这个元。于是由（7.7）直接得出（7.6），这是因为对每个 $a\in\mathcal{C}$，弱积分可由下式表征：

$$\ll a,\int_0^t \dot{e}(\tau)d\tau\gg = \langle\langle\langle a\chi_{[0,t]},\dot{e}\rangle\rangle\rangle$$

其中$\langle\langle\langle\cdot,\ \cdot\rangle\rangle\rangle$表示 L_C^1 与 L_{M_s} 之间的对。

7．e．构造 u^- 和 u^+ 让我们按照（5.6）取 q；相加得到 $\dot{q}=\dot{c}+\dot{p}$ 是 L_{M_s} 的一个元，且

$$q(t)=q(0)+\int_0^t \dot{q}(\tau)d\tau$$

对每个 $t\in[0,T]$，现在我们根据（4.3），（4.4）和（5.1）构造 u：

$$u^-(t,x)=\int_{[0,x)} q(t),\quad u^+(t,x)=\int_{[0,x]} q(t)$$

（在某不连续点处，u 的值本身是不重要的：我们可以选 u^- 和 u^+ 之间的任何值）。

由于（5.21）成立，因而（5.14）也成立，我们推得边界条件（5.2）被满足。

验证 5.a 节中最后的要求是满足的，这只不过是一个交换积分的问题。可以使用关于弱向量积分的某些结果（见[1]Ch. 6§1）。更初等地可选C的元列（φ_n）（$|\varphi_n|\leqslant 1$），使它点点收敛于区间$[0,x)$（分别地区间$[0,x]$）的特征函数；然后重复地应用控制收敛定理。

参　考　文　献（略）

俞鑫泰译自：Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics (Joint Symp. IUTAM/IMU Held in Marseille, Sept. 1—6, 1975), Ed. by P. German and B. Nayroles, Springer-Verlag (1976): 56—89.

生物力学：生机论最后的据点[1)]

[英] Reading 大学工程学系　J. E. Gordon

大多数人——尤其是大多数生物学家——都与弹性学有特殊的联系。可是他们却对弹性学丝毫不感兴趣。因为，他们认为弹性学太平凡，太困难，无足轻重，尤其是令人生厌。其实有关植物和动物的许多力学问题并不是那么平凡的；这些问题是超乎寻常地困难和复杂的，而且力学强度对肌体的存在有绝对的重要性。但是，情况几乎总是这样：各种生物在解决其自身结构的问题方面是如此地成功，以致我们没有去注意它们是如何解决这些问题的。世上没有什么事情比圆满的成功更能吸引人们的好奇心了。

工程结构理论，即使在初等水平上也是不容易的；学生们往往发现，它很难理解。不过，通常的工程理论的确还不足以应付大多数生物力学问题。如今，生物力学存在着两种现实的危险倾向：一种倾向是，试图把生物结构的力学问题硬用过分简单化了的工程模型去套

1）生机论（Vitalism），认为生物中的控制力是不同于物理力和化学力的一种学说。——编者

(在 Friday Harbor Marine 实验室里，就曾有学生在试验机上涂写"普罗克拉斯提斯在此[1]"的字样）；另一种倾向是，把所研究的整个课题看得神秘莫测，以为科学定律在生命的奥秘面前竟然无能为力。

但是，活的生物当然是遵循通常的物理定律来承受所受的载荷的，正如它们遵循普通的化学定律一样。不过，人们不能指望简单粗糙地运用初等程度的化学知识去了解生物体的新陈代谢。同样，对生物力学的了解把人们带进弹性学的领域，这些领域的大部分远远超出了初级教科书的水平。

首先，工程师一般是采用虎克定律的；其次，大多数工程结构也确实是在小应变和小挠度下工作。其部分原因是大多数工程材料如钢和混凝土等的特性就是如此的；另一部分原因是，只有在这些条件下才有可能进行数学处理。结果，许多工程师终于按上述情况考虑问题。而其中有些人也就认为大应变和不服从虎克定律的结构不知什么道理不是很多。

当然，象木材与骨这样的生物材料，的确多少与工程设想有一致之处，可是软组织很少服从虎克定律，例如动物的应变往往比工程师习惯了的应变值约大1000倍。不过，工程师或许应该注意，虽然动物的应力有时还很低，但由于应变很大，所以在生物力学中可能要处理的应变能至少要比人造结构所含的应变能高（有时高得多）。因此，生物有机体方面的断裂力学问题就是一个十分严峻的问题。

