

Stokes流的积分方程法

严宗毅*

(中国科学院力学研究所)

主题词 Stokes流; 积分方程法; 低雷诺数流; 流体动力学势; Green函数

Stokes流, 或称零雷诺数流, 指的是尺寸微小、速度缓慢的流动, 它的理论在化工、生物力学、物理化学、环境保护、选矿、地球物理和气象科学等各个领域都有重要的应用^[1]。

零雷诺数流可用 Stokes 方程来描述:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{V} = \Delta P, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

式中 μ , \mathbf{V} 和 P 分别是流体的粘度、速度向量和压力。直到本世纪 60 年代, 只有数目非常有限的 Stokes 流问题能够解析地求解。特别当存在多个物理边界时, 只能用弱干扰理论 (反射法和点力法) 近似地解决边界间距较远的情形^[2]。70 年代发展起来的多极子法是一种强干扰理论, 成功地解决了多个球形、扁球形或长球形物体的无界或有界绕流问题, 即使间距很小时也能给出精确的结果^[2,21]。多极子法的解是一个截断的级数, 每一项都是某一正交曲线坐标系下式 (1) 的可分离基本解。当边界形状与该坐标系下的坐标面一致或接近时, 多极子法是非常有效的。可是假若边界形状偏离该坐标面很远, 应用多极子法却可能得不到收敛的结果^[3]。例如, 有限长圆柱的轴向绕流这样一个看来很简单的问题就不宜用多极子法的级数解来表达。多极子法把一般解表示成基本解的级数和, 利用的是式 (1) 的线性性质; 这正如在位势流理论中把一般解表示成源汇的积分是利用位势流方程的线性性质。那么, 能不能把 Stokes 流的一般解也表示成某些基本解的积分呢? 回答是肯定的。1972 年, Gluckman 等人^[4]用零厚度扁球面坐标系下的基本解沿物面积分; 1975 年, Youngren & Acrivos^[5]用点力 (stokeslet) 沿物面积分; 1984 年吴望一^[6]用球坐标下多极子解中各阶奇点沿物体内部轴线或平面积分。他们在不同程度上解决了任意回转体或其他物体的零雷诺数绕流问题。上述积分中都含有待定的密度函数。它们和多极子级数解中的待定系数一样, 都得用配位法确定, 使得边界条件在有限个离散点上得到满足。不同的是, 这样一来多极子法得到线性代数方程组, 而采用积分的方法却得到线性积分方程组。这就是“积分方程法”名称的由来。在上述各种积分方程法中, 以采用点力的方法应用最为广泛, 理论也最有系统 (称为“流体动力学势”理论)。下面只对这一方法做一简介。

* 现在工作单位: 北京大学力学系。

I. 流体动力学势理论

让我们考虑两个互相关联又互不相同的 Stokes 流问题 (图 1)。问题 1 是在无穷流体空间 Ω 中的真实流动, 静止的物面 $\partial\Omega$ 构成 Ω 的边界, 无穷远处来流速度为 $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ 。流体的扰动速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}(\mathbf{x})$ 以及相应的扰动压力 $p(\mathbf{x})$ 满足 Stokes 方程:

$$\mu \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (2)$$

和边界条件

$$v_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad p(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad (|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \quad (2a)$$

$$v_i(\mathbf{x}) = -U_i(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega) \quad (2b)$$

在本文中, 我们采用张量符号。按照 Einstein 求和法则, 同一项内的重复下标表示对该下标求和。除特别注明者外, 下标由 1 变到 3。问题 2 是由点 \mathbf{y} 处的 k 向单位点力在无穷流体中引起的假想流动, 流场内点 \mathbf{x} 的速度 $u^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和压力 $p^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 满足方程

$$\mu \frac{\partial^2 u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial p^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} = \delta_{ik} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \frac{\partial u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

而无穷远处流体静止:

$$u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow 0, \quad p^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow 0, \quad (\text{当 } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \text{ 时}) \quad (3a)$$

式中 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 是 Dirac 的 δ 函数。(3) 和 (3a) 有基本奇解:

$$\left. \begin{aligned} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta_{ik}}{r_{xy}} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r_{xy}^3} \right] \\ p^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{y_k - x_k}{4\pi r_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 $r_{xy} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $\delta_{ik} = 1$ (若 $i = k$) 或 0 (若 $i \neq k$)。

Ladyzhenskaya^[5] 导出了这两个问题的 Green 公式如下:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left\{ v_i(\mathbf{y}) \left[\mu \frac{\partial^2 u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j \partial y_j} - \frac{\partial p^k(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial y_i} \right] - u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[\mu \frac{\partial^2 v_i(\mathbf{x})}{\partial y_j \partial y_j} - \frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right] \right\} d\Omega_y \\ &= \iint_{\partial\Omega} \left\{ v_i(\mathbf{y}) T_{ij} [u^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] n_j(\mathbf{y}) - u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{ij} [v(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{y}) \right\} dS_y \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} T_{ij} [v(\mathbf{y})] &= -\delta_{ij} p(\mathbf{y}) + \mu \left[\frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right] \\ T_{ij} [u^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] &= -\delta_{ij} p^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mu \left[\frac{\partial u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right] \end{aligned}$$

