第13卷 第3期 力学进展 Vol. 13 No. 3
1983年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1983

低速物体的非线性水波理论综述

中国科学院力学研究所 陈嗣熊

一、问题的提出

虽然造船工程师们对低速船波的产生问题可能没有很大的兴趣，可是这一问题有其基本的重要性。在速度很低的情形，船波很小，因此，在船舶设计中可以不考虑低速波阻。当速度趋近于零时，通常在有限速度下预言波阻的方法与公式不再适用。也就是这些方法的数学解在低速时不是一致有效。因此，我们必须回答这样的问题：在多么低的速度时，这些标准方法不再适用？

研究低速问题的另一个实际理由，正如Inui与Kajitani[1]所发现的，如果船波被考虑为在绕流二重物体（未扰动自由表面以下的实际船体部分加上它的对未扰动自由表面的镜像）的非均匀流中传播，那么我们能预言的实际船波，将比在均匀流中考虑波的传播时更精确。而低速物体水波的分析将很自然地导致这种近似。正如Keller[2]指出的，根据他预言电磁现象的经验，他的射线理论也许能适用于Froude数小于0.7的低速情形。因此，对数学家们的“低速”，可能对造船工程师们来说，一点也不低。许多日本学者正是基于这种考虑，对低速船波理论作了大量的理论与实验研究。

在过去几十年间，许多作者讨论了由标准摄动法所获得的解的低速极限，但是，这些解是基于所有扰动速度较物体前进速度U渐近地小的假定。当$U\to 0$时，这一假定就变得不清楚了。

Salvesen[3]指出，他所考虑的二维沉体的特殊情形属于奇异摄动问题。开始时，他考虑了固定前进速度的问题。他以物体尺度对浸润深度之比作为小参数，把未知函数以此小参数展开，获得了三项显式解。最后考查当$U\to 0$时，展开式各项的行为。对于中等速度，第二项与第三项只对第一项线性解提供小的修正。然而，当U减小时，第二项将变得越来越大，直到它超过一阶项。当速度更低时三阶项开始超过二阶项。显然，速度越来越小，问题就变得越来越非线性。然而，从物理的观点看来，显然，当速度减小时，流体扰动将变得越来越小。这种明显的矛盾是由于当$U\to 0$时展开式不是一致有效所致。

从上所述，无论从理论上或者实际应用上，研究低速船波问题都是有其重要意义的。

二、问题的公式表达

为简单起见，我们考虑二维的情形（对于三维情形，我们有完全类似的公式）。设慢流流体流过二维物体，流体在物体的远前方以速度U在x方向流动。取x轴沿未扰自由表面，y轴通过物体内一点垂直向上。设物体的特征长度为L，把所有的长度用L来进行无量纲化。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

假定速度势为$UL\phi(x,y)$，这里$\phi(x,y)$为无量纲速度势。我们引入无量纲参数

$$\varepsilon=F^2=U^2/(gL) \tag{1}$$

这里F是Froude数，g为重力加速度，则ϕ满足以下方程：Laplace方程

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=0, \quad \text{在物体外流体中} \tag{2}$$

物体边界条件

$$\frac{\partial\phi}{\partial N}=0, \quad \text{在物体表面边界上} \tag{3}$$

这里N是物体表面上指向流体的单位法向量。自由表面动力学条件

$$H(x)=\frac{1}{2}\left\{1-\phi_x^2-\phi_y^2\right\}_{y=\varepsilon H(x)} \tag{4}$$

这里$\varepsilon H(x)$是自由表面的无量纲高度。由自由表面动力学条件与自由表面运动学条件消去自由表面高度所获得的自由表面条件为

$$\phi_y+\varepsilon\{\phi_x^2\phi_{xx}+2\phi_x\phi_y\phi_{xy}+\phi_y^2\phi_{yy}\}=0, \quad \text{在 } y=\varepsilon H(x) \text{ 上} \tag{5}$$

辐射条件为

$$|\phi-x|\to 0, \quad \text{当 } x\to-\infty \text{ 或 } y\to-\infty \text{ 时} \tag{6}$$

