第13卷 第2期
1983年5月25日

力学进展
ADVANCES IN MECHANICS

Vol. 13 No 2
May 25, 1983

稳定性分析数值方法综述*

香港大学 李毓湘 葛时俊

本文综述了流体动力学稳定性分析中所使用过的数值方法，每种方法都通过文献中举出的一个典型例子作了说明．努力了解近代稳定性计算中所采用的各种数值方法，并汇总在附录Ⅱ中。对与无粘问题有关的各种困难作了解释．还讨论了 Navier-Stokes 方程作为初值问题的直接解法。

3.1 粘性流动的数值方法

从广泛的文献综述中可以看到如下的数值方法：

a）打靶法或匹配法 首先确定一个边界点处满足边界条件的一些独立特解，通解是这些特解的线性组合．特征值则由要求在另一个边界点处也满足齐次边界条件来确定．换句话说，两组无关的解（每一组解都在一个边界点处满足边界条件）在自变量域的中间点处匹配。

b）有限差分法 用一组节点来代替连续域，在每个节点处微分方程用差分方程来近似。

c）Galerkin 法 解用一组分别满足边界条件的基函数的线性组合来近似．近似解通过要求所求解微分方程中的误差与每一基函数互不相关来确定．

d）Ritz法 边值问题由等价的变分问题来代替．与 Galerkin 法类似，泛函由基函数的组合来近似，然后得此泛函对近似解中的未知系数求极小．

e）幂级数法 除了特解可用其系数通过递推公式计算的幂级数形式来寻求之外，此方法类似于打靶法．通解中的常数由边界条件确定．本方法在边界条件难以利用时采用．

f）Galerkin-Fourier 级数法 本方法通常在含有两个未知量两个微分方程的问题中采用．将其中一个因变量展为一组满足相应边界条件的正交函数，通过其中一个微分方程用解析方法求出另一未知量的精确解．应用Galerkin准则，通过要求两个未知量的解也满足余下的微分方程来确定展开式中的常数。

g）Fourier级数法 将解展为Fourier级数．为了满足边界条件，要构造一些辅助函数，这些辅助函数通常取为多项式形式．本方法适用于含有全部是偶数阶或全部是奇数阶导数的常系数微分方程。

在稳定性分析中也常常采用WKB方法．但由于这个方法很难归入数值方法这一类，这里就不考虑它了．

3.1.1 打靶法 Roberts（*1965*）研究了半径为R_1和R_2（$>R_1$），分别以角速度Ω_1和Ω_2旋转的两个同轴圆筒间的粘性流动的稳定性．只考虑轴对称扰动时，流动的稳定性由以下的无量纲方程组控制：

*本文原文是香港大学机械工程系葛时俊博士指导的李毓湘的博士论文的第3章，其主要内容在这次调研会上作了报告．译出时章节和方程的编号未作改变．文中提到的附录Ⅰ，Ⅱ（文献汇编），Ⅲ均略去未译．——译者

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(DD_{\circ}-k^2-C)(DD_{\circ}-k^2)\ u=-k^2T\left(\frac{1}{r^2}-1\right)v \tag{3.1}$$

$$(DD_{\circ}-k^2-C)\ v=u \tag{3.2}$$

这里$D=\frac{d}{dr}$，$D_{\circ}=\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}$，$u=u(r)$和 $v=v(r)$是扰动速度的径向和周向分量的幅值，T是Taylor 数，k是轴向波数，C是待定的特征值。边界条件是：

$$u=v=Du=0，在r=R_1/R_2处 \tag{3.3a}$$

$$u=v=Du=0，在r=1处 \tag{3.3b}$$

特征值问题通过形成分别满足条件(3.3a)的三个无关解（u_1，v_1），(u_2，v_2）和（u_3，v_3）的一个基本解求解。例如，这样的解可定义为

$$\left.\begin{array}{ll} u_1=v_1=Du_1=D^2u_1=D^3u_1=0, & Dv_1=1 \\ u_2=v_2=Du_2=Dv_2=D^3u_2=0, & D^2u_2=1 \\ u_3=v_3=Du_3=Dv_3=D^2u_3=0, & D^3u_3=1 \end{array}\right\}在r=R_1/R_2处 \tag{3.4}$$

此问题的通解是

$$u=A_1u_1+A_2u_2+A_3u_3，\ v=A_1v_1+A_2v_2+A_3v_3 \tag{3.5a}$$

为了满足条件（3.3b），要求在$r=1$处行列式

$$\triangle=\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & Du_1 \\ u_2 & v_2 & Du_2 \\ u_3 & v_3 & Du_3 \end{vmatrix}=0，在r=1处 \tag{3.5b}$$

于是此方法是在$r=1$处就许多T值来计算△，一直做到条件（3.5b）被满足时为止。因此T可作为C和k的函数来确定。换句话说，在一个边界点处的未知边界条件是不断改变的，直至在另一边界点处的边界条件被满足为止。

几种数值向前差分格式中的任何一种都可以用来计算函数（u_1，v_1），（u_2，v_2）和（u_3，v_3）。但向前差分格式常常由于数值不稳定性而失败，因而必须采用某些稳定格式。通常所用的格式是 Gram-Schmidt 正交化方法〔Bellman & Kalaba（*1965*）*p*。*98*〕和Kaplan滤波方法〔Kaplan（*1964*）〕。如果微分方程是二阶的，那么不变量嵌入的方法是有用的〔Scott（*1973*）〕。Davey（*1973*b）所提供的简单而稳定的格式见附录Ⅰ。

3.1.2 Galerkin 法 Grosh & Salwen（*1968*）研究了位于$y=\pm h/2$处的两个无限水平面间的定常流动和非定常流动。扰动流函数$\phi=\phi(y,t)$的振幅所满足的无量纲形式微分方程为

$$L\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\left\{\mathrm{Re}^{-1}L^2+i\alpha\left[\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-UL\right]\right\}\phi\equiv\bar{L}\phi \tag{3.6}$$