分别是问题 1 和问题 2 的应力张量, $\{n_j\}$ 是指向物体内部的物面法向单位向量, $d\Omega_y$ 和 dS_y 中的下标 y 表示积分是对点力所在位置 \mathbf{y} 做的。

利用 (2), (3) 容易看出 (5) 左端化为 $v_i(\mathbf{x})$ 。这意味着流场内点 \mathbf{x} 的扰动速度

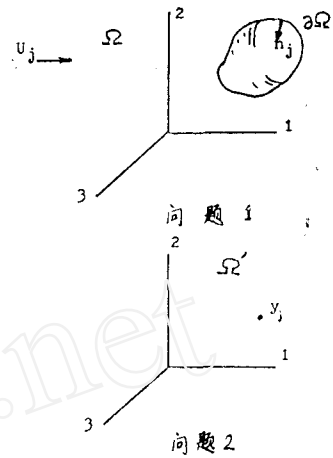


图 1 两个 Stokes 流问题

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 可表示成两项面积分即“单层势” $\mathbf{v}^S(\mathbf{x})$ 和“双层势” $\mathbf{v}^D(\mathbf{x})$ 之和。于是可利用(4)把(5)写成

$$v_i(\mathbf{x}) = v_i^S(\mathbf{x}) + v_i^D(\mathbf{x}) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} v_i^S(\mathbf{x}) &= - \iint_{\partial\Omega} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}[\mathbf{v}(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{y}) dS_y = - \iint_{\partial\Omega} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_k(\mathbf{y}) dS_y \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{\delta_{ik}}{r_{xy}} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r_{xy}^3} \right] f_k(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v_i^D(\mathbf{x}) &= \iint_{\partial\Omega} T_{ij}[\mathbf{u}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) dS_y \\ &= \frac{3}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r_{xy}^5} v_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$f_k(\mathbf{y}) = T_{kj}[\mathbf{v}(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{y}) \quad (9)$$

表示在真实流动中点 \mathbf{y} 处 k 方向上的应力合力。

Ladyzhenskaya^[3]证明,当物面的扰动速度为常数时,对于物面以外的流场点而言,该面上的双层势恒等于零,这时只要单层势就足够了。她还证明,只要边界面 $\partial\Omega$ 是Lyapunov曲面(对有实际意义的曲面而言,这相当于要求 $\partial\Omega$ 处处有明确定义的切平面),单层势 $\mathbf{v}^S(\mathbf{x})$ 在流场内部和边界上是处处连续的。另一方面,双层势 $\mathbf{v}^D(\mathbf{x})$ 却在界面 $\partial\Omega$ 处间断:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} v_i^D(\mathbf{x}) = v_i^D(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} v_i(\mathbf{x}_0), \quad (\mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega) \quad (10)$$

从物理上讲,单层势和双层势分别相当于点力和高阶奇点在边界面上的连续分布。每一种势(及其相应的压力^[5])各自满足Stokes方程(2)和无穷远处条件(2a)。要想使(6)成为问题1的解,只需要调整 $f_k(\mathbf{y})$,使得物面边界条件(2b)得到满足就行了。

II. 零雷诺数绕流问题

Youngren & Acrivos^[6]最先应用上述理论解决了任意形状物体的零雷诺数绕流问题。他们让(6)~(8)中的点 \mathbf{x} 逼近物面 $\partial\Omega$,注意到双层势的间断性(10),发现物面无滑移条件(2b)可写成

$$\begin{aligned} -U_i(\mathbf{x}) &= \frac{3}{2\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r_{xy}^5} n_j(\mathbf{y}) U_k(\mathbf{y}) dS_y \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{\delta_{ik}}{r_{xy}} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r_{xy}^3} \right] f_k(\mathbf{y}) dS_y, \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega) \end{aligned} \quad (11)$$

式中的积分虽在 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ 点奇异,但当 $\partial\Omega$ 为Lyapunov曲面时是存在的。可证明(2), (2a), (2b)表示的问题1对任意 $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ 有唯一解,所以(11)解出的 $f_k(\mathbf{y})$ 代入(6)~(8)后就得到问题1的解。

(11)对于未知密度函数 $f_k(\mathbf{y})$ 说来是第一类Fredholm积分方程,一般不能解析求解。Youngren和Acrivos采用Krylov-Bogoliubov的配位法^[6]求得数值解。具体做法是:先把物面 $\partial\Omega$ 分成 N 个面元 Δ_m ($m = 1, 2, \dots, N$),使每个 Δ_m 都足够小,从而近似认为 $f_k(\mathbf{y})$ 在 Δ_m 上等于常值,例如 $f_k(\mathbf{x}^m)$,这里 \mathbf{x}^m 是 Δ_m 中的一个点。然后再让(11)只在 N 个离散点