式(2)—(6)就是问题的数学表达式。可以看出，问题的主要困难在自由表面条件(5)。显然，条件(5)是非线性的，而且这非线性条件是在未知自由表面波高$y=\varepsilon H(x)$下。从式(5)看到，小参数ε出现在最高阶导数项的系数中，因此，问题对ε的展开是奇异摄动问题。这也就是通常在有限速度下预言波阻的方法与公式在速度趋近于零时均不适用的原因。

三、低速物体水波研究的发展

早在1964年，Joosen[4]就曾讨论过细长体理论的低速极限，但他并未获得重要的结果。Salvesen[3]在讨论三维沉体的高阶近似中，指出了当前进速度趋近于零时，展开式并不一致有效。这一问题引起了Ogilvie的注意。Ogilvie[5]为了获得一致有效的渐近展开，提出了一种解法。他把流场分成由不同的长度尺度来刻划的二部分。因为在非常慢的速度时自由表面几乎未受扰动，因此，第一部分也就是零级近似，应该导致二重体位势流，这部分流体流动可以用与物体尺度相比较的长度尺度来描述；第二部分描写波运动，它应以与波长可以相比较的长度来描述。由经典水波理论可知，波数$k=g/U^2$或波长$\lambda=2\pi/k=\alpha\pi U^2g$。因此，很自然引入$\varepsilon=F^2=U^2/(gL)$作为小参数。对解的波动部分，场变量的微分将改变量级，产生波数的因子，即产生$O(\varepsilon^{-1})$的因子。Ogilvie最终获得了一个非齐次线性自由表面条件。在这条件下，他求得了二维沉体情形的形式解。Dagan与Tulin[6]作出了类似于Ogilvie的讨论，但他们指出基本流动应包含"朴实"(naive)渐近展开式中的头二项，而不应仅包含第一项二重体的位势流。Baba与Takekuma[7]把Ogilvie的方法推广到三维浮体低速流的情形，他们获得了类似于二维情形的非齐次线性自由表面条件，并获得了三维问题的解与波阻公式。接着，Baba[8]，Baba与Hara[9]，Newman[10]，Maruo[11,12]进一步用Ogilvie的假定讨论了三维低速物体水波的问题。但所有这些讨论都基于非齐次线性自由表面条件，它等价于Ogilvie所获得的条件。可是，这一非齐次线性自由表条件的方程的左边是快速变化的函数，即波函数；而这一方程的右边是缓变函数。我们一般面无法使两边相等。而且，如果在左边波函数中引入任何慢变函数因子，我们可使左边保持不变，而右边的非齐次压力分布项

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

将改变，结果，我们可求得在相同的波势函数解的近似量级内，满足所有条件的不同的解，这说明波势函数的解并不唯一。因此，我们认为，正如 Keller[2] 所指出的，基本位势流动应包含“朴实”渐近展开式中更多的项，而波动部分解所满足的自由表面边界条件应该是齐次的。Keller 也对他们所获得的解析解用静止位相法对小F作进一步渐近展开，结果发现在他们的解中包含了不应有的多余的射线，这也说明了这些解并不正确。Keller[13] 首先用射线理论处理低速问题。Inui 与 Kajitani[1] 应用了 Ursell[14] 提出的方法处理了低速物体水波问题。它实际上与 Keller 的射线理论是等价的。Keller[2] 用射线理论的渐近展开式，更严格地导出了色散关系与波振幅沿射线的变化公式。他还把他的理论应用于薄船与流线型船。但是，Keller 所导出的波势函数满足 Laplace方程，齐次线性自由表面条件与齐次的物体边界条件。所有这些方程都是齐次的。因此，在波势函数最后的解中包含一个任意常数因子。但原始问题是适定的，应该有唯一的解。为此，Keller 引入了激励系数，但是，只有对非常简单的情形，例如薄船，才能求得这一系数。由此可见，射线理论可用来预言水波的传播，但由于波势函数所满足的所有条件都是齐次的，因此，在用它来预言水波的产生时，遇到了困难。我们必须另外考虑接近物体区域的近场解。由于速度势满足有自由表面条件的椭圆型方程，射线理论在用到近场区时并不奏效。这也是水波问题与一般波动问题的不同之处。因此，Keller 实际上找到了远场解，但并未找到近场解。只有通过近场区的讨论，我们才能回答波是怎样产生的，并通过近场解与远场解的匹配，最后确定未定激励常数。