这里α是在流体流动方向的波数，$\mathrm{Re}=Uh/\nu$是雷诺数，$L=(\partial^2/\partial y^2)-\alpha^2$

定常流的基本流动速度剖面是

$$U=1-4y^2 \tag{3.7}$$

而形为

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\left(-\frac{8}{Re}\right)\left[1-\varepsilon\cos(\omega t)\right] \tag{3.8}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的压力梯度调制所产生的速度场是

$$U = 1 - 4y^2 - 4\varepsilon a^{-2}\sin(\omega t) + 4\varepsilon a^{-2}(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$$
$$\cdot \{[x_1\cos(ay)\cosh(ay) + x_2\sin(ay)\sinh(ay)\sin(\omega t)$$
$$+ [x_2\cos(ay)\cosh(ay) - x_1\sin(ay)\sinh(ay)\cos(\omega t)]\} \tag{3.9}$$

这里$a^2 = (1/2)\omega\mathrm{Re}$，$x_1 = \cos(a/2)\cosh(a/2)$，$x_2 = \sin(a/2)\sinh(a/2)$，边界条件是

$$\phi = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{，在} y = \pm\frac{h}{2}\text{处} \tag{3.10}$$

基函数选为一组特征函数，这组特征函数是问题

$$L^2G = \lambda^4 G, \qquad G(\pm 1/2) = G'(\pm 1/2) = 0 \tag{3.11}$$

的解，由于（3.11）的对称性，特征函数或是y的偶函数或是y的奇函数。对应于偶特征函数的特征值λ_n满足方程

$$\beta_n\tanh(\tfrac{1}{2}\beta_n) + \gamma_n\tan(\tfrac{1}{2}\gamma_n) = 0 \tag{3.12}$$

这里 $\beta_n = (\lambda_n^2 + \alpha^2)^{1/2}$，$\gamma_n = (\lambda_n^2 - \alpha^2)^{1/2}$。其对应的特征函数是

$$E_n(y) = \bar{e}_n\left[\frac{\cosh(\beta_n y)}{\cosh(\frac{1}{2}\beta_n)} - \frac{\cos(\gamma_n y)}{\cos(\frac{1}{2}\gamma_n)}\right] \tag{3.13}$$

这里$\bar{e}_n$是规范化常数，选取$\bar{e}_n$使得

$$\langle E_n, E_m\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} E_n(y)E_m(y)\,dy = \delta_{nm} \qquad \begin{cases}\delta_{nm} = 1, & n = m\text{时}\\ \delta_{nm} = 0, & n \neq m\text{时}\end{cases}$$

对应于奇特征函数的特征值满足方程

$$\xi_n\coth(\tfrac{1}{2}\xi_n) - \eta_n\cot(\tfrac{1}{2}\eta_n) = 0 \tag{3.14}$$

这里$\xi_n = (\mu_n^2 + \alpha^2)^{1/2}$，$\eta_n = (\mu_n^2 - \alpha^2)^{1/2}$。其对应的特征函数是

$$F_n(y) = \bar{f}_n\left[\frac{\sinh(\xi_n y)}{\sinh(\frac{1}{2}\xi_n)} - \frac{\sin(\eta_n y)}{\sin(\frac{1}{2}\eta_n)}\right] \tag{3.15}$$

这里 $\bar{f}_n$ 是规范化常数。

假设ϕ可以用正交展开函数展成一级数

$$\phi(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(t)E_n(y) + b_n(t)F_n(y)\right\} \tag{3.16}$$

现取基函数$E_r(y)$与（3.6）的内积

$$\left\langle E_r, L\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right\rangle = \left\langle E_r, \bar{L}\phi\right\rangle \tag{3.17}$$

分部积分后，（3.17）的左端是

$$\left\langle E_r, L\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\left\langle LE_r, E_n\right\rangle\frac{da_n}{dt} \tag{3.18}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其右端是

$$\left\langle E_r, \overline{L}\phi \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\mathrm{Re}^{-1} D_{rn}^{(1)} + i\alpha S_{rn}^{(1)} \right] a_n + i\alpha G_{rn}^{(2)} b_n \right\} \tag{3.19}$$

这里 $$D_{rn}^{(1)} = \left\langle L^2 E_r, E_n \right\rangle = \lambda_r^4 \delta_{rn} \tag{3.20a}$$

$$S_{rn}^{(1)} = \left\langle \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} E_r, E_n \right\rangle - \left\langle L(UE_r), E_n \right\rangle \tag{3.20b}$$

$$G_{rn}^{(2)} = \left\langle \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} E_r, F_n \right\rangle - \langle L(UE_r), F_n \rangle \tag{3.20c}$$

因而 $$\sum_{n=1}^{\infty} \langle LE_r, E_n \rangle \frac{da_n}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\mathrm{Re}^{-1} D_{rn}^{(1)} + i\alpha S_{rn}^{(1)} \right] a_n + i\alpha G_{rn}^{(2)} b_n \right\} \tag{3.21}$$

用类似的方法，取F_r与（3.6）的内积，得到如下的结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle LF_r, F_n \right\rangle \frac{db_n}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ i\alpha S_{rn}^{(2)} a_n + \left[\mathrm{Re}^{-1} D_{rn}^{(2)} + i\alpha G_{rn}^{(1)} \right] b_n \right\} \tag{3.22}$$

其中 $$D_{rn}^{(2)} = \left\langle L^2 F_r, F_n \right\rangle = \mu_r^4 \delta_{rn} \tag{3.23a}$$

$$G_{rn}^{(1)} = \left\langle \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} F_r, F_n \right\rangle - \langle L(UF_r), F_n \rangle \tag{3.23b}$$

$$S_{rn}^{(2)} = \left\langle \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} F_r, E_n \right\rangle - \langle L(UF_r), E_n \rangle \tag{3.23c}$$