(称为配位点) $\mathbf{x} = \mathbf{x}^m$ 上满足, 于是积分方程变成了一组代数方程

$$\begin{aligned}
 & -U_i(\mathbf{x}^m) - \frac{3}{2\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{(x_i^{(m)} - y_i)(x_j^{(m)} - y_j)(x_k^{(m)} - y_k)}{r_{\mathbf{x}^m \mathbf{y}}^3} n_j(\mathbf{y}) U_k(\mathbf{y}) dS_y \\
 & = \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{j=1}^N f_k(\mathbf{x}^{(j)}) \iint_{\Delta_j} \left[\frac{\delta_{ik}}{r_{\mathbf{x}^{(j)} \mathbf{y}}} + \frac{(x_i^{(m)} - y_i)(x_k^{(m)} - y_k)}{r_{\mathbf{x}^{(j)} \mathbf{y}}^3} \right] dS_y \quad (m=1, 2, \dots, N) \quad (12)
 \end{aligned}$$

(12) 共有 $3N$ 个线性方程, 从中可以解出 $3N$ 个未知的 $f_k(\mathbf{x}^{(j)})$. 解出以后, 代回 (6)–(8), 可得流场中任一点 \mathbf{x} 的扰动速度

$$\begin{aligned}
 v_i(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \sum_{j=1}^N f_k(\mathbf{x}^{(j)}) \iint_{\Delta_j} \left[\frac{\delta_{ik}}{r_{\mathbf{x} \mathbf{y}}} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r_{\mathbf{x} \mathbf{y}}^3} \right] dS_y \\
 & + \frac{3}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r_{\mathbf{x} \mathbf{y}}^3} n_j(\mathbf{y}) U_k(\mathbf{y}) dS_y, \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (13)
 \end{aligned}$$

因为 f_i 是物面上的局部应力合力, 所以物体所受的总力 \mathbf{F} 和力矩 \mathbf{T} 都很容易算出:

$$F_i = - \sum_{j=1}^N f_i(\mathbf{x}^{(j)}) \iint_{\Delta_j} dS_y \quad (14a)$$

$$T_i = \sum_{j=1}^N f_k(\mathbf{x}^{(j)}) \iint_{\Delta_j} \epsilon_{ilk} y_l dS_y \quad (14b)$$

式中 $\epsilon_{ilk} = 1$ (若 $ilk = 123, 231$ 或 312) 或 -1 (若 $ilk = 321, 132$ 或 213) 或 0 (若任二下标相等)。

整个解法中最关键的部分是计算 (12) 右端 Δ_j 上的积分。当物形为轴对称时可解析地把沿幅角方向的积分表示成椭圆积分^[10]。当 $j = m$ 时 $\mathbf{x}^{(m)}$ 是奇点, 在它的邻域得用切平面来近似 Δ_m , 然后采用局部极坐标系解析地计算积分。而所有其余情形一般都得做数值积分。

Youngren & Acrivos^[6] 分别算了回转椭球体和有限长圆柱体两种情形的轴对称绕流和三维绕流。其中长球体在剪切流中的情形 (图 2) 另有精确解析解可供比较。当取 $N = 144$ 时, 对于长短轴之比在 1 至 50 的范围内, 力矩的相对误差在 1% 至 3% 范围内, 物面应力分布的最大相对误差小于 5%。对于很长的球体, 如果靠近两端多取一些配位点, 会比较均匀取点时精度为好。

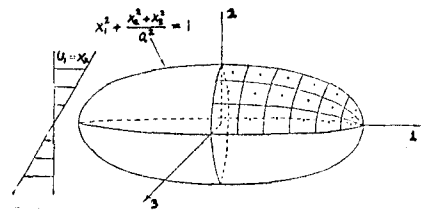


图 2 剪切流中的长球体

积分方程不仅能用于边界为固壁的情形, 同样也适用于有流体界面的情形。Youngren & Acrivos^[7] 算出了粘性流中无粘气泡的定常形状。当表面张力很大时或很小时, 他们的解与原有解析解一致; 当表面张力为中间值时, 原来的方法不能解, 现在也可以解了。Rallison & Acrivos^[8] 研究了单个液滴在另一种不相混合的液体中的非定常变形过程, 发现只有当某一表示剪切力与表面张力之比的参数小于临界值时, 液滴形状才逐渐趋于定常, 否则终会失稳而破裂。

流体界面与固壁的不同在于: 第一, 固壁上粘性流体是无滑移的, 因此速度已知, 只有

应力 (或 $f_k(y)$) 未知, 但流体界面上速度与应力均是未知的。所以两种情形下积分方程中的未知函数有所不同。第二, 与固壁不同, 流体界面的形状是事先未知的, 而且还是可变形的, 因而问题可能是非定常的。在下一节的例题中, 我们会清楚地看到这些特点。

III. 存在无穷可变形边界的情形

1982年, Lee & Leal^[10,11] 研究了固体球以常速度 U 垂直逼近无穷流体界面的情形

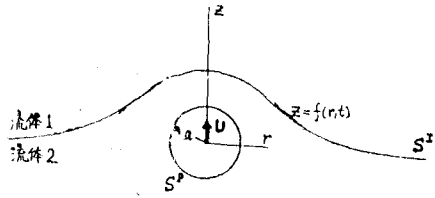


图3 球垂直于流体界面的运动

(图3)。界面两侧的流体1和流体2互不混合, 在远离球处是静止的。界面一开始是平的, 球完全浸在流体2中。在界面 $z=f(r,t)$ 上, 两种流体速度相等 (记为 v^I), 而两侧法向应力之差与表面张力以及重力相平衡:

