 $0\leqslant\alpha<1/2$，涡度平方和减小，格式稳定（衰减）。

该定理的证明方法同定理 3，现从略。

还要指出的是，格式（8.9）是三个时间层的格式，为了节省机器的存储量，还可以构造两个时间层的格式

$$\zeta_{+t}+\frac{1}{2}\left[u^{**}\overline{(\zeta^{*})}^{x}_{x}+\overline{(u^{**}\zeta^{*})}^{x}_{x}\right]+\frac{1}{2}\left[v^{**}\overline{(\zeta^{*})}^{y}_{y}+\overline{(v^{**}\zeta^{*})}^{y}_{y}\right]=0 \tag{8.15}$$

这正是[28]中所建议的格式在涡度方程上的具体化。如果相应地取

$$\zeta^{*}=\alpha\zeta^{n}+(1-\alpha)\zeta^{n+1},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1 \tag{8.16}$$

那末，类似于定理 4 有

定理 5　在周期边界条件下，若 ζ^{*} 按（8.16）计算，则格式（8.15）的稳定性如下：当 $1\geqslant\alpha>1/2$ 时，格式绝对不稳定；当 $\alpha=1/2$ 时，格式稳定（中性）；当 $0\leqslant\alpha<1/2$ 时，格式稳定（衰减）。

定理 4 和定理 5 也告诉我们，格式（8.9）和（8.15）的计算稳定性与 u^{**}，v^{**} 的取法无关，而只与 α 的数值有关，即只与格式的隐式程度有关。

§ 9　二维 Lilly 格式和 Arakawa 格式非线性计算不稳定的例子　近些年来，在国内外的数值天气预报工作中广泛采用了 Lilly 格式和 Arakawa 格式，这两种格式均为显式的瞬时平方守恒格式，它们都有瞬时平方守恒性，因而都有较好的计算稳定性。但是，当沿时间也作差分时，它们就不能确保计算稳定了。正如上节所指出的，逼近（8.1）的 Lilly 格式为（8.6）。现在证明（8.6）存在非线性计算不稳定。

类似[1]的作法，取（8.6）的形式如下的特解：

$$\phi^n_{j,k}=\left(C_n\cos\frac{\pi j}{2}+S_n\sin\frac{\pi j}{2}+U_n\cos\pi j\right)\sin\frac{2\pi}{3}k \tag{9.1}$$

其中 C_n，S_n，U_n 分别是波长为 $4\Delta x$，$4\Delta x$ 和 $2\Delta x$ 的波的振幅，把（9.1）代入（8.6），可得波振幅的方程组为

$$\left.\begin{aligned}&C_{n+1}-C_{n-1}=\sigma S_nU_n\cos\pi j \quad (j\text{ 偶时成立})\\&S_{n+1}-S_{n-1}=-\sigma C_nU_n\cos\pi j \quad (j\text{ 奇时成立})\\&U_{n+1}-U_{n-1}=(25/49)\sigma S_nC_n\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

其中 $\sigma=(7\sqrt{3}/20)(\tau/h^2)$。注意到 j 的奇偶性，可得

$$C_{n+1}-C_{n-1}=\sigma S_nU_n,\quad S_{n+1}-S_{n-1}=\sigma C_nU_n,\quad U_{n+1}-U_{n-1}=(25/49)\sigma S_nU_n \tag{9.3}$$

不难看到上方程组有特解

$$C_n=0\ (\text{当 } n \text{ 为奇时}),\quad S_n=0\ (\text{当 } n \text{ 为偶时})$$

于是可考虑（9.3）的特殊情形

$$C_{n+1}-C_{n-1}=\sigma S_nU_n,\quad S_{n+1}-S_{n-1}=\sigma C_nU_n,\quad U_{n+1}-U_{n-1}=0 \tag{9.4}$$

由（9.4）第3式知 U^n 必循环交替地取两个常数 A 和 B，由（9.4）第1和第3式可得

$$C_{n+2}-2\mu C_n+C_{n-2}=0 \tag{9.5}$$

其中 $\mu=1+(1/2)\sigma^2AB$，对 S_n 可以得到类似的方程，由此知若 $|\mu|\leqslant1$，则 C_n，S_n 有界。若 $|\mu|>1$，则解随 n 指数增长。换言之，若 A，B 反号且 $-4\leqslant\sigma^2AB\leqslant0$，则 C_n，S_n 有界，格式计算稳定；若 A，B 反号且 $\sigma^2AB<-4$，或者 A，B 同号，则解随 n 指数增长，即出现计算不稳定。但前者的不稳定可以用缩小 Δt 来克服，而后者则不能，因此 A，B 同号时所出现的是非线性计算不稳定。

利用（8.2）还可将（8.1）改写为

$$\partial\zeta/\partial t+J(\phi,\zeta)=0 \tag{9.6}$$

其中 $J(\phi,\zeta)=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$，在[6]中 Arakawa 构造了如下的差分格式：

$$\frac{\zeta^n_{j,k}-\zeta^{n-1}_{j,k}}{2\tau}+\mathbf{J}(\phi,\zeta)=0 \tag{9.7}$$

其中 $\mathbf{J}=(1/3)(J^{++}+J^{\times+}+J^{\times+})$，而

$$J^{++}=\frac{1}{4h^2}[(\phi^n_{j+1,k}-\phi^n_{j-1,k})(\zeta^n_{j,k+1}-\zeta^n_{j,k-1})-(\phi^n_{j,k+1}-\phi^n_{j,k-1})(\zeta^n_{j+1,k}-\zeta^n_{j-1,k})]$$

$$\begin{aligned}J^{\times+}=\frac{1}{4h^2}[&\phi^n_{j+1,k}(\zeta^n_{j+1,k+1}-\zeta^n_{j+1,k-1})-\phi^n_{j-1,k}(\zeta^n_{j-1,k+1}-\zeta^n_{j-1,k-1})\\&-\phi^n_{j,k+1}(\zeta^n_{j+1,k+1}-\zeta^n_{j-1,k+1})+\phi^n_{j,k-1}(\zeta^n_{j+1,k-1}-\zeta^n_{j-1,k-1})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J^{\times+}=\frac{1}{4h^2}[&\zeta^n_{j,k+1}(\phi^n_{j+1,k+1}-\phi^n_{j-1,k+1})-\zeta^n_{j,k-1}(\phi^n_{j+1,k-1}-\phi^n_{j-1,k-1})\\&-\zeta^n_{j+1,k}(\phi^n_{j+1,k+1}-\phi^n_{j+1,k-1})+\zeta^n_{j-1,k}(\phi^n_{j-1,k+1}-\phi^n_{j-1,k-1})]\end{aligned}$$

类似于上面对 Lilly 格式的讨论，同样可以证明 Arakawa 格式存在非线性计算不稳定，详见[15]。

（未完待续）