

# 突变理论——历史、现状和展望<sup>1)</sup>

上海交通大学工程力学系 凌复华

## 一、引言

本世纪60年代中期开始,以 R. Thom 的工作为先导,逐步形成了现在称为突变理论 (Catastrophe Theory, 也译为灾变理论)的一些数学内容。发展这种理论的目的,是为了对一个光滑(理解为无限次可微)系统中可能出现的突然变化作出适当的、主要是定性的数学描述。与数学中的大多数新发展不同,突变理论在其开创初期就是旨在应用的。因此,它并非局限于数学界的窄小圈子内,鲜为外人所知;相反,自从 Thom<sup>[6,8]</sup>的奠基著作出版以来,在许多科普杂志乃至一般报刊和读物中,都大量出现介绍文章<sup>[2,3,5,2,5,5,6,3,7,7]</sup>,其中影响最大的大概是 Zeeman 发表在刊物“科学的美国人 (Scientific American)”上的一篇<sup>[7,7]</sup>,许多人(包括本文作者在内)正是通过这篇文章开始接触突变理论的。

当时对突变理论的评价是褒贬不一,各走极端的。从“Newton 发明微积分以来数学史上最大的成就”或“说明参数的连续改变怎样会引起不连续现象的第一种理论”,到“没有穿衣服的皇帝”或“一些奇妙的观察伴随着完全无根据的推测”,无所不有。实际情况看来是介乎这些极端之间的某种中间情况。

对突变理论的批评主要来自 Sussman<sup>[5,6-8,0]</sup>和 Smale<sup>[5,4]</sup>。“自然 (Nature)”杂志发表<sup>[6,0]</sup>后过了一个多月,又在“支持突变理论”的标题下发表了 Zeeman, Stewart, Berry, Guckenheimer 等人的反驳文章<sup>[7,8]</sup>。措词都很尖锐。后来 Zeeman<sup>[8,0]</sup>在印度的一次突变理论讨论班上曾说:“他们(指 Sussman 和 Smale)根据一般报刊上的陈述来责难数学……,照我的看法,这场论战只是茶杯中的暂时风暴”。

Thom 的奠基著作<sup>[6,8]</sup>是一本很奇特的书,其中不包含数学证明,却包含着许多哲理性的观点。但这本书和他的思想,推动了一大批纯数学分支,如微分拓扑、微分方程、代数几何、交换代数、泛函分析和全局分析的发展,也导致了大量的实际应用。作为突变理论主要部分的分类定理,是经过 Mather<sup>[3,7-4,1]</sup>的工作,最后由 Trotman 和 Zeeman<sup>[7,3]</sup>完成的。在突变理论的发展过程中, Zeeman 起了很大的作用,他的论文选<sup>[7,9]</sup>中包括了科普文章、实际应用、到严格数学证明等类型截然不同的许多文章,其中不少是开创性的工作。关于突变理论,现有一些数学理论著作<sup>[1,9,3,5]</sup>,几本较易阅读的全面论述的专著<sup>[1,2,2,3,4,7,4,9,7,2]</sup>,以

1) 中国力学学会全国分叉、突变、稳定性学术讨论会(1983年11月1—5日,武汉)邀请报告,略有补充和修改。

及不同年份的许多综述文章<sup>[1,8,24,44,47,81]</sup>和文献目录<sup>[2,3,1,47,82]</sup>。已发表的有关文章，估计在1000篇以上。

尽管如此，突变理论却并非一个独立的数学分支：就应用而言，它与其他学科的关系太密切；就数学理论而言，也难以确定哪里是突变理论的终点，哪里是其他理论的起点，反之亦然。大概正因为如此，现在还没有一本专门关于突变理论的学术性刊物，也没有关于突变理论的定期国际学术会议。它的文献，散见于从数学、物理、化学到生物学、经济学和社会学的各种专业杂志和专业会议录中。Zeeman<sup>[8,9]</sup>甚至说：“突变理论这个名称将来有一天会消失，但在这些数学分支中的定理将会继续存在下去，科学中模型化的几何技巧的应用将继续增加。”

突变理论的数学渊源可追溯到上世纪末的 Poincaré<sup>[4,6]</sup>，本世纪30年代的 Moser 引理<sup>[4,2]</sup>也起着极大的作用，稍后有 Андронов 的“粗”系统（结构稳定性）概念以及 Whitney<sup>[7,6]</sup>的奇点理论。与突变理论的发展相平行，以 Smale 为首的美国学派（代表作为[54]）和以 Arnold 为首的苏联学派（见 Arnold 的论文集[11]），在微分方程几何理论的发展方面也作出了重要的贡献，这些理论与突变理论密切相关。其他密切有关的理论有 Haken 的协同论<sup>[2,9]</sup>，以及近年来对混沌现象的研究（例如参见[2,27,32]）。关于突变理论在力学中的应用可参看[47,49,71]。

近年来我国力学界对突变理论开始注意。有过一篇科普性文章<sup>[1]</sup>和翻译过一本高级科普书籍<sup>[4,6]</sup>，也开始有了初步的研究工作（例如[3,3]）。1983年11月在武汉召开了中国力学学会分叉、突变和稳定性学术讨论会，并即将出版一本介绍有关学科的书籍<sup>[5]</sup>。上海交通大学工程力学系从1983年起为研究生开设了“突变理论”课程。但总的来说，对突变理论的学习、研究和应用还是很不够的。本文的目的是要进一步引起我国力学界对突变理论的注意，推动对这一理论的研究特别是它的实际应用。本文将以主要篇幅介绍适用于类梯度系统的初等突变理论及其应用，也提及近年来开始发展的非初等突变理论的一些方面。所举应用例子将以力学方面的为主。

## 二、初等突变理论

### 结构稳定性

这是突变理论中用到的一个十分重要的概念，最早出自 Андронов 和 Понтрягин<sup>[6]</sup>提出的“粗”系统，以后被 Smale<sup>[5,4]</sup>作为现代拓扑动力学的基石。结构稳定系统当受到小的摄动时仍能保持其基本性质不变，这种摄动不象研究运动稳定性时述及初始或边界条件，而是述及描述系统性态的方程。比如我们重复做实验时，条件总会略有变动，我们希望得到的结果基本一样，其实就是要求系统有结构稳定性。结构稳定性的定义中有以下三个要素：①数学系统类别；②摄动类别；③等价关系。其选择可因问题而异。简单地讲，等价关系就是从数学上定义什么是“基本一样”，一般是指给出相同的（局部）拓扑。例如对一个无阻尼单摆而言，若允许摄动项可以包括耗散项，则它是结构不稳定的。反之若只允许包括保守项，则它是结构稳定的。

对结构稳定系统的研究和分类早就引起了人们的注意。1959年，Peixoto<sup>[4,4]</sup>给出了一个令人乐观的结果，即所谓稠密性定理：在二维 Euclid 空间中任一动力学系统的近旁，必