由于ϕ的展式的系数与时间有关，所以截去展式中第N项以后的项，就会使稳定性问题化为一组$2N$个一阶线性微分方程，而（3.21）和（3.22）可以用矩阵形式写为

$$\hat{E} \frac{dA}{dt} = \left[\mathrm{Re}^{-1} D^{(1)} + i\alpha S^{(1)} \right] A + i\alpha G^{(2)} B \tag{3.24}$$

$$\hat{F} \frac{dB}{dt} = i\alpha S^{(2)} A + \left[\mathrm{Re}^{-1} D^{(2)} + i\alpha G^{(1)} \right] B \tag{3.25}$$

这里A和B是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的列向量；$D^{(1)}$，$D^{(2)}$，$S^{(1)}$，$S^{(2)}$，$G^{(1)}$和$G^{(2)}$是（$N \times N$）矩阵，其元素是$D_{rn}^{(1)}$，$D_{rn}^{(2)}$等等；且有

$$\left[\hat{E} \right]_{rn} = \langle LE_r, E_n \rangle, \quad \left[\hat{F} \right]_{rn} = \langle LF_r, F_n \rangle \tag{3.26}$$

分别乘以$\hat{E}^{-1}$和$\hat{F}^{-1}$后，方程（3.24）和（3.25）可写为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & J \\ K & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这里$F=\hat{E}^{-1}\left(\mathrm{Re}^{-}D^{1(1)}+i\alpha S^{(1)}\right)$ (3.28a)

$$J=\hat{E}^{-1}\left(i\alpha G^{(2)}\right) \tag{3.28b}$$

$$K=\hat{F}^{-1}\left(i\alpha S^{(2)}\right) \tag{3.28c}$$

$$G=\hat{F}^{-1}\left[\mathrm{Re}^{-1}D^{(2)}+i\alpha G^{(1)}\right] \tag{3.28d}$$

如果方程（3.27）中的系数矩阵是周期性的，那么按Floquet理论〔Coddington & Levinson（1955），p. 78〕，就存在一个基本解矩阵$W(t)$，它是

$$\frac{dW}{dt}=\begin{pmatrix}F & J\\ K & G\end{pmatrix}W \tag{3.29}$$

$$W(0)=I \tag{3.30}$$

的解；这里I是单位矩阵，而W具有如下形式：

$$W(t)=P(t)\exp(tQ) \tag{3.31}$$

这里P是一个周期的非奇异矩阵，其周期与系数矩阵相同。而Q是一个常数矩阵，Q的特征值可以通过从$t=0$到$t=2\pi/\omega$对方程（3.29）积分求得。于是

$$W\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=P\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\exp\left(\frac{2\pi}{\omega}Q\right)=P(0)\exp\left(\frac{2\pi}{\omega}Q\right) \tag{3.32}$$

如果$\{\varepsilon_j\}$（$j=1, 2, 3, \cdots, N$）是$W(2\pi/\omega)$的特征值，则Q的特征值$\{\sigma_j\}$是

$$\sigma_j=L_n(\varepsilon_j)/(2\pi/\omega) \tag{3.33}$$

稳定性特征由σ_j的实部决定。

Dolph & Lewis（1958）早就将此方法应用于上面考虑过的同样问题，其结果是不能令人满意的。他们采用了八个展开函数，得到的结果和以前的工作很不一致。这与应用于Couette流动不大相同，在应用于Couette流动时，Di Prima（1955）仅用三项就得到相当好的结果。这是因为有“内摩擦层”〔Lin（1955）〕存在，当不稳定性是由粘性作用产生时，此内摩擦层引起了特征函数迅速振荡的缘故。在Couette流动中，不稳定性可能是由于离心力作用而产生的。因而用一个几项的近似试算函数来处理是适宜的。Grosch & Salwen在展开式中采用20至50项就能得到精确的结果，所需项数随乘积$\alpha\mathrm{Re}$的增加而增加。

3.1.3 有限差分法 Yang & Yih（1977）研究了圆管中时间周期流动相对于轴对称扰动的稳定性。无量纲形式的基本流动由

$$W=e^{i\omega t}W_1(r),\ W_1=\frac{1}{i\omega}\left[1-\frac{J_0(\beta_r)}{J_0(\beta)}\right] \tag{3.34}$$

的实部给出，其中$\beta=[-i\omega\mathrm{Re}]^{1/2}$，Re是雷诺数，$J_0$是贝塞尔函数，$\omega$是周期压力梯度的圆频率。

基本流动的稳定性取决于扰动流函数的振幅$\phi=\phi(r, t)$的方程

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikW\right)L\phi-ik\left(W''-\frac{W'}{r}\right)\phi\right]=L^2\phi \tag{3.35}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这里W上的一撇表示$\frac{\partial}{\partial r}$，$L=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}-k^2$，$k$是轴向的波数。边界条件是

$$\phi(0)=\phi''(0)=0,\ \phi(1)=\phi'(1)=0 \tag{3.36}$$

四阶微分方程（3.35）可以改写为两个二阶微分方程：

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{Re}}L\xi-ikW\xi+ik\left(W''-\frac{W'}{r}\right)\phi \tag{3.37}$$

$$\xi=L\phi \tag{3.38}$$

通过离散表示式$\phi_i(t)=\phi(r_i,\ t)$和$\xi_i(t)=\xi(r_i,\ t)$，采用矩阵记法，以$[\widetilde{0}\,I\,\widetilde{0}]$表示$I$的左右各加一列$n$个0的加边矩阵，则方程（3.37）和（3.38）的有限差分近似式具有如下的形式：

$$[\widetilde{0}\,I\,\widetilde{0}]\,\widetilde{\xi}=\frac{1}{\mathrm{Re}h^2}[\widetilde{q}_0\,A\,\widetilde{q}_{n+1}]\,\widetilde{\xi}-ik\,[\widetilde{0}\,D^{(1)}\,\widetilde{0}]\,\widetilde{\xi}+ikD^{(2)}\widetilde{\phi} \tag{3.39}$$

$$\widetilde{\xi}=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}\widetilde{g}_0\\ A\\ \widetilde{g}_{n+1}\end{pmatrix}\widetilde{\phi} \tag{3.40}$$