然而，工程师跟自然界之间在结构设计的原则上存在另一个或许更为重要的差异。这包括在我或许可以称之为"毁坏性设计"（Catastrophe design）的概念之中。工程师在考虑设计时使用"安全系数"等概念，力求尽量推迟结构破坏。事实上，为此工程师通常总企图使结构异常地结实，并希望造好的结构永不毁坏。可是，倘若结构果真毁坏了，那么，残存的破损结构主要对事故检查员和律师有意义；一般来讲，工程师并不关心破坏了的结构仍应使用这个问题。

上述原则在一定程度上也可用于树干结构，有时也适用于骨；但肯定不适用于柔软的生物结构。大量活的机体设计成能克服由挠曲引起的超载。象草之类的小植物，能够经受住由风及其自重引起的常规载荷，这与工程师设计的结构极为相似。但这类小植物被踩踏后却只是弯曲与偏斜，经过适当的时间又恢复原状。谁也不能"折断"地毯或门帘。但这是工程师简直想不到的维护结构寿命的一种方式。事实上，这种方式的实际优点很大，因为它能使我们摆脱"安全系数"所导致的昂贵的自重消耗。不管怎么说，工程师们正开始意识到"安全系数"多半是个赘疣。这是工程师们可以从生物力学中学习到许许多多东西的一个领域。

工程师在试图避免或延迟他所设计的结构物发生可怕的"崩溃"的努力中，习惯于沿用料材的"破坏应力"这个概念来处理问题。好几代学生一直是这么学的：若在结构的任何地方，工作应力达到了材料的破坏应力的值，则这个结构必毁无疑。这是无稽之谈。理由之一是这个概念没有充分考虑应力集中。在作用了应力的材料里，在每一条裂纹、伤痕和凹坑处，局部应力将会升高，这是与 Inglis 教授的著名公式

$$\sigma_{最大}=\sigma_{平均}(1+2\sqrt{l/r})$$

相一致的，式中 $\sigma_{最大}$ 是裂纹尖端处的应力峰值，$\sigma_{平均}$ 为远离裂纹处的平均应力，l 是裂纹的

1）普罗克拉斯提斯（Procrustes）是希腊神话中的人物，开黑店的强盗，传说他把人劫去后硬让高个子睡短床，砍掉其身体的伸出部分，让矮个子睡长床，强拉其身体与床齐。——译者

长度，r 为裂纹尖端处的半径。根据这个观点，一条细微的伤痕恰好与一个大窟窿同样糟糕，因为应力集中仅仅取决于 l 与 r 的比值。要是有人用普通的针尖在 Forth 桥的大梁上划一条伤痕，那么根据 Inglis 公式极易看出，这条伤痕底部的应力必将远远高于钢的"破坏应力"。因此，若根据工程师的传统观点，这座桥就势必破坏而堕入大海。大家知道这是不可能发生的。大多数植物和动物在其生长过程中，不断遭受刮伤、刺伤和擦伤，当然也不会由于这些伤痕底部的应力超过"破坏应力"而危及植物和动物的生命。

工程结构在经受力学上的缺陷的能力方面往往不及植物和动物（时常听到超级油轮断为两截，而"免费"大量供应原油之事），但工程结构的确有，而且必须具备这方面的能力。因此，工程师不得不注意那个推翻传统理论的人A. A. Griffith。事实上，方兴未艾的断裂力学，已经向很有点闭塞和貌似正确的工程学这个小天地，吹进了大量新鲜空气。

当然，断裂力学也适用于生物学，可是我再次认为我们不能就象工程师那样地应用基本的断裂力学理论。公认的断裂力学理论假设处于断裂过程中的材料所释放的全部应变能，在断裂区几乎全部以"断裂功"的形式被吸收。我认为，事实上即使对于服从虎克定律的材料，这个假设也经不起持怀疑态度者的检验；而对于柔软的生物组织，这个假设也许连近似地正确也不是。