存在一个能与之任意接近的结构稳定系统。但次年 Smale 就给出一个反例，说明稠密性定理在三维 Euclid 空间中已不再成立，到 1967 年更证明了：对于大于二维的情形，所有动力学系统构成的空间中存在着全部由结构不稳定系统构成的区域，且这些系统不能用结构稳定系统来近似。但另一方面又证明了稠密性定理对  $n$  维 Euclid 空间中的梯度系统是成立的。Thom 对梯度系统进行了分类，这导致了初等突变理论的出现。

初等突变和分类定理 所谓梯度动力学系统是指由

$$dx/dt = -\text{grad}_x F(x, a)$$

控制的系统，这里  $x$  和  $a$  都是实向量。 $x$  的诸分量称为状态变量， $a$  的诸分量称为控制变量。讨论平衡位置

$$\text{grad}_x F(x, a) = 0$$

要解决的问题是找到函数  $F$  当平衡位置相同时的等价类，并称之为“初等突变”。由上式可以看出，实际上，初等突变理论的适用范围可以扩大到有一个 Ляпунов 函数（它的梯度确定了平衡点而并不确定轨线的方向）的系统，例如 Hamilton 系统。但它不一定能适用于一般的有多个平衡位置的系统。这一点初学者很容易忽视，参看[3]。

由 Thom<sup>[6,8]</sup> 提出并由 Trotman 和 Zeeman<sup>[7,31]</sup> 扩充并最后完成证明的分类定理指出，对控制变量不大于 5 个的情况，可对初等突变完全地加以分类而得到分类表（表 1）。

分类表中给出的 11 种初等突变，穷尽了满足横截性条件（可理解为“几乎总是”成立的条件，例如在三维空间中直线与直线“几乎总是”不相交，而直线与平面“几乎总是”相交）的所有可能性。这条定理自然十分重要并在实践中得到了许多应用。然而不仅是这条定理本身，也还有在证明过程中发展了的一些数学概念和方法，也是极为有用的。下面我们将介绍其中最重要的两个：确定性和开折。但在此之前，我们先来剖析初等突变中应用最广的一个——尖点。

### 尖点突变

尖点突变的势函数是

$$F = x^4 + ux^2 + vx \quad (1)$$

相应的平衡位置满足

$$\text{grad}_x F = 4x^3 + 2ux + v = 0 \quad (2)$$

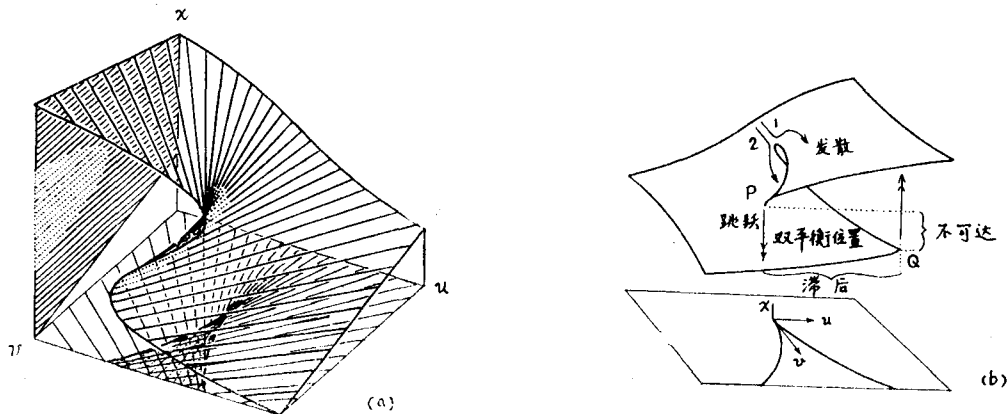


图 1 尖点突变的突变流形和分叉集

表 1 初等突变一览表

| 名称                                 | 控制变量维数 | 势 $V$ 的标准形式                                 | 平衡曲面 $M$   | 分叉集 $B$            |
|------------------------------------|--------|---|--|--------------------|
| 折叠<br>fold                         | 1      | $x^3 + ux$                                  | $3x^2 + u = 0$   | $u = 0$            |
| 尖点<br>cusp                         | 2      | $x^4 + ux^2 + vx$                           | $4x^3 + 2ux + v = 0$   | $8u^3 + 27v^2 = 0$ |
| 燕尾<br>swallowtail                  | 3      | $x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$                    | $5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0$   |                    |
| 蝴蝶<br>butterfly                    | 4      | $x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$             | $6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + 2vx + w = 0$   |                    |
| 印第安人茅舍<br>wigwam                   | 5      | $x^7 + sx^5 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$      | $7x^6 + 5sx^4 + 4tx^3 + 3ux^2 + 2vx + w = 0$   |                    |
| 椭圆脐点<br>elliptic umbilic           | 3      | $x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) + ux + vy$       | $\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 2wx + u = 0 \\ -2xy + 2wy + v = 0 \end{cases}$             |                    |
| 双曲脐点<br>hyperbolic umbilic         | 3      | $x^3 + y^3 + wxy + ux + vy$                 | $\begin{cases} 3x^2 + wy + u = 0 \\ 3y^2 + wx + v = 0 \end{cases}$                     |                    |
| 抛物脐点<br>parabolic umbilic          | 4      | $y^4 + x^2y + wx^2 + ty^2 + ux + vy$        | $\begin{cases} 2xy + 2wx + u = 0 \\ 4y^3 + x^2 + 2ty + v = 0 \end{cases}$              |                    |
| 符号脐点<br>symbolic umbilic           | 5      | $x^3 + y^4 + sxy^2 + ty^2 + uxy + vy + wx$  | $\begin{cases} 5x^2 + sy^2 + uy + w = 0 \\ 4y^3 + 2sxy + 2ty + ux + v = 0 \end{cases}$ |                    |
| 第二椭圆脐点<br>second elliptic umbilic  | 5      | $x^2y - y^5 + sy^3 + ty^2 + ux^2 + vy + ux$ | $\begin{cases} 2xy + 2ux + w = 0 \\ x^2 - 5y^4 + 3sy^2 + 2ty + v = 0 \end{cases}$      |                    |
| 第二抛物脐点<br>second parabolic umbilic | 5      | $x^2y + y^5 + sy^3 + ty^2 + ux^2 + vy + ux$ | $\begin{cases} 2xy + 2ux + w = 0 \\ x^2 + 5y^4 + 3sy^2 + 2ty + v = 0 \end{cases}$      |                    |

它在  $(x, u, v)$  空间中的图形称为突变流形 (或平衡曲面) (图 1(a))。这是一个有皱褶的曲面, 从而在不同的区域内, 平衡位置可为一个、两个或三个。容易证明, 对应于中叶的势函数取极大值, 从而平衡位置是不稳定的, 而对应于上、下叶的平衡位置是稳定的。显然, 在曲面有竖直切线, 即也满足

$$\text{grad}_x(\text{grad}_x F) = 12x^2 + 4u = 0 \quad (3)$$

的点附近, 平衡位置的数目是不同的。这些点就称为突变点或奇异点, 它们在参数空间中的投影构成了分叉集 (图 1(b))。这是一条半立方抛物线, 常称为尖点曲线, 它的方程可由式 (2), (3) 消去  $x$  而得到为

$$8u^2 - 27v^3 = 0 \quad (4)$$

我们来看看用这个光滑的势函数 (1) 描述的系统的性态有什么特点。当系统的参数变化时, 它经历的平衡位置是突变流形上的一条曲线 (图 1(b)), 显然容易看出:

1. 多个平衡位置。
2. 跳跃性。平衡位置在上叶变化时, 在  $P$  点突然由上叶的平衡位置变为在下叶的平衡位置。
3. 滞后性。平衡位置在下叶变化时, 突跳不发生在  $P$  点而发生在  $Q$  点。
4. 不可达性。由于上述的跳跃在  $P$  和  $Q$  之间的  $x$  值相应的状态是不可能达到的。
5. 发散性。沿着两条很靠近的路径 1 和 2 得到的最终平衡位置大不相同 (分别在上叶和下叶), 因为两条路径分别在尖点的两侧。

这样, 我们就看到了由一个光滑的势所控制的系统中如何会出现不连续的性态。尖点突变是展示这些性态的最简单模型, 涉及初等突变理论应用的文献, 十有八九都要提到它。

#### 确定性 (determinacy)

初等突变理论解决的一个重要问题 (也是为证明分类定理所需要的), 是在哪里截断 Taylor 级数为安全的问题。所谓安全, 就是要求这样得到的有限项级数能在原点的足够小的邻域内忠实地代表原来的拓扑结构, 定量近似也是正确的。注意这与这个 Taylor 级数的收敛性完全是两回事。即使是发散的级数, 其有限项之和也可能在原点的一个小邻域内很好地反映出原函数的性态。

如果一个函数的 Taylor 展开式的前  $k$  项 (称为  $k$  射式,  $k$ -jet) 足以刻画这个函数的性态, 则称这个函数为  $k$  确定的。在一元函数的最简单情况下, 第一个不为零的最低次项就决定了函数的性态, 这是与我们的常识相一致的, 但对多元函数就并非如此了。详细的规则相当复杂, 可参看 [47]。下面只给出最简单但也是最常用的一条规则。

$$\text{对 } F(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ 构成 } f_1(x) \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial F}{\partial x_n} \quad (5)$$

其中  $f_i(x)$  是任意函数, 它的 Taylor 展开式不包含常数项。则若式 (5) 包含所有  $k$  次及其以上项, 就称  $F$  为  $k$  确定的。这条规则对二元函数仍是容易应用的, 变量更多时略为困难些, 但都是算法上的问题, 不难编一个计算程序来处理。

例 1  $F = x^4 + 3x^7$

这时  $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 27x^6$ , 显然所有的四次项及其以上项都包括在式 (5) 中,  $F$  是 4 确定

的, 因此可略去  $3x^7$  项而不会影响  $F$  在原点附近的性态.

例 2  $F = x^3 + y^3$

这时  $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2$ , 显然所有的三次项及其以上项都包括在式 (5) 中,  $F$  是 3 确定的.

例 3  $F = \frac{3}{2}x^2 + x^3 - 3xy^2$

这时  $\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x + x^2 - y^2)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy$ , 对它应用上述规则就不那么显然了. 经过一些计算可证明它是 4 确定的. 也就是说对  $F$  可加上五次及其以上项而不会改变它的性态, 但加上一个四次项就不行了, 尽管  $F$  中根本没有四次项.

#### 开折 (unfoldings)

对上述函数  $F$  引入一个或几个参数可构成一个函数族, 称之为开折. 若一个开折穷尽了  $F$  的等价类, 则称之为通用开折 (versal unfoldings). 自然会想到如何构成参数最少的通用开折即普适开折 (universal unfoldings) 的问题. 其详细计算规则也请参看[47]. 这里只指出, 若令上面式 (5) 中的  $f_i(x)$  包括常数项, 则式 (5) 中缺少的线性独立的项就构成开折项, 但常数项可以不算在内, 因为可以通过坐标变换消去.

例 1  $F = x^4 + 3x^7$

显然缺少的项是  $x, x^2$ , 又因  $3x^7$  可以略去,  $F$  的普适开折就是

$$x^4 + ax^2 + bx$$

我们认出这就是 Thom 的分类表中的尖点突变.

例 2  $F = x^3 + y^3$

显然缺少的项是  $x, y, xy$ ,  $F$  的普适开折是

$$x^3 + y^3 + \alpha xy + bx + cy$$

我们认出这就是 Thom 分类表中的双曲脐点突变.

由此可以想象 Thom 的分类定理是怎样得到的.

### 三、初等突变理论的应用

初等突变理论的应用极其广泛, 在计算数学、光学、热力学和相变、激光物理、化学、弹性结构的稳定性、流体的几何形状、船舶的稳性、非线性振动、生物学和生态学、行为学、社会学、语言学等许多学科中, 都有很多成功的应用例子, 详细请看[18, 47, 49, 64, 65, 72, 79]等参考文献. 它在“硬”科学(数理化等)中的应用, 不仅使人们加深了对已有解释的现象的认识, 能从较高的观点来统一地处理问题, 也有一些导致了新的结果, 最有名的是下面将提到的焦散现象的解释. 在“软”科学(生物、社会科学等)中的应用, 则使许多原来难以或无法作数学处理的问题得到了一种有效的数学手段.

初等突变理论的应用方式可以粗分为两类. 一类是分析性的, 主要适用于硬科学. 其中寻找一个势、与势相类似的函数或与某一突变流形或分叉集有相同数学描述的系统, 然后应用适当的数学概念和技巧如确定性、开折、变换等, 归结为 Thom 的分类表中所给出的某种类型. 另一类是经验性的, 主要适用于“软”科学, 即由观察到的特征现象如跳跃、滞后等

设想一个初等突变数学模型，然后作数据拟合，再看这个数学模型能否用来很好地解释观察到的现象，最后由之启发而推断现象的机理，导出一个物理模型。就 Thom 的本意，第二类方式更加重要，也有了一些成功的应用例子。但由于“软”科学中的问题一般十分复杂，还有待于进行更深入的研究。限于篇幅，下面我们只略举几个例子来说明这两类应用方式。

### Euler 拱·势函数

图 2 所示的 Euler 拱由两根轻质刚杆用带有弹簧（刚度为  $\mu$ ）的铰连接而成。杆的两端受水平方向的压缩力  $\beta$  作用，铰的销轴上挂有一个重量  $\alpha$ ，弹簧力图使杆保持水平。容易写出这个系统的总能量即势函数为

$$V(\theta) = 2\mu\theta^2 + \alpha\sin\theta - 2\beta(1 - \cos\theta)$$

从而

$$V'(\theta) = 4\mu\theta + \alpha\cos\theta - 2\beta\sin\theta$$

$$V''(\theta) = 4\mu - \alpha\sin\theta - 2\beta\cos\theta$$

先设  $\alpha = 0$ ，即没有外加重量作用，则确定平衡位置的方程  $V'(\theta) = 0$  导致

$$\beta\sin\theta = 2\mu\theta$$

上式当  $\beta < 2\mu$  时只有一个解  $\theta_0 = 0$ ，并且是稳定的（ $V''(\theta) = 4\mu - 2\beta > 0$ ，从而能量取极小值）。当  $\beta > 2\mu$  时，解  $\theta_0 = 0$  不稳定，但另有两个解  $\theta_1 > 0, \theta_2 < 0$  是稳定的。