这里$h=1/(n+1)$是r方向的网格尺寸，I是单位矩阵。A是$n\times n$三对角线矩阵，$D^{(1)}$和$D^{(2)}$是$n\times n$对角线矩阵。A的元素太多，这里不能具体写出，但它可以通过直接写出方程（3.37）和（3.38）的有限差分形式而得到。矩阵$D^{(1)}$和$D^{(2)}$的（m，n）元素是

$$D^{(1)}_{mn}+W_m\delta_{nm},\qquad D^{(2)}_{mn}=V_m\delta_{nm} \tag{3.41}$$

这里δ_{nm}是Kronecker符号，$V_m=W''(r_m,\ t)-W'(r_m,\ t)r_m$

方程（3.39）和（3.40）中的向量说明如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{0}=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}, && n\text{列}\\
&\widetilde{q}_0=(1/2,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}, && n\text{列}\\
&\widetilde{q}_{n+1}=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 2+\frac{1}{n})^{\mathrm{T}}, && n\text{列}\\
&\widetilde{g}_0=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0), && n\text{行}\\
&\widetilde{g}_{n+1}=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1), && n\text{行}\\
&\widetilde{\xi}=(\xi_0,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_{n+1})^{\mathrm{T}}, && n+2\text{列}\\
&\widetilde{\phi}=(\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_n)^{\mathrm{T}}, && n\text{列}
\end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

因为没有应用边界条件，方程组(3.39)的未知数比方程的个数多2个。而应用了(3.36)

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

中的4个边界条件，方程组（3.40）的方程个数比未知数个数多2个．将方程（3.40）代入（3.39），得到

$$A\widetilde{\phi}=(B-iD)\widetilde{\phi} \tag{3.43}$$

这里$B=(\mathrm{Re}h^2)^{-1}(AA+\widetilde{q}_{n+1}\widetilde{g}_{n+1})$，$D=k(D^{(1)}A-h^2D^{(2)})$．

将A转置，则上述方程可以化为具有周期性系数的一阶常微分方程组的标准形式，因而可用上节所叙述的Floquet理论求解．为了保持矩阵的稀疏性，必须直接处理方程（3.43）．令$\widetilde{\phi}_m=\widetilde{\phi}(m\triangle t)$，这里$m$是整数，$\triangle t$是时间增量．则方程（3.43）可以用中心差分来近似：

$$(\triangle t)^{-1}A(\widetilde{\phi}_{m+1}-\widetilde{\phi}_m)=(B-iD_{m+\frac{1}{2}})\tfrac{1}{2}(\widetilde{\phi}_{m+1}+\widetilde{\phi}_m) \tag{3.44}$$

整理后得到

$$(A-\triangle tB+i\triangle tD_{m+\frac{1}{2}})\widetilde{\phi}_{m+1}=(A+\triangle tB-i\triangle tD_{m+\frac{1}{2}})\widetilde{\phi}_m \tag{3.45}$$

由于矩阵是稀疏的，所以$\widetilde{\phi}_{m+1}$容易求解．但是因为我们可能遇到稠密的，所以上述积分方法并不总是行得通的．在这样的情况下，积分过程所需的计算时间大得难以解决．

3.1.4 Ritz法 Di Prima（1961）考虑了二旋转圆筒间流动相对于非轴对称扰动的稳定性。如果圆筒间缝宽d是小的，则对于中性稳定性情形所得到的无量纲形式方程是

$$(DLD-k_1^2L)u=-\tfrac{1}{2}k_1^2T(1+\mu)v \tag{3.46}$$

$$Lv=u \tag{3.47}$$

这里$u=u(r)$和$v=v(r)$是扰动速度的径向和周向分量的振幅，T是Taylor数，$\mu=\Omega_2/\Omega_1$是外圆筒角速度与内圆筒角速度之比，$D=d/dr$，$L=(D^2-k_1^2)-iR\{\beta+k_2f(r)\}$，$\beta$是扰动的相速度，$k_1$和$k_2$是轴向和周向的波数，$f(r)=\frac{1}{2}(1+\mu)-(1-\mu)r$，$R=\Omega_1d^2/\nu$，边界条件是

$$u=v=Du=0，在r=\pm 1/2处 \tag{3.48}$$

要求将T作为k_1，k_2和μ的函数来确定．

上面所定义的问题可以变换为一个变分问题．令$Z=[\frac{1}{2}T(1+\mu)]^{1/2}$，并重新规定$u$为$ik_1Zu$，于是方程（3.46）和（3.47）取形式

$$(DLD-k_1^2L)u=ik_1Zv \tag{3.49}$$

$$Lv=ik_1Zu \tag{3.50}$$

现在令

$$\psi_1(u,v)=\tfrac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\{[D^2-k_1^2)u]^2+iR[\beta+k_2f(r)][(Du)^2+k_1^2u^2]-(Dv)^2-k_1^2v^2-iR[\beta+k_2f(r)]v^2\}dr \tag{3.51}$$

$$\psi_2(u,v)=\int_{-1/2}^{1/2}uvdr \tag{3.52}$$

容易证明，在所有满足边界条件（3.48）的函数u和v中，使

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$I(u, v) = \psi_1(u, v) - ik_1 Z\psi_2(u, v) \tag{3.53}$$

的一次变分为零的u和v必须满足方程（3.49）和（3.50）.