如前所述，我们经常要处理应变能很高的问题；实际上，人在打呵欠时，他的面颊组织中的应变能（对单位体积的材料而言）大约与低碳钢中的普通工程应力的应变能相等——可是，一般来讲，哪怕打呵欠时嘴张到最大，人的面颊象一座箱形桁梁桥那样，也丝毫不会有被撕裂的危险。其实，动物的组织格外坚韧——就给定应变下的临界裂纹长度而言——几乎肯定要比钢坚韧。如前所述，用针扎入动物体内时，它们是不会象气球那样一下子爆裂的。所有这些似乎意味着断裂功很高。毫无疑问，断裂功确实很高，但是，是否所有动物组织的断裂功都是那样地高呢？

我在另文中（Gordon，1979 a，b）曾提出：断裂力学并不完全是关于"断裂功"之类的问题；断裂力学论及结构的各部件或元件间的能量传递，因为若所释放的应变能不能到达断裂区，则材料或者结构就不可能破坏。

受拉结构

把结构分隔开是限制能量在结构内传递的方法之一。当然，这对受拉结构（图 1）是最容易办到的。H. L. Cox（1956）指出把受拉结构分割成许多平行的构件后并不增加额外的

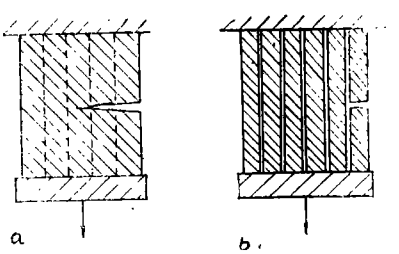

图 1　在连续的和分割开的材料或结构中裂纹的扩展
a 连续着的元件（如连续的材料），裂纹扩展
b 离散的元件（如绳索），裂纹停止扩展

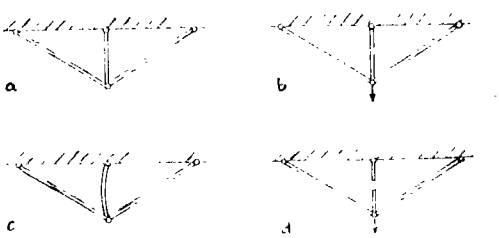

图 2　超静定结构中的疲劳破坏的危险
a 加载前　b 加载初　c 卸载后
d 高应变低周率疲劳引起的疲劳破坏

重量，实际上端部的连接甚至还由于分割而节省了一些重量。受拉构件数增加的结果是造成所谓的的“超静定”结构(图2)。在工程结构中，特别是在那些用韧性金属造成的结构中，这样做非常危险。然而，动物的结构与材料的天然机能却一般是不致产生这样的危险的。

即使在工程问题中，把受拉构件以这种方式予以分割也可能很有好处。普通的绳索就是一个恰当的例子。现代大跨度的吊桥完全依靠多股高强度钢制造的钢丝索。由于钢丝索的强度太高，以致它们几乎完全脆化了。但因为每根钢丝索均与其它钢丝索彻底地弹性分离，所以应变能不可能在钢丝索间传递。因此，这种钢丝索已证明是十分安全的。事实上，这种钢丝索比用坚韧柔软的低碳钢制造的老式钢缆的强度高10倍左右；所以目前建造吊桥的跨度可以比以前吊桥的跨度大10倍。

动物广泛利用了这个原理，尤其是在它们的腱中(图3)。这个原理亦应用在海船H.M.S.胜利号(图4)这种极其完善的设计中。由图可见，下桅、中桅和上桅的左右支桅索与动物的腱极其相似。类似的生物学原理完全胜过这项杰出的造船术。人们或许会记得在Trafalgar战役——海军战史中最果断的战斗之一，双方没有一艘战舰是被击沉的。

图3 受拉结构的分割(一条腱)

