

# 环状等离子体的平衡问题

康寿万

(中国科学院力学研究所)\*

**主题词** 环状等离子体; 等离子体平衡; 托卡马克

## I. 引言

在受控热核反应装置中, 环状磁约束装置(包括托卡马克、仿星器及最近出现的很多新型装置如皱褶环、扭曲器、球马克等)是其中的主流。所有这类装置都会遇到一个共同的问题即平衡问题, 也就是在等离子体的压力  $P$  的驱动下, 等离子体环的大、小半径都趋向于膨胀, 如何使大小半径维持不变, 就是环状等离子体的力学平衡问题(简称平衡问题)。对于环状磁约束装置来说, 这是个基本问题。如果连力学平衡都建立不起来, 就休论其他了。

为了保持大、小半径不变, 必须用磁场来约束等离子体, 也就是用磁压力来平衡  $P$ 。从数学上说, 平衡问题的根本问题是求解下列平衡方程组:

$$-\nabla P + (1/c) \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = (4\pi/c) \mathbf{j} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

其中式(1)来自磁流体运动方程; 式(2), (3)来自麦克斯韦方程组。

磁场对等离子体的作用是通过  $(1/c) \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  这一项来实现的, 它可以改写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi} \left[ (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right] = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}_B \end{aligned}$$

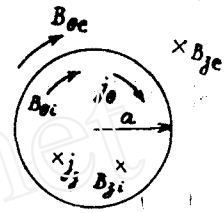
$\overleftrightarrow{T}_B = (1/4\pi)(\mathbf{B} \mathbf{B} - (1/2) B^2 \mathbf{I})$  是麦克斯韦张力张量的磁场部分, 相当于沿磁力线有张力  $(1/8\pi) B^2$ , 垂直于磁力线有压力  $(1/8\pi) B^2$ 。磁场能约束等离子体, 就是靠磁压力  $(1/8\pi) B^2$  来平衡  $P$ 。

本文限于综述轴对称等离子体环的平衡问题, 且针对受控热核反应装置。但本文涉及的许多物理概念和某些理论公式在考虑到具体条件时, 可用于天体等离子体的平衡问题。

\* 现在工作单位: 北方交通大学应用数理系。

## II. 直长圆柱等离子体的平衡<sup>[1]</sup>

设直长圆柱等离子体有半径  $a$ ，柱内有纵向电流（密度  $j_z$ ）及角向电流（密度  $j_\theta$ ）。在等离子体内外有外加纵向磁场  $B_{z_i}$  及  $B_{z_e}$ 。 $j_z$  产生的角向磁场是  $B_\theta$ （图 1）。 $j_\theta$  的起因，是  $B_z$  与  $B_\theta$  构成螺旋磁场，当电流沿螺旋磁力线流动时，其角向分量就是  $j_\theta$  的一部分； $j_\theta$  的另一部分是等离子体的逆磁特性所形成的磁化电流。当然， $B_z$  随时间变动时，也会引起  $j_\theta$ ，不过在平衡问题中，不研究随  $t$  变化的磁场。取圆柱坐标  $(r, \theta, z)$ ，由于对称性，各物理量都与  $\theta, z$  无关。由式 (1) 乘以  $r^2 dr$  并积分，得



$$-4\pi \int_0^a \frac{dP}{dr} r^2 dr = \int_0^a \left[ \frac{B_\theta}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} + B_z \frac{dB_z}{dr} \right] r^2 dr \quad (4)$$

计及

$$\int_0^a \frac{dP}{dr} r^2 dr = Pa^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^a P 2\pi r dr = a^2(P_a - \bar{P})$$

$$\int_0^a \frac{B_\theta}{r} \frac{d}{dr} (rB_\theta) r^2 dr = \frac{1}{2} a^2 B_{\theta a}^2$$

$$\int_0^a B_z \frac{dB_z}{dr} r^2 dr = \frac{1}{2} a^2 (B_{z_e}^2 - B_{z_i}^2)$$

$\bar{P}$ ,  $B_{z_i}^2$  是沿截面的平均值。式 (4) 成为 (把  $B_{z_e}$  改写为  $B_{z_e}$ ，无表面电流时二者相等)

$$\bar{P} + (1/8\pi) B_{z_i}^2 = P_a + (1/8\pi) (B_{\theta a}^2 + B_{z_e}^2) \quad (5)$$

上式的物理意义为柱表面处压力  $P_a + (1/8\pi)(B_{\theta a}^2 + B_{z_e}^2)$  与柱内压力  $\bar{P} + (1/8\pi) B_{z_i}^2$  平衡。

因为  $B_{\theta a} = 2I/ca$ ， $I$  是纵向电流，故得

$$\bar{P} + \frac{1}{8\pi} B_{z_i}^2 = P_a + \frac{I^2}{2\pi c^2 a^2} + \frac{1}{8\pi} B_{z_e}^2 \quad (6)$$

给定  $I$  后，等离子体半径将自动调整使上式成立，最后达到平衡，有一个平衡半径  $a$ 。

## III. 等离子体环的平衡<sup>[2]</sup>

设环的大、小半径是  $R, a$  (图 2)。因小截面平衡，故式 (5) 近似为 (略去  $P_a$ )

$$\bar{P} + (1/8\pi) B_{\phi i}^2 = (1/8\pi) (B_{\theta a}^2 + B_{\phi e}^2) \quad (7)$$