为求解变分问题，将u和v按满足边界条件（3.48）的正交函数完备组展开．合适的级数是

$$u(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n G_n(r) + b_n S_n(r) \right\} \tag{3.54}$$

$$v(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ d_n E_n(r) + q_n F_n(r) \right\} \tag{3.55}$$

这里 $E_n(r) = \sqrt{2}\cos(2n-1)\pi r$, $F_n(r) = \sqrt{2}\ \sin 2n\pi r$, $G_n(r)$ 和 $S_n(r)$ 是已由Harris和Reid（1958）列成表的函数.

将这些级数代入I的表达式中并进行积分，结果得到I为a_n，b_n，p_n和q_n的函数．I的一次变分为零要求I对a_n，b_n，d_n和q_n的偏导数为零．对于非显然解，系数行列式必须为零．当然我们希望行列式将很快收敛．精确的结果可以通过解一个8×8的行列式方程（即只取级数的头两项）得到。

3.1.5 Galerkin-Fourier级数法 Chandrasekhar（1954）研究了上节所叙述的问题，但只考虑了轴对称扰动（即$k_2=0$）的简单情形．此时方程简化为

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - k_1^2\right)^2 u = \left(1+\alpha r\right) v \tag{3.56a}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - k_2^2\right) v = -T k_1^2 u \tag{3.56b}$$

这里$\alpha = -[1-(\Omega_2/\Omega_1)]$．边界条件是

$$u = du/dr = v = 0，在 r = 0 和 1 处 \tag{3.57}$$

边界点由于两位作者所选取的坐标不同而不同.

由于在$r=0$和$r=1$处要求v为零，所以将它展成为正弦级数形式

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi r \tag{3.58}$$

接着把方程（3.58）代入方程（3.56b）中并求解方程

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - k_1^2\right)^2 u = (1+\alpha r) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi r \tag{3.59}$$

方程（3.59）的解是简单的，通解可写为形式

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n^2\pi^2 + k_1^2)^2} \left\{ A_{1n}\cosh k_1 r + B_{1n}\sinh k_1 r + A_{2n} r\cosh k_1 r \right.$$

$$\left. + B_{2n} r\sinh k_1 r + (1+\alpha r)\ \sin n\pi r + \frac{4\alpha n\pi}{n^2\pi^2 + K_1^2}\cos n\pi r \right\} \tag{3.60}$$

这里积分常数A_{1n}，A_{2n}，B_{1n}和B_{2n}由边界条件确定，从这些边界条件可以导出方程

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left.\begin{aligned}
&A_{1n}=-\frac{4n\pi a}{n^2\pi^2+k_1^2}, \qquad k_1B_{1n}+A_{2n}=-n\pi\\
&A_{2n}\cosh k_1+B_{1n}\sinh k_1+A_{2n}\cosh k_1+B_{2n}\sinh k_1=(-1)^{n+1}\frac{4n\pi\alpha}{n^2\pi^2+k_1^2}\\
&A_{1n}k_1\sinh k_1+B_{1n}k_1\cosh k_1+A_{2n}(\cosh k_1+k_1\sinh k_1)\\
&\qquad +B_{2n}(\sinh k_1+k_1\cosh k_1)=(-1)^{n+1}(1+\alpha)n\pi
\end{aligned}\right\} \tag{3.61}$$

求解这些方程后得到：

$$\left.\begin{aligned}
&A_{1n}=-\frac{4\alpha n\pi}{n^2\pi^2+k_1^2}\\
&B_{1n}=\frac{n\pi}{E}\left\{k_1+d_n(\sinh k_1+k_1\cosh k_1)-q_n\sinh k_1\right\}\\
&A_{2n}=-\frac{n\pi}{E}\left\{\sinh^2 k_1+d_nk_1(\sinh k_1+k_1\cosh k_1)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-q_nk_1\sinh k_1\right\}\\
&B_{2n}=\frac{n\pi}{E}\left\{(\sinh k_1\cosh k_1-k_1)+d_nk_1^2\sinh k_1-q_n(k_1\cosh k_1\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\sinh s_1)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{3.62}$$

这里$E=\sinh^2 k_1-k_1^2$ ，$d_n=\frac{4\alpha}{n^2\pi^2+k_1^2}\left[(-1)^{n+1}+\cosh k_1\right]$

$$q_n=(-1)^{n+1}(1+\alpha)+\frac{4\alpha}{n^2\pi^2+k_1^2}\left(k_1\sinh k_1\right)$$

把从方程（3.58）和（3.60）得到的v和u代入方程（3.56b），结果得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m(m^2\pi^2+k_1^2)\sin m\pi r=Tk_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n^2\pi^2+k_1^2)^2}\left\{A_{1n}\cosh k_1r\right.$$

$$+B_{1n}\sinh k_1r+A_{2n}r\cosh k_1r+B_{2n}r\sinh k_1r+(1+\alpha r)\sin n\pi r$$

$$\left.+\frac{4\alpha n\pi}{n^2\pi^2+k_1^2}\cos n\pi r\right\} \tag{3.63}$$

方程（3.63）乘以$\sin m\pi r$并在r范围内积分，得到一个关于常数$b_n=a_n/(n^2\pi^2+k_1^2)$的线性齐次方程组，要求这些常数不全为零就可以得到特征方程

$$\left\|\frac{m\pi}{m^2\pi^2+k_1^2}\left\{\left[1+(-1)^{m+1}\cosh k_1\right]A_{1n}+\left[(-1)^{m+1}\sinh k_1\right]B_{1n}\right.\right.$$

$$+(-1)^{m+1}\left[\cosh k_1-\frac{2k_1}{m^2\pi^2+k_1^2}\sinh k_1\right]A_{2n}+\left[(-1)^{m+1}\sinh k_1\right.$$

$$\left.-\frac{2k_1}{m^2\pi^2+k_1^2}\left\{1+(-1)^{m+1}\cosh k_1\right\}\right]B_{2n}+\alpha\chi_{mn}+\frac{1}{2}\delta_{mn}$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}(m^2\pi^2+k_1^2)^3\frac{\delta_{mn}}{k_1^2T}\right\|=0 \tag{3.64}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这里

$$\chi_{mn}=\begin{cases}0 & \text{当}n+m\text{为偶数且}n\neq m\text{时}\\ 1/4 & \text{当}n=m\text{时}\\ \dfrac{4mn}{m^2-n^2}\left[\dfrac{2}{n^2\pi^2+k_1^2}-\dfrac{1}{\pi^2(m^2-n^2)}\right. & \text{当}n+m\text{为奇数时}\end{cases}$$