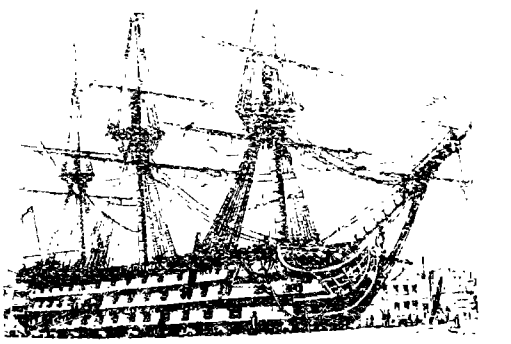

图4 H.M.S.胜利号

通常，这类战舰结构不会被冷炮的切割作用所摧毁。

进而，注意到象胜利号那样的横帆船和象人这样的脊椎动物两者的设计多么惊人地相似是很有意义的。这里，脊椎动物的脊柱对应于船的桅杆，肋骨对应于帆桁，如此等等。拉杆纵横交错，恰似动物的腱和肌肉；我认为，船帆与皮肤或其它生物膜相似。这些相似之处决非异想天开，因为相似的结构要求是易于产生相似的结构效应的。必须特别强调，象胜利号这样的船，在结构安全设计方面已达到了极高的水平。

受弯结构

结构元件或部件的弹性隔离可确保结构安全的原理，经常用于受弯结构。图5表示的是最简单的一种用一块块分开的木板或一根根木条铺设而成的木桥。若有任何一块木板破断了，这个损伤并不一定能扩展；若桥面是一整块，则情况就是另一个样了。极为相似的原理还可应用于普通的瓦屋顶。瓦屋顶是用脆性陶瓷瓦片盖成的，但它并不会有任何重大破坏的危险。所以，鸟与飞机不一样，它不是蒙着一整张闪闪发光的铝皮，而是裹着一张悬臂梁

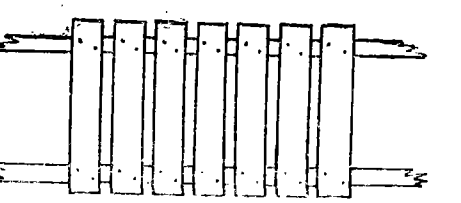

图5 简易木桥的普通桥面是离散的受弯结构的一个例子，如果某一块木板破断了，几乎并不造成什么危害，损伤可能不会扩展

网，即羽毛。每根羽毛都是单独的臂悬梁，而构成羽毛的每一根羽支同样也是单独的悬臂梁。所有这些悬臂梁相互间只有极微弱的联系。鸟在失掉一根或数根羽毛后，仍然能，而且的确能安然无恙地飞行盘旋，要是飞机的机翼有任何一点小毛病，那无疑会使航空安全检查员焦虑万分。而且羽毛似乎还能构成一副精良的防护盔甲。一般来说，猛禽并不是打算穿透其猎物的羽毛，而总是力求从高处猛扑下来击碎其猎物的颈脖。远古时期的人就用这一类方法，即常用羽状盔甲来防御刀剑一类的武器。现代战舰的防护装甲一般是排成鱼鳞状的，各装甲板之间有少量弹性连接物。通常并不企求这些装甲板能起加强船的整体结构强度的作用。

受压结构

若结构（如砖石结构）单纯受压，则防止裂纹扩展的问题或许不会出现，但是这种例子在生物学中是罕见的。通常作结构用的材料必须在受压和受拉两方面都是安全的，如木头、骨头和牙齿便是。如图6所示，若我们试图将图1那样的结构予以分割，则分割后的各个构件在受压时容易分别发生屈曲，因此某种形式的侧向连接是必不可少的。提高这种离散结构在受拉时安全性的一种方法，是用“弱界面”将各个元件互相连接。如果真正这样做了，那么根据Cook-Gordon机理（Cook及Gordon，1964），裂纹的扩展就可能会被阻止（图7）。