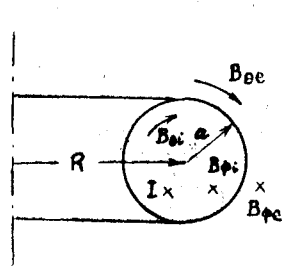


图 2

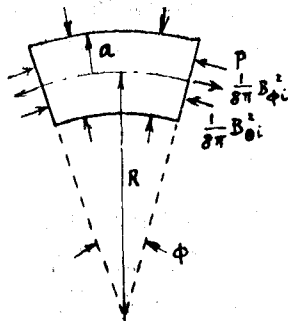


图 3

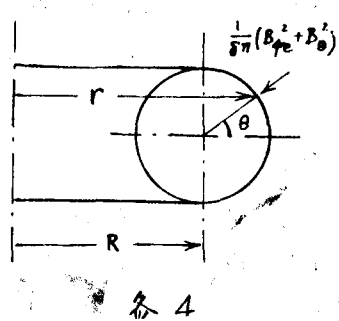


图 4

而由于环处在  $B_0$ ,  $B_\phi$  的作用下,  $B_0$  和  $B_\phi$  随  $r$  的增大而减小, 故环会沿  $r$  方向膨胀。

取一小段等离子体来考察它所受到的力。设它是单位长度, 即  $R\phi=1$  (图 3)。在两端的端面上受到等离子体压力  $P$  的合力是

$$F_p = \bar{P}\pi a^2 2 \sin(\phi/2) \approx \bar{P}\pi a^2 \phi = (\pi a^2/R)\bar{P}$$

端面上还有磁力线的张力, 合力是

$$F_{\phi_i} = (\pi a^2/R)(1/8\pi)B_{\phi_i}^2$$

端面上还有  $B_{\theta_i}$  产生的压力  $(1/8\pi)B_{\theta_i}^2$  的作用, 这在后面式 (9) 中再讨论。

在环管面上的磁压力来自  $B_{\phi_e}$  和  $B_0$  的贡献。  $B_{\phi_e}$  所形成的合力是 (图 4, 5)

$$F_{\phi_e} = 4 \int_0^{\phi/2} \int_0^\pi \frac{1}{8\pi} B_{\phi_e}^2 a r \cos\theta \cos\phi' d\theta d\phi'$$

计及  $B_{\phi_e} = (R/r)B_{\phi_0}$ ,  $B_{\phi_0}$  是  $r=R$  处的  $B_{\phi_e}$  值,  $r=R(1+\varepsilon\cos\theta)$ ,  $\varepsilon=a/R \ll 1$ , 得

$$F_{\phi_e} \approx -\frac{1}{4} B_{\phi_0}^2 R \varepsilon \int_0^{\phi/2} a \cos\phi' d\phi' \approx -\frac{1}{8\pi} \frac{\pi a^2}{R} B_{\phi_0}^2$$

负号表示  $F_{\phi_e}$  朝向  $r$  大的方向。对等离子体环来说,  $F_{\phi_e}$  是膨胀力。

作用在单位长度环段上的角向磁场  $B_\theta$  产生的合力 (包括环内及环外) 是

$$F_\theta = \frac{1}{2\pi R} \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{2c^2} L I^2 \right)$$

$L$  是圆环的电感,  $a \ll R$  时  $L = 4\pi R [\ln(8R/a) - 2 + (1/2)L_i]$ ,  $L_i$  是单位长度的内电感<sup>[3]</sup>:

$$L_i = \frac{1}{\pi a^2 B_{\theta a}^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} B_\theta^2 r dr d\theta \quad (8)$$

当  $I$  只是表面电流时,  $L_i = 0$ ; 当  $I$  沿截面均匀分布时,  $L_i = 1/2$ 。于是

$$F_\theta = \frac{I^2}{c^2 R} \left( \ln \frac{8R}{a} - 1 + \frac{1}{2} L_i \right) = \frac{\pi a^2}{R} \frac{1}{8\pi} B_{\theta a}^2 \left( 2 \ln \frac{8R}{a} - 2 + L_i \right) \quad (9)$$

$F_\theta$  的方向也向外, 是膨胀力。现在考察式 (9) 中  $L_i$  的物理意义。由式 (8) 得到  $L_i = B_{\theta_i}^2/B_{\theta a}^2$ , 所以  $L_i$  所对应的力  $F = (\pi a^2/R)(1/8\pi)B_{\theta a}^2 L_i = (\pi a^2/R)(1/8\pi)B_{\theta_i}^2$ 。由此可见, 式 (9) 中  $L_i$  项实际上是作用在端面上的角向磁场  $B_{\theta_i}$  的压力  $(1/8\pi)B_{\theta_i}^2$  的合力 (图 3)。

综合以上所述, 单位长度等离子体环段受到向外的力合

$$\frac{\pi a^2}{R} \left[ \bar{P} + \frac{1}{8\pi} B_{\phi_0}^2 + \frac{1}{8\pi} B_{\theta a}^2 \left( 2 \ln \frac{8R}{a} - 2 + L_i \right) \right]$$

向内的力只是  $(\pi a^2/R)(1/8\pi)B_{\phi_i}^2$ 。向外的力比向内的力大, 故等离子体环必然胀大, 即大半径  $R$  要变大。保持大半径平衡的办法是加上垂直磁场或用导体壳作等离子体的容器。