求解确定T的无限阶特征方程的方法是令特征矩阵的前m行和前m列所构成的行列式等于零。对于现在这个问题，过程收敛得相当快，在正弦级数中只需取几项就足够了。

3.1.6 Fourier级数法 在某些情况下，Fourier级数的导数容易求得。我们注意到，在$0<z<\pi$的范围内，给定$G(0)=G(\pi)=0$之后，级数

$$G(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nz \tag{3.65}$$

的导数是

$$G'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos nz \tag{3.66}$$

在同一范围内，级数

$$F(z)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nz \tag{3.67}$$

的导数是

$$F'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n)\sin nz \tag{3.68}$$

而无需详细规定$F(0)$和$F(\pi)$。这样，对级数（3.66）求微分，我们得到

$$G''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2b_n)\sin nz \tag{3.69}$$

如果给定$G''(0)=G''(\pi)=0$，则有

$$G'''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-n^3b_n)\cos nz \tag{3.70}$$

因而只要给定$G(z)$及其所有的阶数小于s的偶数阶导数在区间两端点取值为零，我们就可以将级数（3.65）微分s次。

然而即使给定的函数不能满足这些条件，我们也可以构造一个满足这些条件的辅助函数例如，假设我们希望将函数$f(z)$微分4次。通过加上一多项式（这里是3次），我们构造一个函数$g(z)$满足

$$g(0)=g(\pi)=g''(0)=g''(\pi)=0 \tag{3.71}$$

并将$g(z)$展为一正弦级数。于是我们记

$$g(z)=f(z)-\pi^{-1}[f(\pi)z+f(0)(\pi-z)]-(6\pi)^{-1}[f''(\pi)z(z^2-\pi^2)$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$-f''(0)\,z(z-\pi)(z-2\pi)\,] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nz \tag{3.72}$$

然后由于$g(0)=g(\pi)=0$，有

$$g'(z)=f'(z)-\pi^{-1}[f(\pi)-f(0)]-(6\pi)^{-1}[f''(\pi)(3z^2-\pi^2)$$

$$-f''(0)(3z^2-6\pi z+2\pi^2)] = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nz \tag{3.73}$$

$$g''(z)=f''(z)-\pi^{-1}[f''(\pi)z+f''(0)(\pi-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 b_n)\sin nz \tag{3.74}$$

又由于$g''(0)=g''(\pi)=0$，有

$$g'''(z)=f'''(z)-\pi^{-1}[f''(\pi)-f''(0)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^3 b_n)\cos nz \tag{3.75}$$

$$g''''(z)=f''''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 b_n \sin nz \tag{3.76}$$

现在可以用$f(z)$，$f'(z)$，…，$f''''(z)$的表达式来满足任一包含有这些导数的线性组合的边界条件，但为了能构造一个$f(z)$来满足微分方程，首先必须用通常的方法将多项式展开成Fourier级数。例如，在$0<z<\pi$范围内，我们有

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{n}\right)\sin nz, \qquad \pi-z=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)\sin nz \tag{3.77}$$

因而

$$f''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{\pi n}\right)[-(-1)^n f''(\pi)+f''(0)]-n^2 b_n\right\}\sin nz \tag{3.78}$$

类似地，我们可以求得

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{\pi n}\right)[-(-1)^n f(\pi)+f(0)]-\left(\frac{2}{\pi n}\right)^3[-(-1)^n f''(\pi)+f''(0)]\right.$$

$$\left.+b_n\right\}\sin nz \tag{3.79}$$

Neild（1964）应用上述方法研究了考虑到密度分层和表面张力影响的涡胞对流问题，速度z分量的振幅$\omega(z)$和温度扰动的振幅$\theta(z)$所满足的无量纲微分方程是

$$(D^2-b^2)^2\omega=R_1 b^2\theta \tag{3.80}$$

$$(D^2-b^2)\theta=-\omega \tag{3.81}$$

这里$D=d/dz$，$b=kd/\pi$，$R_1=Ra/\pi^4$，k=水平波数$=(k_x^2+k_y^2)^{1/2}$，d=包围流体的两个表面的距离，Ra= Rayleigh数。边界条件是

$$\omega(0)=0,\ D\omega(0)=0,\ \theta(0)=0 \tag{3.82a,b,c}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\omega(\pi)=0,\ D^2\omega(\pi)=-B_1b^2\theta(\pi),\ D\theta(\pi)=-L_1\theta(\pi) \tag{3.83a,b,c}$$

这里B_1和L_1是无量纲常数.