四、“朴实”渐近展开与 Ogilvie 结果的讨论

为了回答低速时波的产生，我们首先必须研究“朴实”渐近展开式是否已满足了式（2）—（6）的所有条件。如果它能满足所有式（2）—（6）的条件，则它就是问题的解，没有必要再引入波势函数，也就是问题不存在产生波动的机制。因此，我们可以肯定“朴实”渐近展开式不能满足（2）—（6）的所有条件。其中必定有“朴实”渐近展开式不能满足的条件，必须引入波势函数后才能使所有条件都得到满足。这条件也就是波产生的机制。故现在我们首先来考察“朴实”渐近展开式。

假定函数 $\phi(x,y)$ 与 $H(x)$ 可以展开为 ε 的渐近级数：

$$\phi(x,y)=\overline{\phi}(x,y,\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\phi_n(x,y) \tag{7}$$

$$H(x)=\overline{H}(x,\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\eta_n(x) \tag{8}$$

把式（7），（8）代入式（2）—（6），并令 ε 各次幂的系数等于零，我们可以获得以下一系列方程：

Laplace 方程[L]　　$\phi_{nxx}+\phi_{nyy}=0(n=0,1,2,\cdots)$　在物体外，$y<0$　（9）

边界条件[B]　　$\dfrac{\partial\phi_n}{\partial N}=0(n=0,1,2,\cdots)$　在物体表面上　（10）

动力自由表面条件[H]　　$\eta_0(x)=\dfrac{1}{2}\{1-\phi_{0x}^2\}_{y=0}$　（11）

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\eta_1(x)=-(\phi_{0x}\phi_{1x})_{y=0} \tag{12}$$

$$\eta_2(x)=-\phi_{0x}\phi_{2x}-\frac{1}{2}\{\phi_{1x}^2+\phi_{1y}^2\}-\frac{1}{2}\{1-\phi_{0x}^2\}[\phi_{0x}\phi_{1xy}+\phi_{1y}\phi_{0yy}]$$

$$-\frac{1}{8}[1-\phi_{0x}^2]^2[\phi_{0x}\phi_{0xyy}+\phi_{0yy}^2],\quad 在\ y=0\ 点 \tag{13}$$

由合并运动学与动力学自由表面条件而得到的自由表面条件［F］

$$\phi_{0y}=0,\qquad 在\ y=0\ 点 \tag{14}$$

$$\phi_{1y}=\frac{1}{2}\phi_{0xx}\{1-3\phi_{0x}^2\}=\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\phi_{0x})=p_1'(x),\quad 在\ y=0\ 点 \tag{15}$$

$$\phi_{2y}=\frac{1}{2}\phi_{1xx}\{1-3\phi_{0x}^2\}-3\phi_{0x}\phi_{1x}\phi_{0xx}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\phi_{1x}+\eta_1\phi_{0x})=p_2'(x),\quad 在\ y=0\ 点 \tag{16}$$

辐射条件［R］

$$\left.\begin{array}{l}|\phi_0-x|\to 0 \quad (17)\\ |\phi_n|\ 0,n\geqslant 1 \quad (18)\end{array}\right\}x\to-\infty\ 或\ y\to-\infty$$

这里ϕ_0满足的是式（9）—(11)，(14)，(17)，就是我们所称的二重体位势流问题。显然，对于三维情形，我们可以有完全类似的结果。初看起来似乎“朴实”渐近展开式（7）已满足了所有的条件（2）—（6），并且经过仔细考查将发现，$\phi_n(n=0,1,2,\cdots)$ 并没有波的性质。我们已发现，ϕ_n在$x=x_0,y=0$点是奇点，这里x_0是x轴与物体后缘交点的横坐标。例如，对ϕ_0，在$x=x_0,y=0$点邻近，有$\phi_0=O(\zeta^4\ln\zeta)$，这里$\zeta=z-x_0$与$z=x+iy$；对于$\phi_1$，我们有$\phi_1=O(\zeta^2\ln\zeta)$等等。由式（4），我们知道实际的驻点位置在$x=x_0,y=\frac{1}{2}\varepsilon$。经过仔细考察后，发现展开式（7）并不能满足从$y=0$至$y=\frac{1}{2}\varepsilon$这一段物体表面上的边界条件。例如，假定物体在$x=x_0,y=0$附近对$x$轴对称，那么在式（7）中从$\phi_1$开始，便不能满足$y>0$的物体表面上的边界条件，对于$\phi_1$，我们获得以下结果：