加上垂直磁场  $B_z$ , 使环内侧的  $B_\theta$  减弱, 外侧的  $B_\theta$  增强



图 5

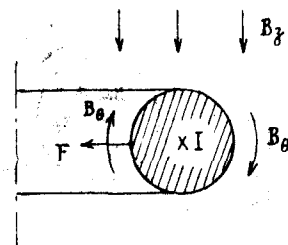


图 6

(图6), 这样就可以保持  $R$  的平衡.  $B_z$  与  $I$  产生向内的力  $F = (1/c)IB_z = (a/2)B_{\theta a}B_z$ , 平衡时有

$$B_z = \frac{a}{2R} B_{\theta a} \left[ \frac{4\pi\bar{P}}{B_{\theta a}^2} - \frac{B^2_{\phi z} - B^2_{\phi i}}{2B_{\theta a}^2} + \ln \frac{8R}{a} - 1 + \frac{1}{2}L_i \right]$$

代式(7)入上式, 得

$$B_z = \frac{I}{cR} \left( \beta_0 + \ln \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}L_i \right) \quad (10)$$

$\beta_0 = 8\pi\bar{P}/B_{\theta a}^2$ . 式(10)就是  $R$  的平衡公式.

现以中国科学院物理研究所的 CT-6 托卡马克为例, 计算其  $B_z$ . CT-6 的参数是:  $R = 45$  cm,  $a \approx 16$  cm,  $\beta_0 \approx 0.1$ ,  $L_i \approx 0.5$ , 当  $I = 30$  千安  $= 9 \times 10^{13}$  静安时,  $B_z = 162$  高斯, 相当于每千安的  $I$  要求 5.4 高斯的平衡场  $B_z$ .

用理想导体壳作容器也可保持环的大半径平衡. 这是因为当环向外侧膨胀时(图7), 由于壳的电导率  $\sigma$  是无穷大, 磁力线无法渗透进导体壳, 于是外侧的磁力线  $B_{\theta}$  被挤紧, 磁压  $(1/8\pi)B_{\theta}^2$  随之增大, 而内侧的磁力线变得稀疏, 磁压跟着下降, 这样就会把环向内推. 达到平衡时, 等离子体截面中心与壳轴有一个距离  $\Delta$ <sup>[3]</sup>:

$$\Delta = \frac{b^2}{2R} \left[ \ln \frac{b}{a} + \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \left( A + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (11)$$

$b$  是壳的小半径,  $A = (8\pi\bar{P}/B_{\theta a}^2) + (L_i/2) - 1$ . 式(11)是在理想导体壳的情况下求得的. 真实导体的  $\sigma$  是有限值, 故磁场可缓慢地渗入壳壁,  $\Delta$  值应该比式(11)给出的大一点. 如果实验装置的一次放电过程的持续时间  $t$  远小于磁场透入壳壁的特征时间  $\tau$  ( $\tau = 4\pi\sigma d^2/c^2$ ,  $d$  是壳壁厚度,  $c$  是光速)<sup>[4]</sup>, 则可以近似地把壳看成是理想导体壳, 式(11)就可适用了.

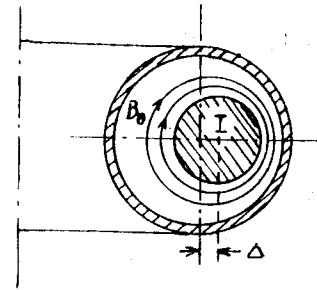


图 7

对于实际装置, 往往需要在壳上开割缝. 以托卡马克为例, 为使变压器初级线圈(加热场绕组)放电时导体壳不致成为短路的次级线圈, 壳上必须开横向割缝, 即沿  $\theta$  方向开缝. 另外为了能顺利加上环向磁场, 应在壳上沿  $\phi$  方向开纵向割缝. 壳开缝后, 其平衡作用减弱, 环的位移  $\Delta$  会变大一点, 这时  $\Delta$  的计算公式见[5].

现以 CT-6 为例计算  $\Delta$  值. CT-6 的  $b = 16$  cm,  $A \approx -0.65$ , 如不计割缝影响, 且设壳是理想导体壳, 则由式(11)求得  $\Delta = 1.08$  cm.

#### IV. 磁面方程<sup>[6,7]</sup>

在轴对称磁场中, 采用圆柱坐标  $(r, \phi, z)$ , 方程  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  的形式是

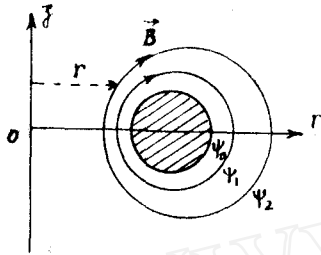
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

引进函数  $\phi = \phi(r, z)$ , 它定义为

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (13)$$

式 (13) 显然满足式 (12), 所以一旦求出  $\phi$ , 就可通过式 (13) 确定  $\mathbf{B}$ . 由式 (13) 得

$$\phi = \int_0^r B_z 2\pi r dr \quad (14)$$



$\phi$  的物理意义是穿过空间某一与  $z$  轴垂直、半径为  $r$  的圆平面的磁通 (图 8).  $\phi$  是常数的曲面称为磁面, 即磁力线所形成的曲面. 图 8 中一个套一个的偏心圆  $\psi_0, \psi_1, \dots$  是环状磁面 (它由螺旋形磁力线构成) 与子午面的交线,  $\phi$  称为磁面函数. 显然存在关系:  $\mathbf{B} \cdot \nabla\phi = 0$ .