由于ω必须微分4次，θ必须微分2次，所以它们可写为〔请看方程（3.78）和（3.79）〕

$$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n-\left(\frac{2}{\pi n^3}\right)[-(-1)^nD^2\omega(\pi)+D^2\omega(0)]\right\}\sin nz \tag{3.84}$$

$$\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{d_n-\left(\frac{2}{\pi n}\right)(-1)^n\theta(\pi)\right\}\sin nz \tag{3.85}$$

这里已用了边界条件（3.82a，c）和（3.83a）. 于是

$$D^2\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-n^2a_n+\frac{2}{\pi n}[-(-1)^nD^2\omega(\pi)+D^2\omega(o)]\right\}\sin nz \tag{3.86}$$

$$D^4\omega=\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n\sin nz \tag{3.87}$$

$$D^2\theta=\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2d_n)\sin nz \tag{3.88}$$

为方便起见，记$D^2\omega(0)=M$，$D^2\omega(\pi)=N$，再由条件(3.83b)得$\theta(\pi)=-(B_1b^2)^{-1}N$. 考虑方程（3.73），给出

$$D\omega=(6\pi)^{-1}[D^2\omega(\pi)(3z^2-\pi^2)-D^2\omega(0)(3z^2-6\pi z+2\pi^2)]$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}na_n\cos nz \tag{3.89}$$

$$D\theta=\pi^{-1}\theta(\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}nd_n\cos nz \tag{3.90}$$

于是边界条件（3.82b）和（3.82c）给出

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\tfrac{1}{3}\pi M+\tfrac{1}{6}\pi N \tag{3.91}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnd_n=(L_1+\pi^{-1})(B_1b^2)^{-1}N \tag{3.92}$$

将Fourier级数展开式（3.84）和（3.85）代入方程（3.80）和（3.81），并使$\sin nz$的系数相等，就得到

$$(n^2+b^2)^2a_n-R_1b^2d_n=\left(\frac{4b^2}{\pi n}+\frac{2b^4}{\pi n^3}\right)M+\left(\frac{2R_1}{\pi nB_1}-\frac{4b^2}{n\pi}-\frac{2b^4}{\pi n^2}\right)(-1)^nN \tag{3.93}$$

$$a_n-(n^2+b^2)d_n=\frac{2}{\pi n^3}M+\left(\frac{2}{\pi nB_1}-\frac{2}{\pi n^3}\right)(-1)^nN \tag{3.94}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对a_n和d_n求解这两个方程并将它们代入方程（3.91）和（3.92），就得到关于M和N的两个线性齐次方程。M和N经过消元后就得到作为系数行列式的特征方程。经简化，这个特征方程可写为

$$\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n^2+b^2)}{(n^2+b^2)^3-R_1b^2} & B_1b^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2(n^2+b^2)}{(n^2+b^2)^3-R_1b^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n R_1b^2n^2}{(n^2+b^2)^3-R_1b^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n^2+b^2)^3-R_1b^2} & B_1b^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2+b^2)^3-R_1b^2}-\frac{1+\pi L_1}{2} \\ & -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^2(n^2+b^2)^2-R_1b^2}{(n^2+b^2)^3-R_1b^2} \end{vmatrix}=0 \quad (3.95)$$

由此，B_1可以通过b，L_1和R_1求得。假定边界条件含有导数的线性组合，则这个方法特别适用于所含导数全是偶次（或奇次）的常系数常微分方程。所得行列式的阶数则等于至少包含一个奇次导数的边界条件的个数。

3.1.7 幂级数法 Sparrow，Goldstein和Jonsson（1964）研究了在一有负温度梯度存在的水平流体层中的对流运动的形成。他们考虑了各种不同边界条件的影响以及在内部放热所产生的流体层内非线性温度分布的影响。对于下表面具有固定温度而上部自由面具有一般对流传热的线性温度剖面的简单情况，中性稳定性问题可由关于扰动速度垂向分量的振幅$w=w(z)$的一个无量纲方程来确定，此方程形式为

$$\frac{d^6w}{dz^6}-3b^2\frac{d^4w}{dz^4}+3b^4\frac{d^2w}{dz^2}+(b^2\mathrm{Ra}-b^6)w=0 \quad (3.96)$$

这里Ra是Rayleigh数，b是一常数，边界条件是

$$w=\frac{dw}{dz}=0,\ \frac{d^4w}{dz^4}-2b^2\frac{d^2w}{dz^2}=0,\text{在}z=0\text{处} \quad (3.97)$$

$$w=\frac{d^2w}{dz^2}=0,\ \frac{d^5w}{dz^5}-2b^2\frac{d^3w}{dz^3}+b^4\frac{dw}{dz}=\mathrm{Bi}\frac{d^4w}{dz^4},\text{在}z=1\text{处} \quad (3.98)$$

这里Bi是Biot（或Nusselt）数。（3.96）的通解可以用下面的形式来构造：

$$w(z)=\sum_{i=0}^{\infty}a_iF_i(z) \quad (3.99)$$

其中a_i任意，F_i是收敛的幂级数：

$$F_i=\sum_{n=0}^{\infty}q_{i,n}z^n \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,5) \quad (3.100)$$

对于$n>6$，系数$q_{i,n}$服从以下的递推关系式：

$$q_{i,n}=\frac{1}{n!}\{3b^2(n-2)!\,q_{i,n-2}-3b^4(n-4)!\,q_{i,n-4}-(b\,\mathrm{Ra}-b^3)(n-6)!\,q_{i,n-6}\} \quad (3.101)$$

而从$q_{i,0}$直至$q_{i,5}$则规定为

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$q_{i,n}=\delta_{in} \qquad (0\leqslant n\leqslant 5) \tag{3.102}$$

这里$\delta_{in}=1$，当$i=n$时；$\delta_{in}=0$，当$i\neq n$时。

常数a_0，a_1，…，a_5由边界条件确定。应用（3.97）的头两个条件，容易看出$a_0=a_1=0$，因而w变为

$$w(z)=\sum_{i=2}^{5}a_iF_i(z) \tag{3.103}$$

再对方程（3.103）应用剩下的边界条件，得到

$$-4b^2a_2+24a_4=0 \tag{3.104}$$

$$[a_2F_2+a_3F_3+a_4F_4+a_5F_5]_{z=1}=0 \tag{3.105}$$

$$\left[a_2\frac{d^2F_2}{dz^2}+a_3\frac{d^2F_3}{dz^2}+a_4\frac{d^2F_4}{dz^2}+a_2\frac{d^2F_5}{dz^2}\right]_{z=1}=0 \tag{3.106}$$

$$\sum_{i=2}^{5}a_i\left[\frac{d^5F_i}{dz^5}-2b^2\frac{d^3F_i}{dz^3}+b^4\frac{dF_i}{dz}-B_i\frac{d^4F_i}{dz^4}\right]_{z=1}=0 \tag{3.107}$$

