第13卷 第2期 1983年5月25日
力学进展 ADVANCES IN MECHANICS
Vol. 13 No.2 May 25, 1983

建立动力学方程的新方法

〔美〕Stanford 大学 T.R.Kane

1. 前言

力学是一门可追溯到几百年以前的古老学科。在Newton之前，只有一些特殊问题，例如落体、天体的运动等被认识。Newton在前人工作的基础上发表了著名的运动三定律，奠定了经典力学的基础，但他仅触及质点的运动而未深入讨论刚体的转动问题。接着，Euler给出了刚体转动的一般规律。到了18世纪，随着微积分等数学工具的广泛应用，Lagrange提出了多自由度系统运动的一般方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \qquad (r=1,\ \cdots,\ n)$$

从而产生了分析力学，使力学问题可以完全用严格的分析方法来处理，力学遂发展成为理论严谨，体系完整的学科。然而，由于当时人们主要对天文学感兴趣，例如二体、三体问题等，并不需要解决自由度数n很大的情形，因而Lagrange方程的缺点并不为人们所注意。此后，很长一段时间，经典力学没有什么进展。

20世纪50年代以来，现代科学特别是航天技术的发展，要求解决n很大的多自由度力学问题，计算机的发展又为求解n很大情形的运动方程开辟了数值解的途径。对于n很大的多自由度力学问题，用Lagrange方法建立方程十分繁琐，必须寻找一种新方法以便能简明地建立多自由度力学系统的动力学方程。

2. 偏角速度和偏速度

设有一力学系统S，以n个广义坐标q_1，…，q_n表征其相对参考坐标系A的位置。定义$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_n$的线性组合为S相对A的广义速率（Generalized Speeds）u_1，…，u_n：

$$u_r=\sum_{s=1}^{n'} Y_{rs}(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ t)\ \dot{q}_s+Z_r(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ t) \quad (r=1,\ \cdots,\ n) \qquad (1)$$

其中Y_{rs}和Z_r的选择必须保证（1）的$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_n$有唯一解。

广义速率是一个新概念，Lagrange未提出过，它们和广义坐标一样，可以有不同的取法。因此系统S中的刚体的角速度及质点速度的表达式也可能有不同形式。例如火箭在平面A内作平面运动（图1），q_1，q_2，q_3为其相对A的广义坐标，（$a_1a_2a_3$）为固结于A的坐标系，（$c_1c_2c_3$）为固结于火箭的坐标系。设V为火箭质心O的速度，当广义速率取不同值时，表1给出V的不同表达式。显见，两种情形表达式中广义速率的系数矢量对应于不同的坐标。

表 1

	u_r	V
I	$u_1=\dot q_1$ $u_2=\dot q_2$ $u_3=\dot q_3$	$V=u_1a_1+u_2a_2$
II	$u_1=\dot q_1\cos q_3+\dot q_2\sin q_3$ $u_2=-\dot q_1\sin q_3+\dot q_2\cos q_3$ $u_3=\dot q_3$	$V=u_1c_1+u_2c_2$

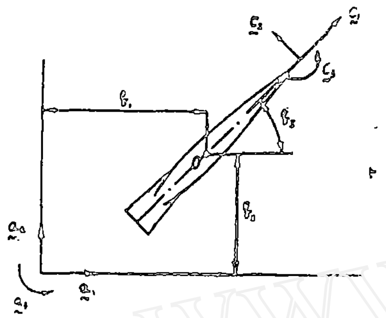

图 1

确定广义速率以后，系统S中的刚体B和质点P相对A的角速度ω和速度V可唯一表示为广义速率u_r的线性组合：

$$\omega=\sum_{r=1}^{n}\omega_r(q_1,\cdots,q_n,t)u_r+\omega_t(q_1,\cdots,q_n,t) \quad (2)$$

$$V=\sum_{r=1}^{n}V_r(q_1,\cdots,q_n,t)u_r+V_t(q_1,\cdots,q_n,t) \quad (3)$$

以上各线性组合的系数矢量ω_r和V_r定义为B相对A的第r个偏角速度（Partial Angulor Velocities）和质点P相对A的第r个偏速度(Partial Velocities)。对于图1的例子，O相对A的偏速度很容易从表1中V的表达式确定，即：