当  $\alpha \neq 0$  时不再能得到上述封闭形式的结果，这时需将势函数  $V(\theta)$  展开成幂级数：

$$V(\theta) = \alpha\theta - (\beta - 2\mu)\theta^2 - \frac{1}{6}\alpha\theta^3 + \frac{1}{12}\beta\theta^4 + O(\theta^5) \quad (6)$$

我们感兴趣于  $\alpha, \beta - 2\mu$  很小的情况，因此四次项是不为零的最低次项， $V(\theta)$  是 4 确定的而可略去五次及其以上项而不会影响  $V(\theta)$  在原点附近的定性状态，再作变量代换

$$x = \theta - \alpha/2\beta$$

式 (6) 化为

$$V(x) = \frac{1}{6}\mu \left[ x^4 - \frac{6}{\mu}(\beta - 2\mu)x^2 + \frac{6\alpha}{\mu}x \right] \quad (7)$$

与式 (1) 相比较可知式 (6) 对应的是尖点突变，因为我们可以适当选择单位使  $\mu/6 = 1$ 。于是

$$u = -\frac{6}{\mu}(\beta - 2\mu), \quad v = \frac{6\alpha}{\mu}$$

由分叉集的表达式 (4) 可知，当

$$\alpha = \frac{4}{3\sqrt{\mu}}(\beta - 2\mu)^{3/2}$$

时，Euler 拱的形状发生突然变化，即从两杆水平的位置跳跃为向上或向下的构形。

弹性结构稳定性的问题是十分重要的，最早由 Euler 在 1744 年进行了研究。在 [70] 中总结了用经典理论得到的研究成果。参照上面的方式，写出弹性结构的势函数，可用突变理论新研究诸如拱、压杆、板等的稳定性，对缺陷的敏感性和最优结构的特点等问题，得到更有论来重概括性的结果，参见 [47, 72]。

### 焦散·与势函数相仿的路径函数

空间光线经过折射或反射后，其包络线可以是一个曲面、一条曲线或退化为一个点，分别称为焦散面、焦散线和焦点。用几何光学的方法可以在每种具体情况下找到相应的焦散面(线)，但这个问题也可以用突变理论统一地进行处理。这时要用到 Fermat 的所谓最少时间原则：光线由光源经反射和/或折射到达某点所需的时间取驻值。

考虑平面光线在单位圆周上反射的最简单情况。与  $x$  轴平行的诸光线到达  $P$  点的路径长度显然是

$$L = \left(d - \frac{1}{2} + \sqrt{1-y^2}\right) + \sqrt{\left(X + \frac{1}{2} - \sqrt{1-y^2}\right)^2 + (Y-y)^2} \quad (8)$$

因为介质是均匀的，时间取驻值与路径取驻值等价，因此真实反射光线满足的方程是

$$\partial L / \partial y = 0 \quad (9)$$

而反射光线的包络可由式(9)连同  $\partial^2 L / \partial y^2 = 0$  一起消去  $y$  而得到。我们看到，路径长度函数、反射光线、反射光线的包络正好与势函数、突变流形和分叉集相对应。这里我们看到了突变理论的一种变通应用方式：用一个与势函数起同样作用的函数来代替势函数，从而可应用初等突变理论的相应结论。

把式(8)展开到  $y$  的四次和  $X, Y$  的一次，我们得到

$$L \sim -\frac{1}{4}(1+5X)y^4 + \frac{1}{2}Yy^3 + Xy^2 - 2Yy + (d+1-X) \quad (10)$$

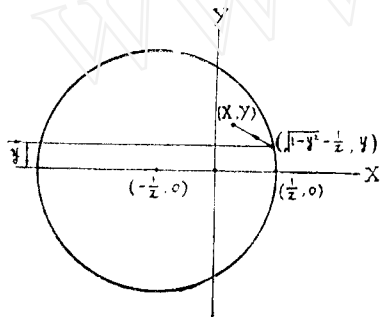


图3 光线经过的路径长度取驻值

常数项是无关紧要的，考虑  $(X, Y) = (0, 0)$ ，即原点附近的情况，则  $L$  的最低次非零项是  $-(1/4)y^4$ ，这正好是尖点突变，在这里称为对偶尖点突变，因为  $y^4$  的系数的符号是负的。它与尖点突变的不同在于，尖点区域内中叶不稳定但上下叶是稳定的。

在以上的讨论中，平面光线随两个参数而变化。我们生活的空间是三维的，其中光线最多可随三个参数而变化。因此，路径长度函数对应的势函数只可能是与折叠、尖点、燕尾、椭圆脐点、双曲脐点这五种初等突变相对应的几种。从而，焦散面只可能是以上这五种初等

突变的分叉集。而我们所观察到的焦散线，只是这些焦散面与观察屏幕的交线。这样一来，就一劳永逸地找到了所有可能的焦散面(线)。这项工作最早由 Berry 等<sup>[13-17]</sup>作出，以后并扩展用来处理许多其他的光学现象，而形成所谓突变光学<sup>[18]</sup>。

### 非线性振动

Duffing 方程

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + ax^3 = F \cos \Omega t, \quad k > 0, \quad \Omega = 1 + \omega \quad (11)$$

是大家所熟悉的。用谐波平衡法求解，即设

$$x = A \cos(\Omega t - \phi)$$

代入式(11)后略去三次谐波，可得到

$$1g \phi = 4k / (3\alpha A^2 - 8\omega)$$

$$A^2 \left( \frac{3}{4} \alpha A^2 - 2\omega \right)^2 = F^2 - k^2 A^2$$

$A^2$  满足的方程是一个三次式，正是尖点的突变流形，可以确定出尖点位置在

$$(d, \omega) = \pm (32k^3/9\sqrt{3} F^2, k\sqrt{3/2})$$

这里有两个尖点突变如图 4。

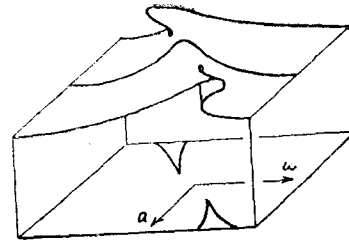


图 4 Duffing 方程振幅的双尖点突变流形

这个问题曾由 Holmes 和 Rand [33] 进行了详细的分析。此外，Zecman [79] 也对 van der Pol 方程作了同类的工作。我们看到，突变理论的这种应用方式是利用了突变流形与某个方程在数学上的相似性。