事实上，这正是发生在木材、珍珠母和牙齿中的情况，也可能是发生在大多数骨头中的情况。在人造复合材料如玻璃纤维中发生的，也是这种情况。

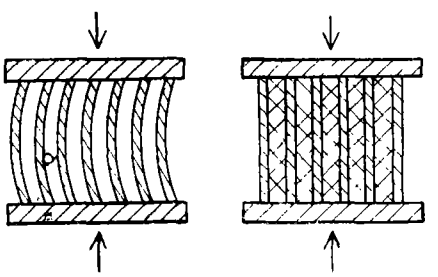

图6　一个分割开的结构在受压时的性状
a 各个元件在低载荷下分别发生屈曲（如草及门帘）
b 某种形式的侧向连接使抗压强度大为提高（如木栅门）

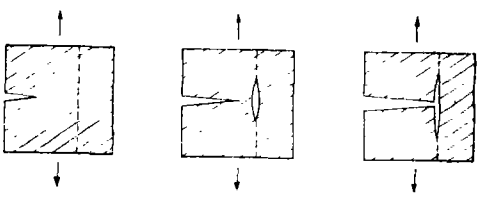

图7　界面的粘连是“刚性”但薄弱的。根据Cook-Gordon机理，界面将在裂纹向前扩散时裂开，但又往往将阻止裂纹的扩展（如木材、玻璃纤维、牙齿、珍珠母等）

连续膜的安全性

在设计抗拉的薄膜时，采用使各元件分离的方法当然是可行的，这也是布之所以难以撕裂的原因所在。然而，布是可以透过液体和气体的。要想不透气或不透水，可以应用聚合物膜和粘合剂，可是有时又会引起脆化。象布和纸这样的人造薄膜一般服从虎克定律，但很值得注意的是，皮肤和动脉管壁之类的动物薄膜却不服从虎克定律。一般来讲，动物薄膜具有象图8那样的J形弹性曲线。还值得注意的是，这类薄膜往往很难撕裂。当我们Reading大学生物力学组知道了这些薄膜中有一些是极其坚韧的时候，我们对此的反应是，假设这类材料必定具有出人意料之高的断裂功。实际上，我的同事Peter Purslow已测定了很多动物软组织的断裂功；结果表明这些断裂功并非高得惊人，通常在每平方米 10^3—14^4 焦耳的范围内。老鼠的皮肤、蚯蚓的表皮以及人的动脉同金属片、甚至同橡胶片的差异不在于断裂功，

而在于应力-应变曲线的形状。

几乎所有坚韧的软组织均具有这种J形曲线，我倾向于认为这对保证动物在力学性能上的安全极重要。从图8可见，曲线的**初始**部分几乎是水平的，这与液体的表面张力极其相象。因此，在这一部分曲线上，动物材料实际上无剪切模量，于是在低应变或中等应变水平下，材料或结构的各部分或各元件之间实际上没有应变能的传递。于是可以这么说，不管断裂功怎样，Griffith理论在此失效，材料是不能撕裂的。如果这是正确的，那么应力-应变曲线的形状就是最重要的了。值得注意的是，"特意"要让它破裂的膜如羊膜和蛋壳内膜，就不具有J形应力-应变曲线而或多或少地服从虎克定律。此外，普通的软橡胶具有S形应力-应变曲线（图8），正如大家知道的，如果将针戳进橡皮气球，它立即会叭的一声炸破。但用膀胱充气而成的气球就难以再现这种情景了。

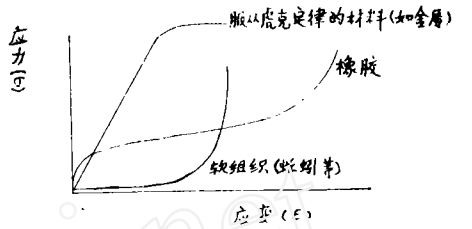

图8 典型的应力-应变曲线（未按比例）

"刚性"结构的接头

大车与木船这类传统的工艺结构，一般是用铁钉、螺栓或木钉将各个部件联成一体。这些接头不久就变得"松动"而能使整个结构活动起来，木船则老是漏水。直至最近铁船和钢船都是铆接的，接头仍或多或少地有些"活动"。当然，在Rudyard Kipling著的《自我料理的船》（Ship that Found Herself）一书中，可以找到有关这种性能的经典的论述，这是一本很有价值的工程教材。现代的工程师几乎总是藐视这类接头，而倾向于强调刚性的焊接接头(不活动的)的优越性。这是事实，但是焊接的钢结构常常充满着裂纹，因此焊接的船常会断成两截。传统的船舰和类似的结构存在着种种缺点，不过，它们几乎从未断为两截。因此我认为，船不断为两截至少部分地是它们的接头的松动特性所致。传统的钉、栓、铆接头在受剪切载荷作用时的特性见图9。显然，这是一条J形曲线，它与动物薄膜的J形曲线别无二致。因此，由几乎同样的理由，这类接头可能是"安全"的。在动物体内的"刚性"部分（例如骨头等）之间的连接，看来就具有这样的弹性。人颅骨上的骨缝就是这种例子，而解剖学家一向认为在成年动物中，这些接头没有任何"功能"可言。但我却认为颅骨内这类骨缝的存在，很可能起着绝妙的防护结构的作用。事实上，在我看来，生物和其它结构的安全性在很大程度上有赖于人们非常深邃地洞察那些乍看起来也许是细微末节的东西。