$V_1=a_1\quad V_2=a_2\quad V_3=0$ （情形 I）

$V_1=c_1\quad V_2=c_2\quad V_3=0$ （情形 II）

处理具体问题时，选择适当的广义速率可以使偏角速度和偏速度具有特别简单的形式。

3.广义主动力和广义惯性力

设S由N个质点P_i，…，P_N组成，令V_{ir}为P_i相对A的第r个偏速度，R_i为作用于P_i的接触力和体积力的合力，R_i^*为P_i相对A的惯性力（$R_i^*=-m_ia_i$，m_i和a_i分别为P_i的质量和相对A的加速度），则定义S相对A的广义主动力（Generalized Active Force）F_r和广义惯性力（Generalized Inertia Force）F_r^*分别为

$$F_r=\sum_{i=1}^{n}V_{ir}\cdot R_i \quad (r=1,\cdots,n) \quad (4)$$

$$F_r^*=\sum_{i=1}^{n}V_{ir}\cdot R_i^* \quad (r=1,\cdots,n) \quad (5)$$

若S中存在刚体B，则由式（4），（5）可推出B对应的广义主动力和广义惯性力表达式如下：

$$(F_r)_B=\omega_r\cdot T+V_r\cdot R \quad (r=1,\cdots,n) \quad (6)$$

$$(F_r^*)_B=\omega_r\cdot T^*+V_r\cdot R^* \quad (r=1,\cdots,n) \quad (7)$$

其中ω_r和V_r分别为B相对A的第r个偏角速度和B的质心B^*相对A的第r个偏速度；R和T分别

为作用于B^*的合力和对B^*点的合力矩，它们等于作用于B的所有接触力和体积力的合效应；R^*和T^*分别为作用于B^*的惯性力和B相对A的惯性力矩，它们等于组成B的所有质点受到的惯性力的合效应：

$$R_1^* = -M a^* \tag{8}$$

$$T^* = -\alpha\cdot I - \omega\times I\cdot\omega \tag{9}$$

以上两式中，M为B的质量，a^*为B^*相对于A的加速度，I为B的中心惯量张量，α和ω分别为B相对于A的角加速度和角速度。

引入广义主动力可以简化计算，某些在R_i中出现的力在计算F_r时可以不加考虑，因为这些力对F_r的合效应为零。例如系统S中各质点所受到的由刚体（不论是否属于S）光滑表面垂直作用的接触力的合力对F_r的效应为零；又如系统S中组成刚体的所有质点相互间所受到的引力及接触力对F_r的合效应也为零。这是采用广义主动力的主要优点。

当S相对于A的势能W容易写出时，S相对于A的广义主动力也可表示为

$$F_r = -\frac{\partial W}{\partial q_r} \quad (r=1,\cdots,n) \tag{10}$$

当S的一个子集是由刚体C载一旋转的轴对称转子D构成的陀螺体G时（图2），若设C与相对于C静止的D构成的系统为R，则G相对应的广义惯性力可表示为

$$(F_r^*)_G = (F_r^*)_R + (F_r^*)_I \quad (r=1,\cdots,n) \tag{11}$$

其中$(F_r^*)_R$可由式(7)方便地求得，$(F_r^*)_I$有两种形式，取决于D相对于C的运动。若D相对于C的运动已知，则

$$(F_r^*)_I = J\left[\Omega(-\omega_2 C_1 + \omega_1 C_2) - \dot{\Omega} C_3\right]\cdot\omega_r \quad (r=1,\cdots,n) \tag{12}$$