### 船舶的稳性

这又是一个古老的问题，船舶要受到重力和浮力的作用而处于平衡状态。显然，若浮心的位置不变，则重心低于浮心时船舶的平衡位置稳定（不倒翁的原理）。但实际船舶的浮心是变化的。我们来考虑最简单的二维矩形船舶。如图 5(a) 可确定浮心的位置是

$$Y = \frac{kV + 2lwh + wh^2}{V + 2wh} + \frac{w^3}{3(V + 2wh)} t^2$$

$$X = \frac{-2w^3}{3(V + 2wh)} t$$

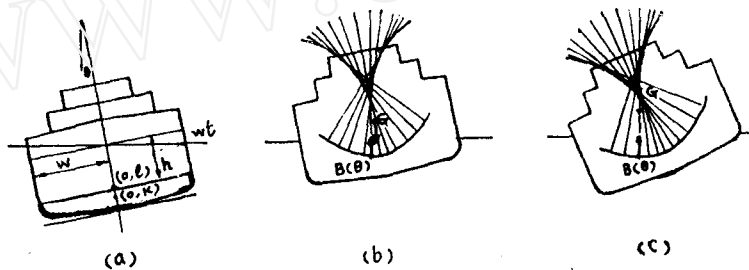


图 5 船舶的稳性

或消去参数  $t$  写成

$$Y = k + \frac{1}{4c} X^2$$

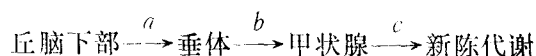
其中  $c$  是某个常数。它的法线的包络正是尖点曲线。由图 5(b) 可以看出，当重心位于尖点曲线以外时，中间位置是稳定的，反之，中间位置不稳定，两边各有一稳定平衡位置。因此，为了使船舶能正常地浮在水面上，它的重心必须位于尖点之下。在船舶设计中，这个尖点称为浮心，但概念上不如用突变理论明确，方法也不够简便。

对一般的二维船舶、三维船舶以及考虑动力效应（重心有所变化）的情况，用突变理论进行处理都得到了很好的一些结果，详见[79]。

### 关于甲状腺机能的模型

对上述第二类主要在软科学中应用的方式，这里只举一个医学中的例子。

正常人体中新陈代谢的控制可示意如下：



其中  $a, b, c$  为激素。  $c$  过少为甲状腺机能减退，  $c$  过多为甲状腺机能亢进。对甲状腺机能亢进患者的治疗为施行外科手术切除或破坏一些甲状腺。但 Seif [51] 发现，约有三分之一的患者术后虽然  $c$  的分泌量正常，但仍未治愈。他根据这种双平衡态的情况，提出了甲状腺机能的尖点突变模型如图 6。他指出，一般的治疗如同图 6 上的  $HK$  线，尚未出现突变而不能恢复正常。因此他提出的治疗方案是：通过药物减少新陈代谢而促进激素  $a$  的分泌，使  $b$  增加而沿着  $KL$  途径出现跳跃而真正治愈，他用这种方法治愈了剩下

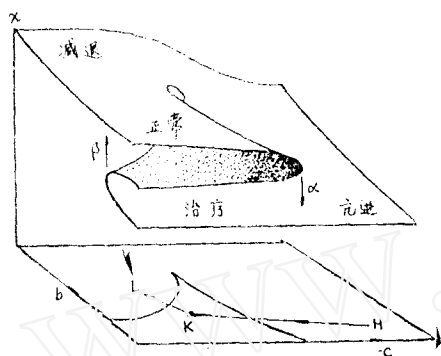


图6 甲状腺机能的尖点突变模型



图7 图6中模型的定量化

的三分之一患者，并定量地拟合数据于尖点突变模型，得到的结果如图 7。最后他根据这些情况提出了一个内在机制的模型。

#### 四、非初等突变理论

以上介绍了 Thom 的书 [68] 出版的时代的“经典”突变理论。在这以后，特别是结合着一些具体应用的需要，在突变理论的范畴内，又推广或发展了一批新的数学概念和数学方法。它们不再局限于梯度类系统，而可适用于更一般的系统，这些正属于 Thom 已提到的一般的突变理论或称为非初等突变理论。这种推广可以是在原来的基础上引入①对称性；②边界；③无限维或三者的组合。

考虑对称性实际上是假设有一紧 Lie 群作用于函数  $F(x, a)$  中的变量  $x$ ，对理论作修改以考虑到这个作用。主要的概念如确定性和开折，可搬用而无困难，对给定的群，至少原则上可对低余维系统进行。这方面的最早工作见 Poénaru [45]。

初等突变理论的“局部”结构和分析假设在 Euclid 空间中的完全邻域。若空间有边界，则出现不同的现象。方法的推广也是成功的，当然结果并不相同。[47]中报道了 Pitt 和 Poston 的一些未发表的结果，Siersma [53] 和 Arnold [10] 也对这个问题得到了一些结果。

当问题较严格地在函数空间(如 Hilbert 空间或 Banach 空间)中提出时,出现无限维。光学和弹性理论中的许多问题最好这样地看待。需要某种类型的有限性限制,通常取为 Fredholm 型的,见 Arkeryd<sup>[10]</sup>, Chillingworth<sup>[120]</sup> 和 Magnus<sup>[36]</sup>。

特别重要的是把  $F(x, a)$  推广为向量函数,这时需把通常的等价关系换成稍粗糙些,但仍可满意地应用所谓的接触等价性。这样仍可得确定性和开折定理,分类有所不同且复杂得多。这一推广称为奇异点理论,近年来找到了许多应用例子。

下面比较详细地介绍几个重要的结果。

### 有缺陷的分叉(imperfect bifurcation)

这是非初等突变理论的第一个重要的发展,由 Golubitsky 和 Schaeffer<sup>[127]</sup> 作出。考虑平衡方程

$$x^3 - bx + a = 0$$

无缺陷时  $a = 0$ , 上式作  $x^3 - bx = 0$ , 这时出现对于  $b$  的叉型分叉。

考虑缺陷的影响,若仍设  $a$  为常数,则被扰动分叉图形如图 8(a), (b)。但为了给出所有的扰动,需认为  $a$  与  $b$  有关,为了清晰起见,引入新的哑变量作为分叉参数,则叉型分叉可看作沿路径

$$\alpha(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \lambda$$

而进行,对它的扰动就是对路径的扰动,例如平行路径

$$\alpha(\lambda) = \text{常数}, \quad b(\lambda) = \lambda$$

和倾斜路径

$$\alpha(\lambda) = p\lambda + q, \quad b(\lambda) = \lambda$$

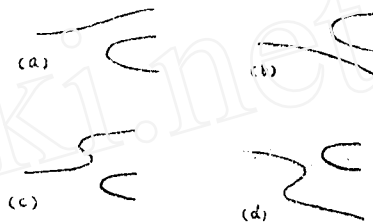


图 8 被扰动的叉型分叉

只考虑线性扰动,则所需要的被扰动叉型分叉族为

$$x^3 - \lambda x + p\lambda + q = 0$$

其中出现的  $p\lambda$  项导致两个新的分叉图形如图 8(c), (d)。

Golubitsky 和 Schaeffer 区分了①状态变量(依赖于所有其他因素); ②分叉参数(依赖于控制变量但不依赖于状态变量); ③开折或即控制变量(不依赖于①和②)。这时的分叉问题指

$$G(x, \lambda) = 0$$

其中  $G: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$  是光滑的。称两个这样的问题  $G$  和  $H$  接触等价,若存在光滑函数  $X$  和  $\Lambda$ , 使得

$$H(x, \lambda) = T(x, \lambda) \cdot G(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$$