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}] = \gamma \mathbf{f}(f) \quad (15)$$

式中 $\mathbf{F}(f)$ 是一个复杂的已知函数^[10], 与界面的几何形状和表面张力、球的直径和速度以及两种流体的密度差有关。按照 (6)–(8), 两种流体的速度 $v^{(1)}, v^{(2)}$ 可分别表示成

$$v_i^{(1)}(\mathbf{x}) = - \iint_{S^I} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}^{(1)} [v^j(\mathbf{y})] n_j^I(\mathbf{y}) dS_y^I + \iint_{S^I} T_{ij} [u^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v_k^I(\mathbf{y}) n_j^I(\mathbf{y}) dS_y^I, \quad (\mathbf{x} \in \text{流体1}) \quad (16a)$$

$$v_i^{(2)}(\mathbf{x}) = - \iint_{S^I} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}^{(2)} [v^j(\mathbf{y})] n_j^I(\mathbf{y}) dS_y^I + \iint_{S^I} T_{ij} [u^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v_k^I(\mathbf{y}) n_j^I(\mathbf{y}) dS_y^I - \iint_{S^P} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}^{(2)} [v^j(\mathbf{y})] n_j^P(\mathbf{y}) dS_y^P \quad (\mathbf{x} \in \text{流体2}) \quad (16b)$$

这里上标 I 表示流体界面, 上标 P 表示球面。注意式中流体界面上既有单层势又有双层势, 而球面上只有单层势。这是因为如前所述, 当物面速度为常数时, 该面上双层势恒等于零。

在球面上 $v_i^{(2)}(\mathbf{x}) = U_i$, 在流体界面上 $v_i^{(1)}(\mathbf{x}) = v_i^{(2)}(\mathbf{x}) = v_i^I(\mathbf{x})$, 再加上法向力的平衡条件 (15), 共计给出三个积分方程

$$U_i = - \iint_{S^I} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}^{(2)} [v^j(\mathbf{y})] n_j^I(\mathbf{y}) dS_y^I + \iint_{S^I} T_{ij} [u^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v_k^I(\mathbf{y}) n_j^I(\mathbf{y}) dS_y^I - \iint_{S^P} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}^{(2)} [v^j(\mathbf{y})] n_j^P(\mathbf{y}) dS_y^P, \quad (\mathbf{x} \in S^P) \quad (17a)$$

$$\frac{1}{2} v_i^I(\mathbf{x}) = - \iint_{S^I} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}^{(2)} [v^j(\mathbf{y})] n_j^I(\mathbf{y}) dS_y^I + \iint_{S^I} T_{ij} [u^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v_k^I(\mathbf{y}) n_j^I(\mathbf{y}) dS_y^I - \iint_{S^P} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}^{(2)} [v^j(\mathbf{y})] n_j^P(\mathbf{y}) dS_y^P, \quad (\mathbf{x} \in S^I) \quad (17b)$$

$$\frac{1}{2}(\lambda+1)v_i^l(\mathbf{x}) = \iint_{S^l} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) F_k(f) dS_y^l - (\lambda-1) \iint_{S^l} T_{ij}[\mathbf{u}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v_k^l(\mathbf{y}) n_j^l(\mathbf{y}) dS_y^l - \iint_{S^p} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}^{(2)}[\mathbf{v}^p(\mathbf{y})] n_j^p(\mathbf{y}) dS_y^p, \quad (\mathbf{x} \in S^l) \quad (17c)$$

式中 $\lambda = \mu_1/\mu_2$ 是两种流体的粘度比。在导出 (17b) 和 (17c) 时, 用了双层势在界面上的间断性 (10)。这三个向量方程中包含三个向量未知函数

$$T_{kj}^{(2)}[\mathbf{v}^p(\mathbf{y})] n_j^p(\mathbf{y}), T_{ij}^{(2)}[\mathbf{v}^l(\mathbf{y})] n_j^l(\mathbf{y}) \text{ 和 } v_i^l(\mathbf{y})$$

界面的形状 $f(r, t)$ 虽也未知, 可是因为

$$\mathbf{n}^l(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}^l(\mathbf{y}) = \frac{\partial f / \partial t}{\sqrt{1 + (\partial f / \partial r)^2}} \quad (18)$$

我们可取很小的时间间隔 Δt , 由上一时刻的结果算出 $\partial f / \partial t$, 进而算出此刻的 f , 然后把它认为已知, 求解 (17a) — (17c), 算出准定常的流场, 依此类推, 以后的时刻可以一步步算下去。