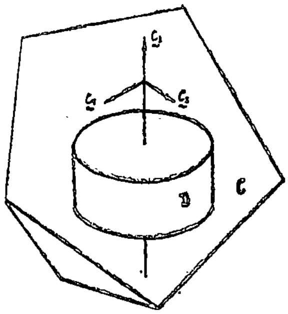

图2 陀螺体G

其中C_1，C_2，C_3为固结于C的一组右旋正交单位矢量，C_3平行于D的旋转轴，J为D的极惯量矩，$\Omega = {}^C\omega^D\cdot C_3$，$\omega_i = {}^A\omega^C\cdot C_i$（$i=1,2,3$），$\omega_r$是$C$相对于$A$的第$r$个偏角速度。若$D$相对于$C$的旋转是独立的话，则可定义$u_n = {}^C\omega^D\cdot C_3$为$G$相对于$A$的第$n$个广义速率，于是

$$\left.\begin{aligned}(F_r^*)_I &= J\left[u_n(-\omega_2 C_1 + \omega_1 C_2) - \dot{u}_n C_3\right]\cdot\omega_r \quad (r=1,\cdots,n-1)\\ (F_n^*)_I &= -J(\dot{\omega}_3 + \dot{u}_n)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

4．动力学方程

引入以上概念之后，即可用新方法建立动力学方程。设A为固结于惯性空间的坐标系，A中给出一个由广义坐标$q_1,\cdots,q_n$所表征的n个自由度系统S，$u_1,\cdots,u_n$为S相对于A的广义速率，其相对应的广义主动力和广义惯性力分别为$F_1,\cdots,F_n$和$F_1^*,\cdots,F_n^*$，则S的全部运动受下列动力学方程控制：

$$F_r + F_r^* = 0 \quad (r=1,\cdots,n) \tag{14}$$

证明如下：设系统S由质点$P_1,\cdots,P_N$（质量分别为$m_1,\cdots,m_N$）组成，R_i为所有作用于P_i上的接触力和体积力的合力，$R_i^* = -m_i a_i$（a_i为P_i相对A的加速度）为作用于P_i上的惯性力，根据达朗贝原理有

$$R_i + R_i^* = 0 \quad (i=1,\cdots,N) \tag{15}$$

以P_i相对于A的第r个偏速度V_{ir}点乘式（15），得

$$\mathrm{V}_{ir}\circ\mathrm{R}_i+\mathrm{V}_{ir}\circ\mathrm{R}_i^{*}=0 \quad (r=1, \cdots, n;\ i=1, \cdots, N) \tag{16}$$

对S的所有质点求和，得

$$\sum_{i=1}^{N}\mathrm{V}_{ir}\circ\mathrm{R}_i+\sum_{i=1}^{N}\mathrm{V}_{ir}\circ\mathrm{R}_i^{*}=0 \quad (r=1, \cdots, n) \tag{17}$$

以式（4），（5）代入式（17）即得动力学方程（14）。

当取$u_r=\dot{q}_r$（$r=1, \cdots, n$）时，S相对于A的广义惯性力可表示为如下形式：

$$F_r^{*}=\frac{\partial K}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_r}\right) \quad (r=1, \cdots, n) \tag{18}$$

其中K为系统S的动能。以式（10），（18）代入方程（14），得

$$\frac{\partial K}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_r}\right)=\frac{\partial W}{\partial q_r} \quad (r=1, \cdots, n) \tag{19}$$

这是Lagrange方程的一种形式。显而易见，Lagrange方程仅为方程（14）的一种特殊情形。

当$F_r^{*}=0$时，方程（14）变为$F_r=0$，此式可以方便地求解静力学问题。

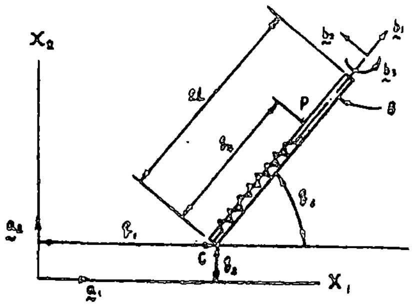

图 3

5．计算举例

图 3 给出一个由均匀细长杆B（长为$2L$，质量为m）和质点P（质量为m）组成的系统S。S在惯性空间作平面运动，A（X_1，X_2）为固结于此平面的直角坐标系。P可以在B上滑动，通过弹簧（原长为L_0，刚度系数为k）与B的一端C相联结。如图 3 取q_1，…，q_4为S相对A的广义坐标，定义S相对于A的广义速率u_1，…，u_4为