如果把等离子体和导体容器当成是理想导体, 则在其表面上磁场的法向分量是零, 即磁力线是贴着理想导体表面的. 换言之, 等离子体表面及导体壳表面也都是磁面.

把式 (13) 代入  $(4\pi/c)j_\phi = (\nabla \times \mathbf{B})_\phi = (\partial B_r / \partial z) - (\partial B_z / \partial r)$  得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2}{c} r j_\phi \quad (14)$$

另外,  $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi j/c$  的  $r, z$  分量是

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) = \frac{4\pi}{c} j_z \quad (15)$$

$$-\frac{\partial B_\phi}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_r \quad (16)$$

引入函数  $I = I(r, z)$ , 它定义为

$$I = \int_0^r j_z 2\pi r dr = \frac{1}{2} cr B_\phi \quad (17)$$

其物理意义是通过与  $z$  轴垂直的半径为  $r$  的圆平面的电流 (图 8),  $B_\phi$  显然由  $I$  产生.

由式 (15)–(17) 可见

$$j_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial r}, \quad j_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial z} \quad (18)$$

再考虑到平衡时有  $\nabla P = (1/c) \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , 所以  $\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0$ ,  $\mathbf{j} \cdot \nabla P = 0$ . 可见等压面与磁力线、从而与磁面  $\phi$  相重合, 等压面 (从而磁面) 也与电流线重合. 这样就得到  $P = P(\phi)$ ,  $I = I(\phi)$ , 再把式 (17), (18) 代入式 (1) 的  $r$  分量  $\partial P / \partial r = (1/c)(j_\phi B_z - j_z B_\phi)$ , 就有

$$r j_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{dI^2}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 2\pi cr^2 \frac{dP}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

令

$$A(\phi) = 2\pi c \frac{dP}{d\phi}, \quad B(\phi) = \left(\frac{1}{c}\right) \frac{dI^2}{d\phi} \quad (19)$$

得到

$$r j_\phi = A(\phi) r^2 + B(\phi) \quad (20)$$

代入式 (14), 有

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2}{c} [A(\phi) r^2 + B(\phi)] \quad (21)$$

式 (21) 就是在  $(r, \phi, z)$  坐标中的磁面方程, 也称为 Grad-Shafranov 方程.

由此可见,平衡方程组式(1)~(3)已转化成—个磁面方程(21)。从数学上看,平衡问题就是求出满足边界条件的式(21)的解。用算子 $L$ 代表式(21)左端,用 $\phi_i, \phi_e$ 表示等离子体内外的 $\phi$ ,则磁面方程问题可化为<sup>[8]</sup>

$$L\phi_i = -(8\pi^2/c)[A(\phi)r^2 + B(\phi)] \quad (22)$$

$$L\phi_e = 0 \quad (23)$$

等离子体边界 $\Gamma$ 上的边界条件是

$$\phi_e|_{\Gamma} = \phi_i|_{\Gamma} = \text{常数} \quad (24)$$

$$\partial\phi_e/\partial n|_{\Gamma} = \partial\phi_i/\partial n|_{\Gamma} \quad (25)$$

$n$ 为 $\Gamma$ 的法向矢量。如果等离子体处在导体容器中,则在壳壁 $\Gamma_1$ 处,边界条件为

$$\phi_e|_{\Gamma_1} = \text{常数} \quad (26)$$

如果等离子体外加上垂直场 $B_z$ ,或者既有 $B_z$ 又有壳,则边界条件(26)要适当变动。 $A(\phi), B(\phi)$ 确定后,原则上可以解出方程组(22)~(26),从而就确定平衡时 $\mathbf{B}$ 的分布。

由式(21)可得推论<sup>[10]</sup>:无环向电流 $j_\theta$ 时轴对称等离子体环不可能平衡。因为这时有 $B(\phi)/A(\phi) = -r^2, \phi$ 只是 $r$ 的函数而与 $z$ 无关,即这时的磁面是直长圆柱形而不是环形。

无力场时,等离子体压力 $P$ 可忽略不计,即 $A(\phi)$ 可略去,于是式(21)退化为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2}{c} B(\phi) \quad (27)$$

这就是无力场磁面方程,它是磁面方程的一个简单的特例。

#### V. 环坐标中的磁面方程<sup>[11]</sup>

在圆柱坐标 $(r, \phi, z)$ 中,圆截面等离子体环的边界 $\Gamma = \Gamma(r, z)$ 是一个环管,这使得边界条件(24), (25)的形式复杂,给求解磁面方程带来了困难。为了便于写出边界条件,最好改用环坐标

$(\tilde{\omega}, \theta, \phi)$ 。它是正交坐标系,由两组正交的圆族 $\tilde{\omega} = \text{常数}$ 及 $\theta = \text{常数}$ 所构成,这两组圆族绕 $z$ 轴旋转 $2\pi$ ,就形成环坐标系(图9)<sup>[12,13]</sup>。注意这里的 $\theta$ 与前几节中的 $\theta$ 不同。坐标 $(x, y, z)$ 与 $(\tilde{\omega}, \theta, \phi)$ 的关系是

$$x = \frac{R \operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega}} \cos \phi, \quad y = \frac{R \operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega}} \sin \phi, \quad z =$$

$$\frac{R \sin \tilde{\omega}}{\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega}}. \quad \text{拉梅系数是 } H_1 = R/(\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega}), H_2 =$$