其中  $T$  是非异矩阵,此外,取向也需保持。

由初等突变理论可知,函数空间由构成开集的各结构稳定函数等价类所充满,它们之间的边界曲面是余维 1 单参数族,这些边界曲面的交线是余维 2 双参数族,等等。在分叉问题的空间中也可以作类似的讨论。对  $F(x, \lambda, \varepsilon)$ , 余维数为 1 的边界为以下三种:

1. 分叉或隔绝物:  $0 = F = F_x = F_\lambda$
2. 滞后:  $0 = F = F_x = F_{xx}$
3. 双极限点: 存在  $x_1, x_2, \lambda, \varepsilon$  使得

$$0 = F(x_i, \lambda, \varepsilon) = F_{x_i}(x_i, \lambda, \varepsilon), \text{ 对 } i=1,2$$

把与以上三项相应的超曲面分别记为 **B, H, D**, 则对叉型分叉有

$$\mathbf{B} = \{(a, b) | a = -b^3\}$$

$$\mathbf{H} = \{(a, b) | a = 0\}$$

$$\mathbf{D} = \phi$$

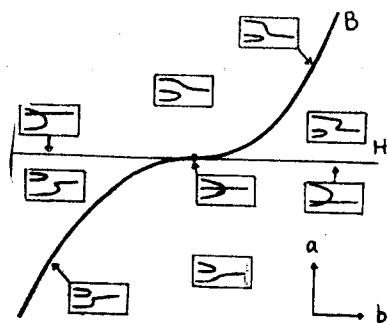


图9 叉型分叉的全部开折

在参数平面中的图形见图9.

有缺陷分叉的一个应用例子是所谓有翼尖点, 问题来自搅拌箱式反应器中的标准连续模型. 这项工作首先由Uppal等<sup>[75]</sup>进行了数值研究, 而后有Aris<sup>[8]</sup>, 再后 Golubitsky 和 Keyfitz<sup>[25]</sup> 对它应用了上述思想, 也见[64]. 这个模型导致定常状态分叉方程

$$G(y, \varepsilon; B, \delta, \eta) = \eta - (H\varepsilon)y + B\varepsilon\{1 + \varepsilon\delta \exp[-\gamma y/(1+y)]\}^{-1} = 0 \quad (12)$$

他们找到了等价于分叉问题

$$x^3 + \lambda^2 = 0 \quad (13)$$

的组织中心, 这一形式系由数值结果的定性特点得到, 把它开折为

$$x^3 + \lambda^2 + (a+b\lambda)x + c = 0$$

可得到对理想问题(13)的七种结构稳定的摄动, 从而给出原问题(12)的可能的定性性态. 这七种摄动中有五种已曾为Uppal等<sup>[75]</sup>用数值方法找到过, 剩下的两种后来也用数值方法独立地找到了. 数值计算固然很重要, 但透彻的理论研究可以节省大量的计算机工作.

#### 等变化分叉 (equivariant bifurcation)

如上所述, 叉型分叉的余维数为2, 于是随机遇到的分叉不可能与之相象, 叉型分叉在文献中如此频繁地出现的原因看来是对称性. 分叉问题  $x^3 - \lambda x = 0$  除有平凡 ( $x$  变换为  $x$ ) 不变性外, 还当  $x$  变换为  $-x$  时保持不变. 故称这个问题为有阶次为2的对称群  $Z_2$  的等变化分叉.

如果我们感兴趣于破坏对称性的缺陷, 则问题的余维数为2而需要两个独立缺陷以便完全地开折. 但若我们感兴趣于保持对称性的缺陷, 则需在有对称性的函数集合中讨论, 同样可计算开折、余维数等等. 这项工作由 Golubitsky 和 Schaeffer<sup>[27]</sup> 在 Poénaru<sup>[45]</sup> 工作的基础上进行. 应当指出, Sattinger<sup>[48]</sup> 也强调了在分叉理论中考虑对称性的重要意义, 做了一些基础工作. 为节约篇幅, 这里只介绍一个应用例子, 关于理论的细节可参见[64].

这个例子是矩形板的模态跳跃. Stein<sup>[61, 62]</sup> 在实验中发现, 受纵向压缩的矩形板最初屈曲的模态的波数为5, 但进一步加压时跃变为波数6. 对它曾有过一系列不成功的解释, 显然这一现象与某种类型的二次分叉有关.

Schaeffer 和 Golubitsky<sup>[50]</sup> 把这个问题作为有对称群  $Z_2 \oplus Z_2$  (特征函数上下对称连同矩形板几何对称性的一些对特征函数非平凡作用的部分) 的等变化分叉问题处理. 板的控制方程是 von Karman 方程, 考虑固定和简支两种边界条件. 把方程线性化, 则它对应于屈曲板的特征函数有波数  $k$ . 在板的尺寸比的一些常数值  $l$ :

$$l = [k(k+2)]^{1/2}, \text{ 对固定边}$$

$$l = [k(k+1)]^{1/2}, \text{ 对简支边}$$

特征值是二重的, Stein实验  $l$  值为5.38, 若考虑模态5和6, 则对固定边  $l$  为5.92, 对简支边  $l$  为5.48. 实验值总可以看作由双重特征值向下方的小扰动.

Schaeffer 和 Golubitsky<sup>[50]</sup> 用等变化奇点理论和推广的确定性准则发现了所有保持  $Z_2 \oplus Z_2$  对称性的可能类型的分叉图形. 他们发现二次分叉只可能对固定边界条件发生(但以往的大多数分析用的是简支边界条件, 尽管 Stein 推荐的是固定边界条件!).

图10表示分叉图形, 已把波数5和波数6的图形画在一个平面上, 在虚线位置, 原先的波数5解不稳定而产生模态跳跃到波数6.

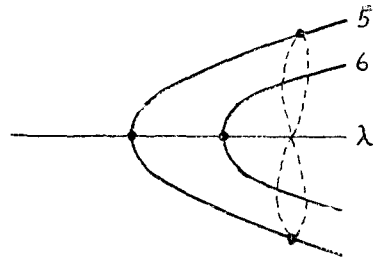


图10 屈曲矩形板由波数5到波数6的模态跳跃

### 退化的 Hopf 分叉

1942年, Hopf<sup>[34]</sup> 给出了微分方程

$$dx/dt = f(x, \lambda), \quad f: R^n \times R \rightarrow R^n$$

由一定常解分叉为极限环的条件. 这是一个重要的经典分叉定理, 它被广泛地应用着, 其数学原因之一是: 作为一个单参数过程, 这个分叉是结构稳定的. 但当系统中有多参数时, 就失去了这种稳定性, 对此已有很多研究工作.