(17a) — (17c) 原则上可以象上节一样化为代数方程组, 然后用配位法求解。不过现在 S^l 是无穷大的曲面, 面元 Δ_m 不可能都象上节那样取成有限大小, 而无穷大的面元又会使有的积分发散。解决的办法是把无穷积分域截断成一个大的有限域。Lee & Leal^[10] 估计了界面上应力的量级, 发现如果在 $r = R_0$ 处截断, 所引起单层势和双层势的误差分别为 $O(R_0^{-2})$ 和 $O(R_0^{-4})$ 。试算表明, 当球面取 6—16 点, 流体界面取 10—20 点, R_0 为 20 倍球半径时算出的阻力系数, 可以精确到千分之一以内。他们的计算揭示了: 当粘度比、密度差和表面张力取不同值时, 流体界面的形状存在两种不同的模式^[11]。这对于研究物理化学中许多现象是有意义的。

IV. Green 函数法

假设在 Stokes 流中, 固壁 S^1 以给定速度 $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ 运动而固壁 S^2 和无穷远处流体都静止:

$$v_i(\mathbf{x}) = U_i(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in S^1) \quad (19a)$$

$$v_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{x} \in S^2) \quad (19b)$$

这时流场 Ω 中点 \mathbf{x} 的速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 可以用单双层势表示成

$$v_i(\mathbf{x}) = - \iint_{S^1} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_k^{(1)}(\mathbf{y}) dS_y^1 - \iint_{S^2} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_k^{(2)}(\mathbf{y}) dS_y^2 + \iint_{S^1} T_{ij}[\mathbf{u}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) dS_y^1, \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (20)$$

式中的未知密度函数 $f_k^{(1)}(\mathbf{y})$ 和 $f_k^{(2)}(\mathbf{y})$ 应按以前讲的配位法由满足 (19a) 和 (19b) 而定。上式中的基本解 $u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 满足方程 (3) 和无穷远处条件 (3a), 但在边界 S^1 和 S^2 上不受任何限制。现在假如我们能找到一个函数 $u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (不再是 (4)), 它不仅满足 (3) 和 (3a), 而且满足

$$u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (\mathbf{x} \in S^2) \quad (3b)$$

那么, (20) 就可以化简成

$$v_i(\mathbf{x}) = - \int_{S^1} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_k^{(1)}(\mathbf{y}) dS_y^1 + \int_{S^1} T_{ij} [u^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] U_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) dS_y^1, \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (21)$$

显然(21)比(20)简洁,未知函数向量由两个变成一个,配位法也只需在一个边界上应用。对于许多情形,这不仅减少计算量,而且还提高精度。特别当 S^2 是无穷边界时好处就更明显。这样的基本解 $u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 叫做Green函数,它只和点力的位置及边界 S^2 的几何形状有关。

Blake等^[12,13]用Fourier变换法找到了点力位于静止无穷平壁附近时的Green函数。假定 k 向单位点力位于 (y_1, y_2, h) ,平壁位于 $y_3 = 0$ (图4),则点 \mathbf{x} 处的流体速度 $u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 可写成

$$u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \delta_{ik} + \frac{r_j r_k}{r^3} - \frac{R_j R_k}{R^3} + 2h(\delta_{i\alpha} \delta_{\alpha l} - \delta_{i3} \delta_{3l}) \frac{\partial}{\partial R_l} \left\{ \frac{h R_j}{R^3} - \left(\frac{\delta_{j3}}{R} + \frac{R_j R_3}{R^3} \right) \right\} \right\}, \quad (x_3 > 0) \quad (22)$$

式中 r 表示点 \mathbf{x} 与点 (y_1, y_2, h) 间的距离向量, R 表示点 \mathbf{x} 与点 $(y_1, y_2, -h)$ 间的距离向量,下标 α 只由1变到2。从物理上讲,当点力平行于平壁时,它的Green函数相当于在点

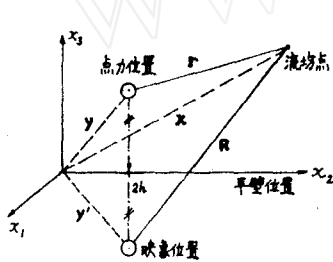


图4 点力在无穷平壁附近

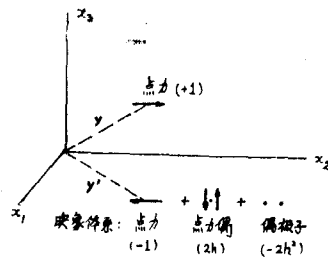


图5 点力平行于平壁时的映像体系

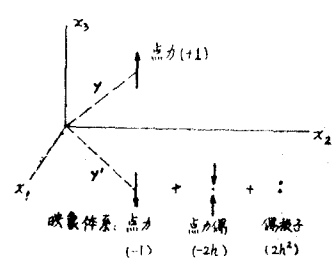


图6 点力垂直于平壁时的映像体系

$(y_1, y_2, -h)$ 处有一组映像,包括一个符号相反的单位点力,一个强度为 $2h$ 的点力偶(其点力垂直于平壁,而位移轴平行于原来点力)和一个强度为 $-2h^2$ 的偶极子(位移轴平行于原来点力)(图5)。当原来的点力垂直于平壁时,它在点 $(y_1, y_2, -h)$ 处的映像包括一个反向的单位点力,一个强度为 $-2h$ 的点力偶(其点力方向和位移轴都垂直于平壁)和一个强度为 $2h^2$ 的偶极子(位移轴垂直于平壁)(图6)。这和位势流理论的源汇映像法很相似,不过形式更为复杂而已。