$R/(\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega}), H_3 = R \operatorname{sh} \theta / (\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega})$ 其中的 $R$ 是图9中的距离 $R = OA = OB$ 。于是在环坐标中, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的形式是

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} (H_2 H_3 B_{\tilde{\omega}}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H_1 H_3 B_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (H_1 H_2 B_{\phi}) \right] \\ &= \frac{1}{R^2} (\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega})^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{R^2 \operatorname{sh} \theta B_{\tilde{\omega}}}{(\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega})^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{R^2 \operatorname{sh} \theta B_{\theta}}{(\operatorname{ch} \theta - \cos \tilde{\omega})^2} \right] = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

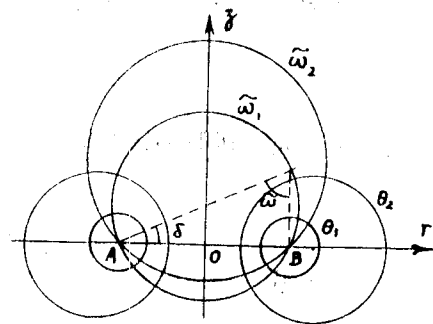


图 9

引入按下列式子定义的磁面函数  $\phi(\tilde{\omega}, \theta)$ , 式 (28) 就自动满足

$$B_{\omega} = -\frac{(\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega})^2}{2\pi R^2 \operatorname{sh}\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \quad B_{\theta} = \frac{(\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega})^2}{2\pi R^2 \operatorname{sh}\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{\omega}} \quad (29)$$

在环坐标中,  $(\nabla \times \mathbf{B})_{\phi} = (4\pi/c) j_{\phi}$  的形式是

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} j_{\phi} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}} \frac{R B_{\theta}}{\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega}} - \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{R B_{\omega}}{\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega}} \right] \\ &= \frac{1}{R} \left[ -\sin\tilde{\omega} E_{\omega} + \operatorname{sh}\theta B_{\omega} + (\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega}) \frac{\partial B_{\theta}}{\partial\tilde{\omega}} - (\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega}) \frac{\partial B_{\omega}}{\partial\theta} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

为简化上式, 再引入按下式定义的函数  $F(\tilde{\omega}, \theta)$

$$\phi = F(\tilde{\omega}, \theta) / \sqrt{2(\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega})} \quad (31)$$

把式 (29), (31) 代入 (30), 经过一些运算, 得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\tilde{\omega}^2} - \operatorname{cth}\theta \frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{1}{4} F = \frac{8\sqrt{2}\pi^2 R^3 \operatorname{sh}\theta}{c(\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega})^{5.2}} j_{\phi} \quad (32)$$

考虑到式 (20), 则式 (32) 便化为环坐标中的磁面方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\tilde{\omega}^2} - \operatorname{cth}\theta \frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{1}{4} F = \frac{32\pi^2 R^2}{c[2(\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega})]^{3/2}} \left[ \frac{A(\phi) R^2 \operatorname{sh}^2\theta}{(\operatorname{ch}\theta - \cos\tilde{\omega})^2} + B(\phi) \right] \quad (33)$$

#### VI. 等离子体环外磁面方程的解<sup>[11,5]</sup>

在等离子体环以外的真空区域,  $j_{\phi} = 0$ , 式 (33) 简化成

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\tilde{\omega}^2} - \operatorname{cth}\theta \frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{1}{4} F = 0 \quad (34)$$

现求上式的富氏级数形式的解

$$F = F_0(\theta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\theta) \cos n\tilde{\omega} \quad (35)$$

将式 (35) 代入式 (34), 得到  $F_n(\theta)$  的方程

$$\frac{d^2 F_n}{d\theta^2} - \operatorname{cth}\theta \frac{dF_n}{d\theta} - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) F_n = 0 \quad (36)$$

引入函数  $P(\operatorname{ch}\theta)$ , 其定义是

$$F_n(\theta) = \frac{\operatorname{sh}\theta}{n^2 - (1/4)} \frac{d}{d\theta} P(\operatorname{ch}\theta) \quad (37)$$

代入式 (36) 并令  $\operatorname{ch}\theta = x$ , 有

$$(1-x^2) \frac{d^3 P(x)}{dx^3} - 4x \frac{d^2 P(x)}{dx^2} + \left(n^2 - \frac{9}{4}\right) \frac{dP(x)}{dx} = 0$$

这是勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0 \quad (38)$$

当  $\nu = n - (1/2)$  时的一次微商。已知式 (38) 的解是勒让德函数  $P_\nu(x)$ ，所以式 (36) 的解就是 (把  $F_n(\theta)$  改写为  $f_n(\theta)$ )

$$f_n(\theta) = \frac{\text{sh } \theta}{n^2 - (1/4)} \frac{d}{d\theta} P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \theta) \quad (39)$$

式 (38) 还有第二个解  $Q_\nu(x)$ ，即第二类勒让德函数，对应地，式 (36) 也存在第二个解

$$g_n(\theta) = \frac{\text{sh } \theta}{n^2 - (1/4)} \frac{d}{d\theta} Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \theta) \quad (40)$$