Hopf 定理的假设为:

①  $f$  在  $(0,0)$  的 Jacobi 矩阵有单重特征值  $\pm i$  (也许需变换  $t$  的尺度), 且无其他特征值  $\pm ki$  ( $k$  为整数), 这是非共振条件.

② 当  $\lambda$  变化而通过 0 时, 靠近  $\pm i$  的特征值横越过虚轴. 即若  $\sigma(\lambda) + i\omega(\lambda)$  是在 0 的近旁的  $\lambda$  的特征值, 并有  $\sigma(0) = 0$  和  $\sigma'(0) = 1$ , 则  $\sigma'(0) \neq 0$ .

于是, 对从零解分叉、周期接近  $2\pi$ 、以振幅  $a$  为参数的非恒定周期解, 存在着(局部地)唯一的一支, 其中  $\lambda$  是  $a$  的一个偶函数:

$$\lambda = \mu_2 a^2 + \mu_4 a^4 + \dots$$

若还有假设

③  $\mu_2 \neq 0$

则根据  $\mu_2$  的符号, 这一解的分支或是超临界的, 或是亚临界的(即诸分支沿  $\lambda$  轴或是向左或是向右).

若假设①不成立, 则发生共振, 情况十分复杂(例如可能分叉为环面). 不久前才有可能放松假设②或假设③中的一个, 但不是同时. Golubitsky 和 Langford<sup>[26]</sup> 对假设②和③都不成立的情况给出了一完全的描述(通过奇点理论中的一个问题, 它在原则上可对任意余维数求解). 他们注意到, 利用 Ляпунов-Schmidt 过程, 可不需要以上二假设而借助等变化奇点理论方法得出结论. 他们得到的分类表为

| 余维数 | 范 | 式  |
|-----|---|--|
| 0   |   | $x^3 \pm \lambda x$                      |
| 1   |   | $x^3 \pm \lambda^2 x, x^5 \pm \lambda x$ |
| 2   |   | $x^3 \pm \lambda^3 x, x^7 \pm \lambda x$ |

$$x^3 \pm \lambda^4 x, x^5 + 2b\lambda x^3 + \varepsilon \lambda^2 x \quad (\varepsilon = \pm 1, b^2 \neq \varepsilon)$$

$$x^5 \pm 2(\lambda \pm \lambda^2)x^3 + \lambda^2 x, x^5 \pm 2\lambda x^3 \pm \lambda^3 x$$

$$x^7 \pm \lambda x^3 \pm \lambda^2 x, x^9 \pm \lambda x$$

当然这个理论不只是给出了一个分类表,限于篇幅,下面我们只能举一个例子作为结束。

乙醇的振荡<sup>[26]</sup> 实验研究<sup>[7,4]</sup> 提出的模型为

$$(a) \xrightarrow{\alpha > 0} \begin{cases} dX/dt = \lambda - KX - XY^2 \\ dY/dt = KX + XY^2 - Y \end{cases}$$

(b)  $\xrightarrow{\alpha = 0}$  其中  $X$  和  $Y$  为有量纲的浓度变量,  $\lambda$  是馈送率,  $K$  是低活性反应速率。

(c)  $\xrightarrow{\alpha < 0}$  计算表明,当  $K = 1/8$  和  $\lambda = \sqrt{3}/8$  时有一个范式为  $x^3 + \lambda^2 x = 0$  的退化 Hopf 分叉。由其普适开折

$$x^3 + \lambda^2 x + \alpha x = 0$$

图11 乙醇振荡模型中的退化 Hopf 分叉

可得到如图 11 的分叉图形。 $\alpha > 0$  时无分叉; $\alpha = 0$  时有一个退化点——一个就在建立瞬时消失的 Hopf 分叉; $\alpha < 0$  时有两个相互连接的 Hopf 分叉点,其中的一支周期解从零解分出而后又回到零解。用经典方法(Hopf 定理)可以发现这两个分支,但不能说明它们是否连接。在这种情况下,突变理论较为简单、自然和直接。

## 五、结 束 语

经过20年来的发展,突变理论已成为描述许多基本非线性现象的自然科学语言,它的影响日益增长,它的方法和概念被越来越普遍地理解和接受。它并不能代替经典理论,但在某些场合,特别在具有对称性的场合,在概念上和计算上都更为有效。

突变理论在物理科学中的成功应用已为众所公认。在生物科学和社会科学中的应用也有广阔的前途。通过约化技巧,它也可以应用于偏微分方程系统而非只局限于梯度类常微分方程系统。非初等突变理论的发展,更大大地开拓了突变理论可应用的范围。

非线性现象是极其复杂的,突变理论在理解这种现象方面,已经作出了重要的贡献。但对其他理论的重要性也不能低估,今后数十年内的最重要发展,很可能是各种不同理论的相互结合,从而使我们对非线性现象的认识达到一个新的高度。

## 参 考 文 献

- 1 陈应天,力学与实践(1979): 9—14.
- 2 郝柏林,物理学进展,3(1983): 329—416.
- 3 凌复华、魏焕民,初等突变理论在 Hamilton 系统中的应用,待发表.
- 4 刘式达,刘式适,力学学报,16(1984): 10—18.
- 5 钱伟长主编,非线性力学的新发展——稳定性、分叉、突变、混沌,华中工学院出版社,即将出版.
- 6 Andronov, A. A., Pontryagin, L. S., Dokl. Akad. Nauk, SSSR, 14(1937): 247—251.
- 7 Андронов, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, Москва(1937). (中译本: 振动理论(上、下册),科学出版社(1973)).
- 8 Aris, R., Num in olla agitata papillo est? in "Catastrophes and other important matters", Duplicated Notes, Dept. of Chem. Engng and Materials Sci., Univ. of Minnesota(1977).
- 9 Arkerlyd, L., J. London Math. Soc., 19(1979): 359—370.
- 10 Arnold, V. I., Russian Math. Surveys, 33(1978): 99—116.
- 11 ——, Singularity Theory, Selected Papers, Cambr. Univ. Press, Cambridge(1981).