我国留美学者许盛群^[22]最近应用上述的Green函数和(21)的原理解决了回转椭球体在平壁附近流体中的任意运动。这个解有助于揭示红细胞在血管壁附近翻滚对于增加氧、血浆蛋白和血小板扩散的影响。Liron等人^[14,16]给出了任意取向的点力在两平行板间或在圆管中任意位置时的Green函数。他们发现,点力在两平行板间产生的流动图像与Blake所解的一个平板情形在远离点力处是完全不同的。即使在点力附近,也仅当两板间距大于点力至近板距离8倍以上时,才可以忽略远板的影响。他们的结果可用于研究微生物的纤毛运动,植物的给养和呼吸,呼吸道中粘液的传送以及生殖道中精子、卵子的运动^[15]。

V. 与多极子法的联合运用

由上节看来,对一些复杂流动用Green函数往往会使求解简化。但实际上并非所有问题

都是如此。一方面除极少数情况外Green函数很难找到；另一方面某些问题的Green函数即使找到了,也常因形式太复杂而不便实际应用。举一个对生物膜和合成膜的过滤、渗透等现象有重要意义的例子来探讨不同方法的应用。假定在一无穷大零厚度平壁上有一圆孔,两侧充满流体,而在一侧任意位置有一球形粒子做任意运动(图7)。假设雷诺数接近于零,需要算球上所受的力和力矩。解决这个问题可能途径之一是多极子法^[2]。可是Dagan等^[20]发现在三维情形下无法用多极子法精确求解,因为这时物形太复杂,难于解析地满足孔两侧的动力学匹配条件。对于球位于孔轴线上时的轴对称运动,他们的解^[19]只能算球完全在孔以外的情形。另一种可能的途径是Green函数法。这一问题轴对称与非轴对称情形的Green函数已由Davis等^[17,18]导出。但前者是在圆环坐标系下得到的,后者则是十分复杂的积分和级数形式。看来应用Green函数法是很不容易的。第三种途径是应用第一节所述的积分方程法。主要困难在于有孔平壁不是一个Lyapunov曲面,因为孔的边缘没有明确的切平面。解决的办法是把整个流场分成左右两半,把孔也看成边界的一部分,这样每一半就都是Lyapunov曲面了。对两半分别应用Green公式(5),然后相加,孔上的单双层势消掉了,从而得到扰动速度的表达式为

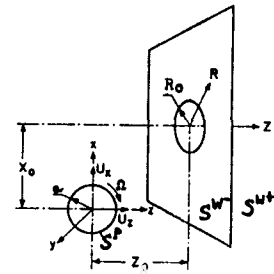


图7 球在有孔平壁附近的运动

$$\begin{aligned}
 v_i(\mathbf{x}) = & - \iint_{S^P} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{kj}[\mathbf{v}^P(\mathbf{y})] n_j^P(\mathbf{y}) dS_y^P \\
 & + \iint_{S^P} T_{ij}[\mathbf{u}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})] v_j^{(P)}(\mathbf{y}) n_i^P(\mathbf{y}) dS_y^P \\
 & - \iint_{S^{W-}} u_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_k^{(W-)}(\mathbf{y}) dS_y^{W-}
 \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$f_k^{(W-)}(\mathbf{y}) = T_{k3}^{(W-)}[\mathbf{v}(\mathbf{y})] - T_{k3}^{(W+)}[\mathbf{v}(\mathbf{y})] \quad (24)$$

是平壁两侧应力差,上标 P 表示球面, W^- 和 W^+ 表示平壁的两侧。(23)有一个很大的优点,就是不管点 \mathbf{x} 是在孔的哪一侧或是正好在孔中,它都成立。(23)原则上可以用来解图7的问题。可是积分方程法有一个固有的弱点,就是靠近边界上的量算得不准确,这对我们算球所受的力和力矩是很不利的。大家记得,多极子法的级数解用来表示球的扰动时,算球的阻力总是很精确的^[2,21],只不过因为有孔平壁的扰动不好用多极子级数来表示,我们才转而求助于积分方程法。那么,我们为什么不两种方法各取其优点,联合运用呢?具体地说,可把球的扰动用多极子级数表示^[21],而有孔平壁的扰动则用(23)第三项的积分形式来表示:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(\mathbf{x}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nabla \times (\mathbf{r} \chi_{-(n+1)}) + \nabla \Phi_{-(n+1)} - \frac{(n-2)}{\mu 2n(2n-1)} r^2 \nabla P_{-(n+1)} \right. \\
 & \left. + \frac{(n+1)}{\mu n(2n-1)} \mathbf{r} P_{-(n+1)} \right] - \iint_{S^{W-}} \mathbf{u}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_k^{(W-)}(\mathbf{y}) dS_y^{W-}
 \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $\chi_{-(n+1)}$, $\Phi_{-(n+1)}$, $P_{-(n+1)}$ 是 $-(n+1)$ 阶的球体调和函数, r 是由球心起算的径向位置向量。这可算是第四种途径。它的一个附带好处是使积分计算量大约减少了一半。