于是得到式 (34) 的全解

$$F(\theta) = F_0(\theta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\theta) \cos n\tilde{\omega} \quad (41)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_n(\theta) &= a_n g_n(\theta) + b_n f_n(\theta) \\ f_n(\theta) &= \frac{\text{sh } \theta}{n^2 - (1/4)} \frac{d}{d\theta} P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \theta) \\ g_n(\theta) &= \frac{\text{sh } \theta}{n^2 - (1/4)} \frac{d}{d\theta} Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \theta) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

已知  $P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \theta)$ ， $Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \theta)$  的积分表达式是

$$\begin{aligned} P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\text{ch } \theta + \text{sh } \theta \cos \phi)^{n+\frac{1}{2}}} \\ Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \theta) &= \int_0^\infty \frac{dt}{(\text{ch } \theta + \text{sh } \theta \text{ch } t)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \int_0^{\ln \text{ch}(\frac{\theta}{2})} (\text{ch } \theta - \text{sh } \theta \text{ch } t)^{n-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

在  $e^\theta \gg 1$  时 (其意义见下文)，经过冗长的计算得到

$$\left. \begin{aligned} f_0 &\approx (2/\pi)e^{\theta/2}(\theta + \ln 4 - 2), \quad f_1 \approx (2/3\pi)e^{3\theta/2} \\ g_0 &\approx e^{\theta/2}, \quad g_1 \approx -(1/2)e^{-\theta/2} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

再把环坐标换成准圆柱坐标  $(\omega, \rho, \phi)$  (图 10)，由式 (27) 及坐标变换关系<sup>[12]</sup>  $\theta = (1/2) \ln \{ [(r+R)^2 + z^2] / [(r-R)^2 + z^2] \}$ ，其中  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ，计及  $r = R + \rho \cos \omega$ ， $z = \rho \sin \omega$ ，立即得到  $e^{-2\theta} = \rho^2 [\rho^2 + 4R\rho \cos \omega + 4R^2]^{-1}$ ，当  $\rho \ll R$  时，可化简为

$$e^{-\theta} \approx (\rho/2R)(1 - (\rho/2R)\cos \omega) \quad (44)$$

可见  $e^\theta \gg 1$  的条件等价于  $\rho \ll R$ 。

对照图 9 和图 10，可见  $\omega = \tilde{\omega} + \delta$ ，如果  $\rho \ll R$ ，则  $\delta \rightarrow 0$ ，此时  $\tilde{\omega} \approx \omega$ 。

将式 (41) 代入式 (31)，在  $\rho \ll R$  条件下有

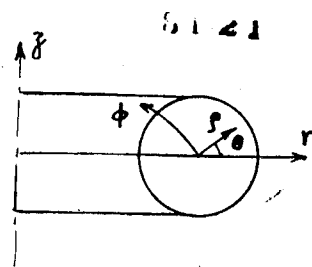


图 10



$$\begin{aligned}\phi &\approx 2^{-1/2} \text{ch}^{-1/2} \theta (1 - \cos \omega / \text{ch} \theta)^{-1/2} (F_0 + 2F_1 \cos \omega) \\ &\approx 2^{-1} e^{-\theta/2} [F_0 (1 + e^{-\theta} \cos \omega) + 2F_1 \cos \omega]\end{aligned}$$

计及式 (42), (43), 再考虑到  $\phi$  可以附加任意一个常数, 则上式成为

$$\phi = \frac{2}{\pi} b_0 (\theta + 2 \ln 2 - 2) + \left\{ \frac{2}{\pi} b_0 (\theta + 2 \ln 2 - 2) e^{-\theta} + \frac{4}{3\pi} b_1 e^{\theta} - a_1 e^{-\theta} \right\} \cos \omega \quad (45)$$

磁场  $\mathbf{B}$  与  $\phi$  的关系是式 (13), 而  $B_\rho$ ,  $B_\omega$  与  $B_r$ ,  $B_z$  的关系是

$$B_\rho = B_r \cos \omega + B_z \sin \omega, \quad B_\omega = -B_r \sin \omega + B_z \cos \omega$$

另外有

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{z}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{r-R}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{r-R}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{z}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \omega}$$

不难得到

$$B_\rho = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi}{\rho \partial \omega}, \quad B_\omega = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \quad (46)$$

$\rho \ll R$  时, 环表面  $\omega = \pi/2$  处的角向磁场是

$$B_\omega(a, \pi/2) = B_a = 2I/c a \quad (47)$$

将式 (45) 代入式 (46), 求出  $B_\omega$  并与式 (47) 比较, 立即得到  $b_0 = -(2\pi^2 RI/c)$ . 另外由式 (44) 有  $\theta \approx \ln(2R/\rho) + (\rho/2R) \cos \omega$ , 于是式 (45) 变成 (准确到  $\rho/R$  的一阶项)

$$\phi = -\frac{4\pi R}{c} I \left( \ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) + \left\{ -\frac{2\pi I}{c} \left( \ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) \rho + \frac{c_1}{\rho} + c_2 \rho \right\} \cos \omega \quad (48)$$

$c_1, c_2$  是待定常数, 由边界条件确定.

式 (48) 以及式 (13), (24), (26), (46) 是基本关系式, 从它们出发, 可以求出当  $\rho \ll R$  时, 在各种外界条件下环外的磁场<sup>[5]</sup>.

如果等离子体环是圆截面, 则环表面 ( $\rho = a$ ) 的角向磁场  $B_\omega$  是<sup>[3]</sup>

$$B_\omega(a) = B_a \left[ 1 + \frac{a}{R} \left( \frac{8\pi \bar{P}}{B_a^2} + \frac{1}{2} L_i - 1 \right) \cos \omega \right] \quad (49)$$

$B_a$  值见式 (47). 对于圆截面的环, 可用上式代替式 (24) 作为确定磁场的边条件.