$$\left.\begin{aligned}
u_1&=\mathrm{V}^{B^*}\circ\mathrm{b}_1=\dot{q}_1\cos q_3+\dot{q}_2\sin q_3\\
u_2&=\mathrm{V}^{B^*}\circ\mathrm{b}_2=-\dot{q}_1\sin q_3+\dot{q}_2\cos q_3+\dot{q}_3L\\
u_3&=\omega\circ\mathrm{b}_3=\dot{q}_3, \qquad u_4=\dot{q}_4
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中B^*为B的质心，ω为B的角速度，b_1，b_1，b_3为图 3 表明的平位矢量．则有

$$\mathrm{V}^{B^*}=u_1\mathrm{b}_1+u_2\mathrm{b}_2 \tag{21}$$

$$\mathrm{V}^{P}=(u_1+u_4)\mathrm{b}_1+[u_2+(q_4-L)u_3]\mathrm{b}_2 \tag{22}$$

$$\omega=u_3\mathrm{b}_3 \tag{23}$$

由式(21)—(23) 可求得S相对于A的各偏角速度与偏速度（表2）．

B^*和P相对于A的加速度可通过对V^{B^*}和V^{P}微分求得：

$$\mathrm{a}^{B^*}=(\dot{u}_1-u_2u_3)\mathrm{b}_1+(\dot{u}_2+u_3u_1)\mathrm{b}_2 \tag{24}$$

$$a^{P} = \{\dot{u}_1 + \dot{u}_4 - u_3[u_2 + (q_4 - L)u_3]\} b_1 + [\dot{u}_2 + 2u_4u_3 + (q_4 - L)\dot{u}_3 + u_3u_1]b_2 \tag{25}$$

表2 偏角速度与偏速度

r	ωr	$V_r^{B^*}$	V_r^{P}
1	0	b_1	b_1
2	0	b_2	b_2
3	b_3	0	$(q_4-L)b_2$
4	0	0	b_1

B相对于A的角加速度为

$$\alpha = \dot{u}_3 b_3 \tag{26}$$

以式(24)，(26)代入式(9)，得B相对于A的惯性力矩

$$T^* = -(mL^2/3)\dot{u}_3 b_3 \tag{27}$$

由式(5)，(7)，(8)可得

$$F_r^* = -mV_r^{P}\cdot a^{P} + \omega\cdot T^* - mV^{B^*}\cdot a^{B^*} \quad (r=1, \cdots, 4) \tag{28}$$

以表2及式(24)，(25)，(27)代入式(28)，可求得u_1，…，u_4对应的广义惯性力

$$\left.\begin{aligned}
F_1^* &= -m\{2\dot{u}_1 + \dot{u}_4 - u_3[2u_2 + (q_4 - L)u_3]\}\\
F_2^* &= -m[2\dot{u}_2 + 2u_4u_3 + (q_4 - L)\dot{u}_3 - 2u_3u_1]\\
F_3^* &= -m(q_4 - L)[\dot{u}_2 + 2u_4u_3 + (q_4 - L)\dot{u}_3 + u_3u_1] - (mL^2/3)\dot{u}_3\\
F_4^* &= -m\{\dot{u}_1 + \dot{u}_4 - u_3[u_2 + (q_4 - L)u_3]\}
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

P和B^*所受到的唯一主动力是弹簧的恢复力

$$R^{P} = -k(q_4 - L_0)b_1 \tag{30}$$

$$R^{B^*} = k(q_4 - L_0)b_1 \tag{31}$$

以表2和式(27)，(28)代入式(4)，求得u_1，…，u_4对应的广义主动力

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0 \qquad F_4 = -k(q_4 - L_0) \tag{32}$$

以式(29)，(32)代入方程(14)，即求得S的动力学方程如下：

$$\left.\begin{aligned}
&2\dot{u}_1 + \dot{u}_4 - u_3[2u_2 + (q_4 - L)u_3] = 0\\
&2\dot{u}_2 + (q_4 - L)\dot{u}_3 + 2u_4u_3 - 2u_3u_1 = 0\\
&(q_4 - L)\dot{u}_2 + (q_4^2 - 2q_4L + 4L^2/3)\dot{u}_3 + (q_4 - L)(2u_4u_3 + u_3u_1) = 0\\
&\dot{u}_1 + \dot{u}_4 - u_3[u_2 + (q_4 - L)u_3] + (k/m)(q_4 - L_0) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