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial N}=2yc(0)\phi_{0xx}(x_0,0)[1+O(\varepsilon)],\qquad y>0 \tag{19}$$

这里$c(0)$为物体表面在$x=x_0,y=0$点的曲率。由此可见，$\partial\phi_1/\partial N$在$y>0$的物体表面上一般并不等于零。因此，我们必须引入波势函数$\tilde\phi(x,y)$，使得整体解$\phi=\tilde\phi(x,y,\varepsilon)+\tilde\phi(x,y)$满足边界条件（3），也就是，我们应用$\tilde\phi$来抵消式（19）右边的值。

我们也曾对文献［5］中的对于二维沉体的结果进行了进一步的分析，文献［5］假定

$$\phi(x,y)=\phi_0(x,y)+\varepsilon^2\tilde\phi(x,y;\varepsilon) \tag{20}$$

$$H(x)=\eta_0(x)+\varepsilon\tilde H(x;\varepsilon) \tag{21}$$

这里$\tilde\phi$与$\tilde H$有性质

$$\tilde\phi_x,\tilde\phi_y=O(\tilde\phi/\varepsilon),\qquad \tilde H_x=O(\tilde H/\varepsilon) \tag{22}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

把式(20)—(22)代入自由表面条件（5），并由 ε 的一次幂的系数，可得

$$\varepsilon^2\widetilde{\phi}_y+\varepsilon^3\phi_{0x}^2\widetilde{\phi}_{xx}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\phi_{0x})=\varepsilon p_1'(x) \tag{23}$$

这里 ϕ_{0x} 在 $y=0$ 上取值；而 $\widetilde{\phi}_y$ 与 $\widetilde{\phi}_{xx}$ 都在 $y=\varepsilon\eta_0(x)$ 上取值。文献[5]已证明，条件（23）中的 $\widetilde{\phi}_y$ 与 $\widetilde{\phi}_{xx}$ 可改成在 $y=0$ 上取值，因此

$$\varepsilon^2\widetilde{\phi}_y+\varepsilon^3\phi_{0x}^2\widetilde{\phi}_{xx}=\varepsilon p_1'(x), \qquad \text{在 } y=0 \text{ 点} \tag{24}$$

这就是在低速物体水波的讨论中，人们广泛采用的非齐次线性自由表面条件。它很容易被推广到三维的情形。设

$$\widetilde{\phi}(x,y)=\mathrm{Re}\{\widetilde{F}(z)\} \tag{25}$$

这里 $\widetilde{F}(z)$ 为 z 的解析函数。对 ε 很小的情形，由于波动解随 y/ε 指数地衰减，因此，我们可以忽略沉体表面的边界条件。由式(24)，(25)，我们可得解

$$\widetilde{F}'(z)=-\frac{1}{\pi i\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}dsp_1'(s)\int_{-\infty}^{z}\frac{d\zeta k(\zeta)}{s-\zeta}\exp\{i[\theta(z)-\theta(\zeta)]\} \tag{26}$$

这里

$$k(z)=[f_0'(z)]^{-2} \tag{27}$$

$$\theta(z)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{z_1}^{z}k(u)du \tag{28}$$

z_1 为任何复常数，$\phi_0=\mathrm{Re}\{f_0(z)\}$。我们很易求得式（26）对 ε 的渐近展开式

$$\begin{aligned}\widetilde{F}'(z)=&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dsp_1'(s)}{s-z}+\frac{i\varepsilon}{\pi k(z)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dsp_1''(s)}{s-z}\\&-\frac{i\varepsilon\exp[i\theta(z)]}{\pi}\int_{-\infty}^{z}d\zeta\exp[-i\theta(\zeta)]\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s-\zeta}\left[\frac{p_1'''(s)}{k(\zeta)}\right.\\&\left.-\frac{p_1''(s)k'(\zeta)}{k^2(\zeta)}\right]\end{aligned} \tag{29}$$