上述方程构成了关于4个常数a_2，a_3，a_4，a_5的4个线性齐次代数方程组。这个方程组仅当a_i的系数行列式为零时才有解，因此Rayleigh数Ra可作为Biot数Bi和常数b的函数来确定。

最后对这些方法作些评论是合适的。总的来说，稳定性研究采用的数值方法可分为两类。一类是直接积分，例如打靶法，这类方法比较快并且比较灵活，但有时收敛性问题却是一个困难的任务，而且能否成功地获得有用结果取决于特征值是否有一个好的初始估计值。另一类是函数展开方法，例如Galerkin法，这类方法虽然在实际上需要比较多的计算时间和比较大的磁心储存器，但对于求得所有前N个特征值而不是前一两个特征值，对于清楚地表明某一种模式是属于哪一类，这类方法是比较好的。此外，用这类方法还未碰到数值不稳定的问题。

3.2 理想流体流动的稳定性

在稳定性分析中，通常遇到非常复杂的特征值问题，而求解特征值问题需要用到麻烦的高等数学或数值方法。在初步研究中，通过把流体看作是理想的，即$\nu=0$或$Re=\infty$，我们就可以简化分析过程。然而，完全忽略粘性和只应用一个简化的方程，却会遇到许多困难。这些困难与这样一个事实有关，即对于实的特征值C（相应于中性波，这对于寻找不稳定性准则有相当大的意义），可能有自变量z的一个值（比如$z=z_0$）存在，对于这个z值，稳定性方程中高阶导数项的系数将变为零（典型例子可在第四章中找到）。对于平面平行流动，奇点z_0总是存在的。

历史上，在平面Poiseuille流动的情形中，奇点的正确处理已引起很多争议。这是由于简化方程的一个独立解在奇点邻域内的不连续性和多值性而引起的。进一步的困难是，当特征值C是复数时，其复共轭数C^*也是一个特征值。而除衰减波外，方程总是有一个生长波形式的解。因此，对于无粘流体，将稳定情形定义为只会出现衰减振动的情形是无意义的。克服所有这些困难的通常方法在于回到完全不作任何简化的方程和细心地研究各个解的渐近性质。应用这个方法，就会发现，有实际物理意义的增强解和衰减解不是互相共轭的。在某些

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

情形下，在z的不同区域中，这样一些解一定是由“贴在一起”的不同表达式所构成〔完整的考虑在Lin（*1953*）中见到〕

在数值研究中，通常采用打靶法。在拟中性稳定性的情况下，为了避免在积分过程中出现大系数，人们选取复积分路径。通常采用Lin（*1955*，*p*. *130*）所提出的准则，也就是，如果在奇点处基本速度剖面的导数大于零，那么路径就位于实轴之下，反之也然。准则只对增强扰动才是严格有效的。在粘性流体中有某些衰减解存在，但是这些解在粘性系数趋于零的极限情形下，却不能简化成整个流动区域内的无粘方程的解。

最后应该注意到，有限衰减解的性质说明了在高 Re 数时粘性流体运动的基本性质。

流体运动在流场的一个有限部分内呈现高速振动状态，而在流场其余部分内却变化很慢。正如在边界层理论中所熟知的，粘性效应限制在很薄的一层范围内，当Re数趋于无穷大时该层的厚度趋于零。另一方面，在我们的情形下，粘性效应在流体有限的范围内扩展，其厚度在无穷大Re数的极限情况下并不趋于零。

3.3 Navier-Stokes方程的直接求解

除了惯用的特征值问题的提法之外，流动形态的稳定性也可以通过基本流动中扰动的实际演变来研究。在流场中引入一初始扰动之后，流动对此扰动的反应可通过应用一种稳定的数值方法直接求解Navier-Stokes方程来研究。这个方法与限于小振幅周期性扰动的经典线性稳定性理论完全不同。这种方法由于未线性化，所以不需要限制扰动的形式或强度。

为了避免由不稳定的数值摆动与实际意义上的扰动的相互作用而引起的结果的可能失真，必须特别注意数值方法的稳定性问题。由于所研究的流动具有极端的非定常性质，而流动的时间相关性质具有特殊的意义，因此所选用的特殊数值方法要经过严格的检验，只有性能良好的方法才能够得到这种流场的过渡特性的真实解答。此外此方法包括求解一组非线性偏微分方程；需要大量费时的数值运算，因而需要能快速存取存储量的最现代化的大型计算机系统。甚至程序编制技术和有效地利用辅助设备在这种情况下也具有特别的意义。

Fasel（*1976*）应用有限差分法研究了半无限平板上的边界层稳定性。他报道他的结果与应用经典线性稳定性理论所得的结果是一致的，由于这种方法需要很大的计算机容量，所以本文未予考虑。

朱顶金译自：Y. S. Li（李毓湘），S. C. Kot（葛时俊），Review of numerical methods for stability analysis, in Finite Element Method in Hydrodynamic Stability (A Thesis Presented for the Degree of Doctor of Philosophy at The Univ. of Hong Kong by Li Yok-Sheung) (1979)：15—45.

致 读 者

本刊改为公开发行以来 订户激增。了了方便读者，自*1983*年第3期起改由河北省承德市邮电局总发行，全国各地邮电局。所均可订阅。**刊号18—36**。请读者于邮局收订报刊期间到各地邮电局、所订阅。订阅*1983*年上半年本刊，仍由**北京市中关村中国科学院力学研究所资料室**办理，订单函索即寄（*1982*年第*4*期《力学进展》中附有本刊订单）。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net