### Ⅶ. 等离子体环内磁面方程的求解方法

为了提高托卡马克的  $\beta$  值, 采用非圆截面, 如 Doublet 形,  $D$  形, 椭圆形等.

因为角向磁场的张力会使等离子体截面趋向于圆, 所以要保持非圆截面就需要在等离子体上加上维持场. 它既用来保持环的大半径平衡, 又用来维持截面为所设计的形状.

设计等离子体环的维持场有两种不同的途径. 一是先给定等离子体的平衡位置和截面形状, 然后设计维持场, 也就是计算外界条件即产生维持场所需要的导线分布. 这是固定边界问题, 即正问题. 二是先给定外界条件即已知维持场, 然后求出等离子体的平衡形状, 这是自由边界问题, 即反问题. 无论是正问题或反问题, 都必须求解磁面方程 (22) — (26).

现在讨论等离子体内的磁面方程 (22) 的求解问题. 由式 (22) 看到, 要求解这个方程, 必须知道  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$  的具体形式. 然而  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$  的函数关系并不知道, 于是只得求助于假设, 即根据具体情况, 假设一个比较合理的  $P(\phi)$  和  $I^2(\phi)$ , 这有各种取法<sup>[9, 14-18]</sup>. 例如取  $P = K_1 + K_2 \phi^2$ ,  $I^2 = K_3 + K_4 \phi^2$ , 代入式 (22) 得到  $L\phi = K\phi$  ( $K$  只是  $r$  的函数), 这是

$\phi$  的线性方程。又如取  $P = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2$ ,  $I^2 = c_0 + c_1\phi + c_2\phi^2$ , 或取  $P, I^2$  是  $\phi$  的三角函数等, 这样求出的解并不受  $a \ll R$  的限制, 可以适用于  $a/R$  较大的场合。

实际上, 等离子体的输运现象使得很多参数包括  $P$  和  $I^2$  都随时间  $t$  变化, 因此  $\phi$  也将随  $t$  变化。可见比较切合实际的计算是同时考虑输运方程和磁面方程, 方程中含  $t$ , 即应考虑等离子体平衡的演化过程<sup>[19-23]</sup>。至于  $P(\phi)$  和  $I^2(\phi)$  的函数形式, 仍然是假定的。

$P(\phi)$  和  $I^2(\phi)$  都是假定的, 这种做法令人困惑。现在作一点简单的讨论。平衡方程组 (1)–(3) 等价于 7 个标量方程, 共含有 7 个未知标量  $P, \mathbf{B}, \mathbf{j}$ 。表面上看, 方程数目与未知量数目相等, 应该求出确定的解, 而不应出现式 (22) 中的未知函数  $A(\phi)$  和  $B(\phi)$ 。换言之, 从式 (1)–(3) 出发, 应能导出不含未知函数  $P$  和  $I^2$  的磁面方程。事实上, 从式 (1)–(3) 出发, 的确可以导出不含  $P(\phi)$  的方程组

$$\phi_r \left[ \phi_{zzz} + \phi_{rrz} - \frac{1}{r} \phi_{rz} - \frac{3}{r^2} \phi_z \right] + \phi_z \left[ -\phi_{rrr} - \phi_{zzz} + \frac{3}{r} \phi_{rr} + \frac{2}{r} \phi_{zz} \right] = -\frac{16\pi^2}{c^2 r} (I^2)_z \quad (50)$$

$$I_r \phi_z = I_z \phi_r \quad (51)$$

式 (51) 就是  $\partial(\phi, I)/\partial(r, z) = 0$ , 它只表示  $I$  与  $\phi$  具有函数关系  $I = I(\phi)$ , 而与  $r, z$  无关, 但  $I$  与  $\phi$  的具体关系却无从得知。考其根源, 式 (51) 来自  $(\nabla P)_\phi = (1/c)(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\phi = 0$ 。正如从  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$  只能得知  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{v}$  平行而不能得到  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{v}$  的函数关系一样, 从式 (51) 并不能求出  $I$  与  $\phi$  的函数关系。由此可见, 不可能从式 (50), (51) 中消去  $I$  而得到一个只含  $\phi$  的方程。

如用式 (50) 代替式 (22), 虽未知函数  $A(\phi)$  不再出现, 但式 (50) 左方是含三阶偏导数的非线性表达式, 比式 (22) 左方复杂得多, 而  $I^2(\phi)$  的形式依然需事先假定, 远不如求解式 (22) 方便。

### VIII. 虚壳原理<sup>[24, 25]</sup>

一个平衡的等离子体环的磁场  $\mathbf{B}$  由两部分合成:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_I$ ,  $\mathbf{B}_m$  是外界加上的维持场,  $\mathbf{B}_I$  是等离子体内的电流产生的自身磁场。 $\mathbf{B}$  可以由平衡方程组或磁面方程解出, 问题是, 如何从  $\mathbf{B}$  中分出  $\mathbf{B}_m$ ? 虚壳原理就是解决此问题的一个简便的方法。