表 1 图 7 所示问题的阻力修正因子* (轴对称解) ($a/R_0 = 0.1$, $x_0 = 0$)

z_0/a	球在静止流体中运动			静止球的绕流		
	严宗毅 ^[23]	Dagan ^[19]	误差	严宗毅 ^[23]	Dagan ^[19]	误差
10.0	-1.0723	-1.0596	-1.0%	0.53439	0.52797	1.0%
5.0	-1.0666	-1.0532	-1.3%	0.84852	0.83796	1.3%
2.0	-1.0540	-1.0505	-0.3%	1.0069	1.0036	0.3%
1.5	-1.0523	-1.0504	-0.2%	1.0224	1.0206	0.2%
1.1	-1.0513	-1.0503	-0.1%	1.0319	1.0310	0.09%
1.0	-1.0511	不能算		1.0338	不能算	
0.5	-1.0503	不能算		1.0408	不能算	
0.0	-1.0501	不能算		1.0431	不能算	

* 阻力修正因子定义为球实际所受阻力与孤立球的 Stokes 阻力之比^[2]。

上面的最后两种途径是严宗毅^[23]提出的,他用(25)算出的轴对称结果与 Dagan 等^[19]的多极子解符合得很好,并且成功地计算了后者所不能算的球进入孔的情形(表 1)。在对(25)采用加权残值法处理之后,严宗毅等^[24,32]还第一次解决了有限尺寸的粒子在圆孔附近任意位置上的三维流体动力问题,并且应用这一结果研究了膜孔进出口区的渗透细微结构^[26,27]。这个三维结果也已被用来计算小粒子在合成膜上的收集效率^[28]。

山慧贤等^[25]应用(23)的积分形式解决了固体球、球形气泡或者带有固体球冠的球形气泡位于图 7 所示孔轴上时所受的流体动力问题。这一问题在化工上有重要应用,例如,当气泡通过流化床时会吸附周围的固体微粒而在背风面形成固态球冠。这时由于固体球冠与气泡连接处的速度有间断,如采用(25)的级数形式会收敛得很慢,采用(23)的积分形式虽然使计算量加大,却能得到较好的结果。

VI. 积分方程法的优缺点

如上所述,积分方程法把求解流场化为求解边界面上点力分布的密度函数,使问题由三维降为二维。这些密度函数有明确的物理意义(局部应力合力),在许多问题中正是我们感兴趣的量,对于边界可变形的问題就更为重要。当边界形状复杂,其他解法难以奏效时,积分方程法却常可应付裕如。此外,积分方程法的基本解可以有不同取法,又能与映像法或多极子法联合运用,在形式上是很灵活的。这些优点使积分方程法近年有了迅速发展,不仅能解决 Stokes 流问题,而且已被广泛应用于固体力学、渗流理论和传热学等领域(原理与本文大同小异,但基本解形式是不同的)。积分方程法也有其缺点。首先,它要求计算大量积分,对计算机的存储量和速度都提出较高的要求。例如图 2 所示的长球体绕流,当 $N=144$ 时要算 187,056 个积分,而且大部分靠数值计算。积分计算时间往往占全部计算时间 90% 以上,因此在选择其算法和编写程序时务必格外注意优化。其次,积分方程法的力和力矩结果之精度一般低于多极子解。尤其是三维情形,配位点的选法可能对精度有较大影响。因此对于那些边界形状与坐标面一致或接近的情形仍以先试多极子法为宜。当然,积分方程法的这些缺点并非不可克服的。例如,尽可能采用近似解析算法来代替数值积分,会使计算时间大大减

少。在(12)中对于密度函数 $f_i(x)$ 采用分段线性近似或分段抛物近似来代替分段常数近似,或者用点力在物体内部的分布来代替在物面的分布,都会使结果的精度改进。对于三维情形,采用加权残值法来代替配位法往往会使收敛性得到改进^[24,29]。

值得一提的是,除了本文所介绍的基于流体动力学势的积分方程法外,本文开头所提及的吴望一^[4]提出的奇点线分布法近来也有了新的发展。在采用分段线性近似^[30]或分段抛物近似^[31]之后,该法的精确度和收敛性能有了很大改进,可以用来计算任意形状尖头长轴对称体的 Stokes 流动,而且几乎适用于所有的细长比。我们看到,积分方程法在计算复杂的 Stokes 流方面有着很大的潜力。可以相信,这一方法本身也必将在实践中不断臻于完善。

作者在学习和运用积分方程法的过程中曾得到美国纽约市立大学 Weinbaum 和 Pfeffer 教授的指导,本文初稿并承吴望一教授与许盛群博士提出过宝贵意见,谨致谢意。