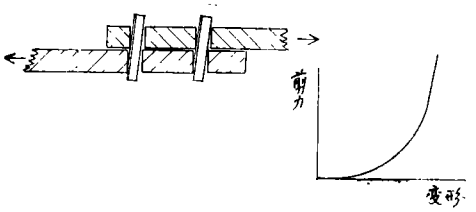

图9 在"松动式"木钉固定或捆绑固定的接头（如用"木钉"固定的木船）中，剪力的传递是非线性的

参 考 文 献

Gordon, J.E. (1979a). Catastrophe design—or how to behave like a worm. Paper given at Conference on N.D.E., La Jolla, California.

Gordon, J.E. (1979b). Designing with Brittle Materials. Paper given at ICM 3 Conference at Cambridge, UK.
Cox, H.L. (1965). The Design of Structures of Least Weight. Oxford: Pergamon.
Cook, J. & Gordon, J.E. (1964). A mechanism for the control of crack propagation in all brittle systems. Proceedings of the Royal Society of London, Series A. 282, 508—20.

孙家驹　郑　滇译自：Vincent, J. F. V., Currey, J. D. (eds.), The Mechanical Properties of Biological Materials (Proc. 34 th Symp. of the Soc. for Exper. Biology, Leads Univ., 1979), London, Cambridge Univ. Press (1980): 1—11. **俞稼樑**校）

短纤维复合材料弹性刚度的自相容法*

[美] Delaware 大学　T. W. Chou　S. Nomuta　M. Taya

1. 引言

在最近的一篇评论中，T. W. Chou（邹祖炜）和 Kelly[1] 认为不连续纤维复合材料是复合材料技术中最少了解的领域之一。提出这种看法的理由不难理解，因为在短纤维增强的材料中，短纤维和基体间存在着与纤维长度和排列方向变化有关的复杂的相互作用。在一个典型的注模玻璃纤维增强热塑材料中，纤维长径比的分布可以从完全有规则的排列到无规则的任意排列。而且在实际的材料中常会在简单的注模过程中发现明显的结构差异，因此即使在标称相同的加工条件下，制作技术也尚未达到能保证获得均匀结构的程度[2,3]。

短纤维复合材料刚度的研究可根据纤维排列方向分成单向、部分有规则排列和无规则排列三类。本文仅讨论第一类。半经验法已用来推算单向复合材料的刚度常数，一个众所周知的例子就是 Halpin-Tsai 方程（4），它是将 Hermans 解法简化为简单的解析公式而得到的。通过使用某些经验系数来考虑纤维的几何尺寸；这些经验系数不是参照适当的经验微观力学解法，就是拟合试验数据而得。其他半经验和数值解法可在[6—8]中找到。单向纤维排列方向也可看作是部分纤维排列的极限情况。Cox[9] 及 Cook[10] 已处理了纤维偏斜排列的课题，Knibbs 和 Morris[11] 讨论了长纤维的问题，Fukuda 和 Kawata 讨论了短纤维的问题。

本文采用"自相容"法来分析短纤维复合材料的弹性刚度。有两种自相容法[13]，即 Hill 法[14,15] 和 Kilchinskii[16,17]，Hermans[5] 方法。这里采用 Hill 法来处理短纤维复合材料的刚度问题，而短纤维近似为椭球形夹杂。纤维排列方向的偏差以及纤维端点开裂，将另文讨论。

2. 自相容法的概念

自相容法的模型中，一个夹杂被视为埋在一个连续和均匀的介质中，夹杂有着短纤维的弹性性能，而周围的材料则有着复合材料的性能。需要求解的正是这种复合材料的弹性性

* 本文曾在1979年12月美国机械工程学会（ASME）冬季年会上宣读，译文系根据作者的打字复印本翻译，译出后发现本文已略作修改后发表于 *J. Composite Materials*, Vol. 14 (July, 1980): 178—188. ——译者