设想平衡等离子体被一个闭合超导壳  $s$  包围, 壳与磁面之一重合, 在壳外磁场为零。此时, 磁场的源只是等离子体中的电流  $I$  和壳中的感应电流, 感应电流密度  $\mathbf{i}$  是

$$\mathbf{i} = (c/4\pi) \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_{s,e} - \mathbf{B}_{s,i})$$

$\mathbf{B}_{s,i}, \mathbf{B}_{s,e}$  是壳内与壳外的  $\mathbf{B}$  值,  $\mathbf{n}$  是壳向外法向单位矢量。由于  $\mathbf{B}_{s,e} = 0$ , 所以有

$$\mathbf{i} = (c/4\pi) \mathbf{B}_{s,i} \times \mathbf{n} \quad (52)$$

在壳内,  $\mathbf{i}$  所产生的磁场就是维持场  $\mathbf{B}_m$ , 在壳外,  $\mathbf{i}$  产生的场必然是  $-\mathbf{B}_I$ 。

如果已经求出总场  $\mathbf{B}$ , 则由式 (52) 立即可得到  $\mathbf{i}$ 。由于轴对称关系, 这些  $\mathbf{i}$  构成了一组以  $z$  轴为圆心的圆电流, 它们所产生的维持场  $\mathbf{B}_m$  是

$$\mathbf{B}_m(r, z) = \oint_s i(s') \mathbf{b}(r, z; s') ds' \quad (53)$$

$\mathbf{b}$  是壳  $s$  上位于  $s'$  处的单位电流在  $(r, z)$  点所产生的磁场, 已知  $\mathbf{b}$  为<sup>[26]</sup>

$$b_r(r, z; a, \zeta) = \frac{2}{c} \frac{z - \zeta}{r \sqrt{(a+r)^2 + (z-\zeta)^2}} \left[ -K(k) + \frac{a^2 + r^2 + (z-\zeta)^2}{(a-r)^2 + (z-\zeta)^2} E(k) \right] \quad (54)$$

$$b_z(r, z; a, \zeta) = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + (z-\zeta)^2}} \left[ K(k) + \frac{a^2 - r^2 - (z-\zeta)^2}{(a-r)^2 + (z-\zeta)^2} E(k) \right] \quad (55)$$

其中  $k^2 = 4ar[(a+r)^2 + (z-\zeta)^2]^{-1}$ ,  $K(k)$ ,  $E(k)$  分别是第一、二类完全椭圆积分,  $a$  是圆电流的半径。

利用虚壳原理, 维持场  $B_m$  的确定就转变为求出式 (53) 右方的积分。

### 参 考 文 献

- 1 布拉金斯基, 等离子体物理学与受控热核反应的问题, 苏联科学院原子能研究所编, 第三卷, 科学出版社 (1960).
- 2 Braginskii S. I., et al, IAEA Geneva Conf., **31** (1958) : 43.
- 3 Шафранов В. Д., Атом. Энер., **13** (1962) : 521.
- 4 Artsimovich L. A., Nucl. Fusion, **12** (1972) : 215.
- 5 Mukhovatov V. S., et al, *ibid*, **11** (1971) : 605.
- 6 Grad H., et al, IAEA Geneva Conf., **31** (1958) : 190.
- 7 Шафранов В. Д., ЖЭТФ, **33** (1957) : 710.
- 8 Zaharov L. E., et al, Nucl. Fusion, **13** (1973) : 595.
- 9 Callen J. D., et al, Phys. Fluid, **15** (1972) : 1523.
- 10 Shafranov V. D., Rev. Plasma Phys., **2** (1966) : 116.
- 11 Шафранов В. Д., ЖЭТФ, **37** (1959) : 1088.
- 12 Korn G. A., et al, Math. Handbook for Scientists & Engineerings (1968) : 186.
- 13 Moon P., et al, Field Theory Handbook (1971) : 112.
- 14 Maschke E. K., Plasma Phys., **15** (1973) : 535.
- 15 Oshiyama H., et al, Nucl. Fusion, **14** (1974) : 793.
- 16 Suzuki Y., *ibid*, **14** (1974) : 345.
- 17 Pfirsch D., et al, *ibid*, **14** (1974) : 547.
- 18 Dobrott D., *ibid*, **16** (1976) : 491.
- 19 Grad H., et al, Phys. Rev. Lett., **24** (1970) : 1337.
- 20 Pao Y. P., Phys. Fluids, **19** (1976) : 1177.
- 21 Hogan J. T., Nucl. Fusion, **20** (1980) : 1119.
- 22 Pereversev G. V., et al, Theoretical & Computational Plasma Phys., IAEA, Geneva (1978) : 469.
- 23 Zaharov L. E., et al, Plasma Phys., (Ed. by Kadomtsev B. B.), Mir Publishers (1981) : 13.
- 24 Shafranov V. D., et al, Nucl. Fusion, **12** (1972) : 599.
- 25 Zaharov L. E., *ibid*, **13** (1973) : 595.
- 26 朗道, 栗弗席兹, 连续媒质电动力学, 上册, 人民教育出版社 (1963) : 174.

## EQUILIBRIUM OF TOROIDAL PLASMA

Kang Shou-wan

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

### Abstract

The problems of equilibrium of axisymmetric plasma torus in magnetic field are summarized in this paper. Firstly we summarize the theoretic results about the equilibrium of a sector of torus, and then give a minute description of the magnetic surface equation and its solution. Finally we detail the magnetic surface equation in toroidal coordinates and the virtual casing principle.

**Keywords** toroidal plasma, equilibrium of plasma, tokamak