参 考 文 献

- 1 Happel J., Brenner H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Noordhoff (1973).
- 2 严宗毅, *力学与实践*, **4**, 4 (1982): 11-17.
- 3 Gluckman M. J., Weinbaum S., Pfeffer R., *J. Fluid Mech.*, **55** (1972): 677-709.
- 4 吴望一, *中国科学, A辑* (1984): 145-156.
- 5 Ladyzhenskaya O. A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, ch. 3, Gordon and Breach (1963) (译自俄文)。(中译本:粘性不可压缩流体动力学的数学问题,上海科技出版社(1963))
- 6 Youngren G. K., Acrivos A., *J. Fluid Mech.*, **69** (1975): 377-405.
- 7 —, —, *ibid.*, **76** (1976): 433-442.
- 8 Rallison J. M., Acrivos A., *ibid.*, **89** (1978): 191-200.
- 9 Kantorovich L. V., Krylov V. I., *Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience (1958) (译自俄文)。
- 10 Lee S. H., Leal L. G., *J. Colloid and Interface Sci.*, **87** (1982): 81-106.
- 11 Leal L. G., Lee S. H., *Adv. in Colloid and Interface Sci.*, **17** (1982): 61-81.
- 12 Blake J. R., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **70** (1971): 303-310.
- 13 —, Chwang A. T., *J. of Eng. Math.*, **8** (1974): 23-29.
- 14 Liron N., Mochon S., *ibid.*, **10** (1976): 287-303.
- 15 —, *J. Fluid Mech.*, **86** (1978): 705-726.
- 16 —, Shahar R., *ibid.*, **86** (1978): 727-744.
- 17 Davis A. M. J., O'Neill M. E., Brenner H., *ibid.*, **103** (1981): 183-205.
- 18 —, *Int. J. Multiphase Flow*, **9** (1983): 575-608.
- 19 Dagan Z., Weinbaum S., Pfeffer R., *J. Fluid Mech.*, **117** (1982): 143-170.
- 20 —, —, —, *Chem. Eng. Sci.*, **38** (1983): 583-596.
- 21 Weinbaum S., *Lect. on Math. in the Life Sci.*, **14** (1981): 119-192.
- 22 Hsu R. (许盛群), *The motion of a body of revolution near a planar wall at low Reynolds number*, Ph. D. Dissertation, The City University of New York (1985).
- 23 Yan Zong-Yi (严宗毅), *Three dimensional hydrodynamic and osmotic pore entrance phenomena*, Ph. D. Dissertation, The City University of New York (1985).
- 24 —, Weinbaum S., Ganatos P., Pfeffer R., *The three-dimensional hydrodynamic interaction of a finite sphere with a circular orifice at low Reynolds number*, *J. Fluid Mech.* (待发表)
- 25 Shan Huixian (山慧贤), Yan Zong-Yi, Dagan Z., *Axisymmetric low Re motion of a bubble towards an orifice in the presence of a stagnant cap of surfactants*, (待发表)
- 26 Yan Zong-Yi, Weinbaum S., Pfeffer R., *On the fine structure of osmosis including three dimensional pore entrance and exit behavior*, *J. Fluid Mech.*, **162** (1986): 415-438.
- 27 严宗毅, *可通透膜孔进出口的渗透细微结构*, 第2届全国生物力学学术会议论文汇编(二)(1985)。
- 28 Wang Yong-An (王安), Kao Junan (高如南), Weinbaum S., Pfeffer R., *On the inertial impaction of small particles at the entrance of a pore including hydrodynamic and molecular wall interaction effects*, *Chem. Eng. Sci.* (待发表)

- 29 Lewellen P. C., Hydrodynamic analysis of microporous mass transport, Ph. D. Dissertation, University of Wisconsin-Madison (1982).
30 吴望一, 何青, 应用数学和力学, 5,6 (1984): 793—800.
31 ——, 王少华, 力学学报, 16, 5 (1984): 443—453.
32 严宗毅, 用加权残值法解 Stokes 流中粒子与孔的流体动力干扰, 第 2 届全国加权残值法学术会论文集 (1986).

THE INTEGRAL EQUATION METHOD FOR STOKES FLOWS

Yan Zong-yi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

This paper introduces a new technique for Stokes flows—the integral equation method, in which the velocity disturbance generated by the boundaries in the flow is represented by the integrals of singularities distributed over the boundary surfaces. This method, being very flexible in treating complicated boundaries, has been successfully applied to the cases of solid particles, liquid drops or gas bubbles of various shapes in unbounded or bounded flows. In this paper, the basic principles, mathematical formulations and recent developments of this method are briefly reviewed, its advantages and disadvantages are discussed, and useful references are listed.

Keywords *Stokes flows; integral equation method; low Reynolds number flows; hydrodynamic potentials; Green's function*

1986 年全美流体动力学奖

美国物理学会 1986 年流体动力学奖将授予美国航空航天局 Ames 研究中心的 Robert T. Jones 博士。授奖将于 1986 年 11 月 23—25 日在俄亥俄的哥伦布 1986 年度全美物理学会流体动力学大会上举行。获奖是因为 R. T. Jones “半个世纪的创造性贡献：低纵横比翼理论。简单箭形，边界层独立原理，超声速域法则和斜翼飞机。他的创造性工作既改变了飞机的形状又丰富了空气动力学学科的内容”。

陈海波 林 珩