我们还可续继展开下去。我们发现，最后式(29)中没有一项将显示波动性质。而且式（29）中的各项正好对应于“朴实”渐近展开式中的对应项（除了物体表面的边界条件外）。这说明对于低速沉体，波势函数是指数地减小。但对于浮体，由于自由表面与物体表面相交处的物体表面边界条件，式（29）中的每一项都显示波动运动。这说明了在低速时，沉体与浮体情形的绝然不同。

五、接近物体表面的近场解与匹配方法

我们曾曾用广义 WKB 方法求出了远场解。它等价于 Keller[2] 的几何光学近似。对于近场区，我们利用齐次边界条件（19）和驻点条件假定

$$\phi(x,y)=\overline{\phi}(x,y)+\varepsilon^7\widetilde{\phi}\{(x-x_0)/\varepsilon^5,[y-\varepsilon\overline{H}(x)]/\varepsilon^5;\varepsilon\}+\cdots \tag{30}$$

$$H(x)=\overline{H}(x)+\varepsilon^4\widetilde{H}[(x-x_0)/\varepsilon^5;\varepsilon]+\cdots \tag{31}$$

$$X=(x-x_0)/\varepsilon^5, \qquad Y=(y-\frac{1}{2}\varepsilon)/\varepsilon^5 \tag{32}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

把式(30)－(32)代到式(2)—(5)，我们可以得到

$$\tilde{\phi}_{XX}+\tilde{\phi}_{YY}=0, \quad \text{在流体中} \tag{33}$$

$$\tilde{\phi}_{Y}+c^{2}(0)\phi_{0xx}^{2}(x_0,0)\tilde{\phi}_{XX}=0, \quad \text{在} Y=0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial X}=(1+2\varepsilon^{4}Y)\,c(0)\phi_{0xx}(x_0,0), \quad \text{在物体上与} -1/(2\varepsilon^{4})\leqslant Y\leqslant 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial n}=0, \quad \text{在物体上与} Y<-1/(2\varepsilon^{4}) \tag{36}$$

通过对驻点的分析，可以得到附加条件

$$\tilde{\phi}_{Y}=\varepsilon^{3}c^{2}(0)\phi_{0xx}^{3}(x_0,0), \quad \text{在} X=0, Y=0 \tag{37}$$

用 Green 函数法可以求得问题(33)－(37)的解。用外部解和内部解匹配，我们可以最终确定外部解的未定常数。

对于三维情形，理论上我们完全可以把已有的讨论推广到三维情形。但是，对三维情形，求"朴实"渐近展开式中的零级与一级近似的解析解不如二维时那么简单。因此，至今还未获得如式(19)那样的非齐次边界条件。但是，可以肯定"朴实"渐近展开式在 $x=x_0$，$y=0$ 点是奇点，而且不能满足 $y>0$ 的物体表面上的边界条件，因此，也有类似于式(19)的非齐次条件。

参 考 文 献

1 Inui,T.,Kajitani,H.,Schiffstechnik,V.24(1977):178-213.
2 Keller,J.B.,J.Fluid Mech.,V.92(1979) 465-488.
3 Salvesen,N.,ibid,V38(1969).
4 Joosen,W.P.A.,5th Symp.on Naval Hydrodyn.(1964):167-183.
5 Ogilvie,T.F.,Report No,002,Dept.Naval Arch.&Marine Eng.Univ. of Michigan.
6 Dagan,G.,Tulin,M.P.,J.Fluid Mech.,V51(1972):529-543.
7 Baba,E.,Takekuma.K.,J.Soc.Naval Arch.Japan,V.137(1975).
8 Baba,E.,Misubishi Tech.Bull.,No.109(1976)1-20.
9 ---,et al,Nagasaki Tech.Inst.Mitsubishi Heavy Ind.(1978)
10 Newman,J.N.,Int.Sem.Wave Resistance,Tokyo(1976):31-43.
11 Maruo,H.,Bull.Faculty Eng.Yokohama Nat.Univ.,V.26(1977)
12 ---,ibid,V.29(1980):39-51.
13 Keller,J.B.,Proc.10th Symp.Naval Hydro.,Office Naval Res.Dept.Navy(1974):543-545.
14 Ursell,F.,J.Fluid Mech.,V.9(1960).

SURVEY OF NONLINEAR WATER WAVE THEORY OF SLOWLY-MOVING BODY

Chen Si-xiong

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net