图3系统S的运动方程也可用Lagrange方法表示如下：

$$\left.\begin{aligned}
&2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_4\cos q_3 - 2\dot{q}_4\dot{q}_3\sin q_3 - (L + q_4)(\ddot{q}_3\sin q_3 + \dot{q}_3^2\cos q_3) = 0\\
&2\ddot{q}_2 + \ddot{q}_4\sin q_3 + 2\dot{q}_4\dot{q}_3\cos q_3 + (L + q_4)(\ddot{q}_3\cos q_3 - \dot{q}_3^2\sin q_3) = 0\\
&(L + q_4)(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1\sin q_3) + (4L^2/3 + q_4^2)\ddot{q}_3 + 2\dot{q}_3\dot{q}_4q_4 = 0\\
&\ddot{q}_4 + \dot{q}_1\cos q_3 + \dot{q}_2\sin q_3 - \dot{q}_3^2q_4 + (k/m)(q_4 - L_0) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

比较方程（33）和（34），显而易见新方法建立的方程（33）具有如下优点：一是形式简短且无三角函数；二是耦合程度小，即式（33）的每个方程中仅包含二个广义速率的导数，而式（34）的每个方程中包含三个广义坐标的二阶导数。

6. 新方法的特点

新方法不同于Newton定律、Euler方程和Lagrange方程，它具有自己的特点。

首先，新方法涉及的范围较大。如前所述，Lagrange方程仅是本方法动力学方程（14）取$u_r=\dot{q}_r$（$r=1, \cdots, n$）的特殊情形。同样，Euler方程亦是方程（14）的一种特殊情形，只要在解刚体定点转动问题时取刚体的三个角速度分量作为广义速率即可。

其次，新方法不需要象Lagrange方程那样求动能和势能，也不象一般隔离法那样需要求出所有的约束力，因此建立方程相应化费的劳动要少，特别对于自由度数较大的多自由度系统具有更明显的优越性。另外，适当地选择广义速率，可以使建立的方程形式简单以便于计算，第5节方程（33）和（34）的对比清楚地说明了这一点。

再次，新方法适用面较广，除了离散多自由度系统外，还可结合有限元法建立由部分或全部弹性部件组成的复杂航天器系统（例如带天线的卫星、空间自由桁架等）的动力学方程。新方法还可解决碰撞问题，非完整系统问题（不需要Lagrange乘子）等。

最后，由于新方法计算步骤程式化，以及所求的广义主动力和广义惯性力具有叠加性，可以借助于计算机完成微分、点乘、变换等运算，直接用计算机语言写出文字运动方程，目前几种有效的程序如FORMAC，SYMBAL，MACSYMA，REDUCE 2等就是为此目的而产生的。当系统的自由度数n较大时，求解运动方程的有效手段是数值积分，新方法很容易写成数值积分所要求的形式

$$X\dot{U}=Y \tag{35}$$

其中$\dot{U}$是以广义速率一阶导数为元素的$n\times1$矩阵，矩阵$X(n\times n)$，$Y(n\times1)$很容易由上述计算机程序求得。将所得X，Y输入数值积分程序即可求解。这样，由建立运动方程到求出数值解均可利用计算机完成。对于带重复性环节的力学系统，建立文字运动方程程序利用计算机求解显得格外有益。例如研究带机械手的航天飞机运动时，总要分析机械手关节数为2，3或更多等几种不同情形，只要在编写程序时用n代表关节数，计算时将实际数字代入将程序运行多次即可。

参考文献

1. Kane, T. R., Complex Spacecraft, 上海交通大学讲学稿（1981, 5）.
2. Kane, T. R., New method to solve mechanical problems, 上海科学会堂报告（1981, 5, 20）.
3. Kane, T. R., Levinson, D. A., Formulation of equations of motion for complex spacecraft, J. of Guidance and Control, V. 3, 2 (1980).
4. Kane, T. R., Levinson, D. A., Large motions of unrestrained space trusses, J. of the Astronautical Science, V. 18, 1 (1980).

（杨海兴摘译整理　刘延柱校）