- 12 —, Catastrophe Theory (trans. from Russian), Springer, Berlin (1983).
- 13 Berry, M. V., *J. Phys.*, A 8 (1975): 566—584.
- 14 —, in “Recontre de Cargese sur les Singularites et leurs Applications” (F. Pham, ed.), Institut d’Etudes Scientifiques de Cargese, Publ. Math. Dept., Univ. Nice (1975): 133—136.
- 15 —, *J. Phys.*, A 8 (1975): 1952—1971.
- 16 —, *Adv. Phys.*, 25 (1976): 1—25.
- 17 —, Nye, J. F., *Nature Lond.*, 267 (1977): 34—36.
- 18 —, Upstill, C., in “Progress in Optics” (E. Wolf, ed.) V. 19 (1980): 257—346.
- 19 Brocker, Th., Lander, L., Differentiable Germs and Catastrophes, London Math. Soc. Lecture Notes 17, Cambr. Univ. Press, Cambridge (1975).
- 20 Chillingworth, D. R. J., *Bull. Inst. Math. Appl.*, 11 (1975): 155—159.
- 21 —, *J. Func. Anal.*, 35 (1980): 251—258.
- 22 Dynamical Systems — Warwick 1974. Lecture Notes in Math. No. 468, Springer, New York (1975): 390—401.
- 23 Gilmore, R., Catastrophe Theory for Scientists and Engineers, Wiley-Interscience, New York (1981).
- 24 Golubitsky, M., *SIAM Review*, 20 (1978): 352—387.
- 25 —, Keyfitz, B. L., *SIAM J. Math. Anal.*, 11 (1980): 316—339.
- 26 —, Langford, W. F., Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations, Preprint, Univ. of Warwick (1980).
- 27 —, Schaeffer, D., *Commun. Pure Appl. Math.*, 32 (1979): 21—98.
- 28 —, —, *Commun. Math. Phys.*, 67 (1979): 205—312.
- 29 Haken, H., Synergetics: An Introduction, Springer, Berlin (1978).
- 30 Hassard, B., Kazarinoff, N. D., Wan, Y. H., London Math. Soc. Lecture Notes V. 41, Cambr. Univ. Press, Cambridge (1981).
- 31 Hayden, J., Zeeman, E. C., 1980 Bibliography on Catastrophe Theory, Univ. Warwick, Coventry (1980).
- 32 Helleman, R. H. G., in “Fundamental Problems in Statistical Mechanics”, V. 5 (E. G. D. Cohen, ed.), North Holland Publ., Amsterdam (1980): 165—233.
- 33 Holmes, P. J., Rand, D. A., *J. Sound and Vibration*, 44 (1976): 237—253.
- 34 Hopf, E., *Ber. Math. Phys. Kl. Sachs. Akad. Wiss. Lpz.*, 94 (1942): 3—22. (Eng. trans. in “The Hopf Bifurcation and Its Applications (J. E. Marsden and N. McCracken eds.) Springer, Berlin (1976)).
- 35 Lu, Y. C., Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory, Springer, Berlin (1976).
- 36 Magnus, R. J., *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 86 (1979): 41—45.
- 37 Mather, J., *Ann. Math.*, 87 (1968): 89—104.
- 38 —, *ibid*, 89 (1969): 254—291.
- 39 —, Publ. Math. IHES 37 (1969): 223—248.
- 40 —, *Adv. Math.*, 4 (1970): 301—336.
- 41 —, in “Proc. of the Liverpool Singularities Symp.”, Lecture Notes in Math. 192 (C.T.C. Wall ed.) Springer, Berlin (1971): 207—253.
- 42 Moser, M., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33 (1931): 72—91.
- 43 *Newsweek* (Jan. 19, 1976): 54—75.
- 44 Peixoto, M. C., Peixoto, M. M., *Ann. Acad. Brasil. Ciencias.*, 31 (1959): 135—160.
- 45 Poenaru, V., Singularities  $C^{\infty}$  en presence de symetrie, Lecture Notes in Math. 510, Springer, New York (1976).
- 46 Poincare, H., Sur les propriete des fonctions defines par les equations aux differentielles partielles, These (1879), Oeuvres complete, V. 1, Cauthier-Villars, Paris (1928).
- 47 Poston, T., Stewart, I., Catastrophe Theory and Its Applications, Pitman, London (1978).
- 48 Sattinger, D. H., Group-Theoretical Methods in Bifurcation Theory, Lecture Notes in Math. V. 762, Springer, Berlin (1979).
- 49 Saunders, P. T., An Introduction to Catastrophe Theory, Camb. Univ. Press, Cambridge (1980). (凌复华译, 突变理论入门, 上海科学技术文献出版社 (1983)).
- 50 Schaeffer, D. G., Golubitsky, M., *Commun. Math. Phys.*, 69 (1979): 209—236.
- 51 Seif, F.J., in “Structural Stability in Physics (Guttinger and H. Eikermeier eds.),” Synergetics

- V. 4. Springer, Berlin (1979): 275—289.
- 52 Sewell, M. J., *Bull. Inst Math. and Appl.*, 12 (1976): 163—172.
- 53 Siersma, D., *Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc.*, Univ. of Utrecht (1978).
- 54 Smale, S., *Bull. Am. Math. Soc.*, 84 (1978): 1360—1368.
- 55 Sussman, H. J., *Synthese*, 31 (1975): 229—270.
- 56 —, *Nature*, 269 (1977): 759—763.
- 57 —, *The Sciences*, 17 (1977): 20—23.
- 58 —, *ibid.*, 18 (1978): 3—29.
- 59 —, *Behaviour Science*, 23 (1978): 383—389.
- 60 —, Zahler, R. S., *Synthese*, 37 (1978): 117—216.
- 61 Stein, M., NASA Tech. Rep., R. 39 (1959).
- 62 —, *ibid.*, R.40 (1959).
- 63 Stewart, I., *The New Scientist* (Nov. 20, 1975): 447—454.
- 64 —, *Physica*, 2D (1981): 245—305.
- 65 —, *Rep. Prog. Phys.*, 45 (1982): 185—221.
- 66 —, *IEEE Trans.*, CAS-30 (1983): 578—586.
- 67 —, *ibid.*, CAS-30 (1983): 663—670.
- 68 Thom, R., *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin-Addison Wesley, New York (1975).
- 69 —, *SIAM Review*, 19 (1977): 189—201.
- 70 Thompson, J. M. T., Hunt, G. W., *A General Theory of Elastic Stability*, Wiley, London (1973).
- 71 —, *Catastrophe Theory and Its Role in Applied Mechanics*, in “Proc. 14th IUTAM Congress, Delft, August 1976”, North Holland, Amsterdam (1976/7).
- 72 —, *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*, Wiley Chichester (1982).
- 73 Trotman, D. J. A., Zeeman, E. C., in [79]: 497—561.
- 74 Tyson, J., Kauffman, S., *J. Math. Biol.*, 1 (1975): 289.
- 75 Uppal, A., Ray, W. H., Peore, A., *Chem. Engng Sci.*, 31 (1976): 205—214.
- 76 Whitney, H., *Ann. Math.*, 62 (1955): 374—419.
- 77 Zeeman, E. C., *Sci. Amer.*, 234 (1976): 65—83.
- 78 —, *Nature*, 279 (1977): 351—384.
- 79 —, *Catastrophe Theory: Selected Papers (1972—1977)*, Addison-Wesley Reading, Mass. (1977).
- 80 —, in “Catastrophe, Theory and Applications” (D. K. Sinha ed.) (1981): 70—73.
- 81 —, in “New Directions in Applied Math.” (P.J. Hilton and G.S. Young, eds.) (1982): 109—153.
- 82 —, Wetherilt, B., 1981 Bibliography on Catastrophe Theory, Math. Inst. Univ. of Warwick, Coventry (1981).

## CATASTROPHE THEORY——HISTORY, CURRENT SITUATION AND FUTURE

Ling Fu-hua

(Dept. of Engng. Mech., Shanghai Jiao Tong University)