

Orr-Sommerfeld 方程的数值解法

天津大学 赵耕夫

一、引言

研究平行流动或近似平行流动,例如平面 Poiseuille 流及边界层流动的稳定性问题时,若采用线性化小扰动理论,则最后归结为解 Orr-Sommerfeld 方程的特征值问题。对非线性理论来说,只要是弱非线性理论,一般也要顺序解一串 Orr-Sommerfeld 方程(齐次的或非齐次的)。因此解 Orr-Sommerfeld 方程,是研究平行或近似平行流动稳定性问题时必然要遇到的问题。在50年代以前,主要利用渐近法^[6]求 Orr-Sommerfeld 方程的特征值,但一般不能得到一致收敛的准确的特征函数,且特征值的精确度也不够。因此,随着计算机的发展,求解 Orr-Sommerfeld 方程就主要靠数值计算。由于 Orr-Sommerfeld 方程实际相当于一奇异摄动方程,其数值解也遇到一定困难。直至目前为止,当 Reynolds 数很大时,仍然会遇到困难。本文将对目前已有的一些方法,加以介绍。为叙述方便起见,以平面 Poiseuille 为例加以说明。边界层流动等只是边界条件不同而已。

平面 Poiseuille 流是两无限平行平板间的平行流动。经无量纲化以后,两平板位于 $y = \pm 1$ 处。设 x 沿流动方向, y 垂直于平板。设小扰动的流函数为 $\psi(x, y, t) = \phi(y)e^{i\alpha(x-Ct)}$, 则幅值 $\phi(y)$ 满足 Orr-Sommerfeld 方程

$$L\phi = \{(D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha R \{(\bar{u} - C)(D^2 - \alpha^2) - D^2\bar{u}\}\} \phi = 0 \quad (1)$$

$$\phi(-1) = D\phi(-1) = 0 \quad (1a)$$

$$\phi(1) = D\phi(1) = 0 \quad (1b)$$

其中 $D = \frac{d}{dy}$, α 为波数, R 为 Reynolds 数, $\bar{u} = 1 - y^2$ 是基本层流解, 复数 $C = C_r + iC_i$ 为特征值。

齐次方程 (1) 和齐次边界条件 (1a), (1b), 构成一特征值问题。若以 C 为特征值, 则给定 α, R 后将有 $C = f(\alpha, R)$ 。由特征值 C 的虚部即可断判小扰动的稳定性。在 α, R 平面中对应 $C_i = 0$ 的曲线叫中性曲线。用渐近方法求解时, 为了简化计算往往直接求中性曲线。

因为方程 (1) 的系数对 y 是对称的, 它有互不相干的两种解, 即对称解和反对称解。前人的计算结果表明, 反对称解总是稳定的, 而对称解则有不稳定的情况, 是“更危险”的。对于对称解, 边界条件 (1a), (1b) 可用下式代替:

$$D\phi(0) = D^3\phi(0) = 0 \quad (2a)$$

$$\phi(1) = D\phi(1) = 0 \quad (2b)$$

而对反对称解, 则可用 $\phi(0) = D^2\phi(0) = 0, \phi(1) = D\phi(1) = 0$ 代替。

数值解的方法是各种各样的, 但总可以把它们分成两大类。一类是代数方法, 另一类是

微分方法。前者包括有限差分法、加权残量法、有限单元法和Chebyshev多项式近似法。后者有Kaplan的过滤积分法、Conte的准正规化积分和Davey的完全正规化法,以及Itoh的级数法。这些方法原则上也适用于其他线性特征值问题。

二、代数方法

代数方法是指通过适当途径把微分方程(1)变为线性的齐次代数方程组,从而把微分特征值问题转化成代数特征值问题。各种方法的不同点在于使方程(1)离散化的途径上。

1. 有限差分法

早在50年代初Thomas就用有限差分法成功地求解Orr-Sommerfeld方程(4)。这是数值解第一个成功的先例。若把区间 $(0,1)$ 分成 N 等分,用差商代替(1)中的各阶导数,便可得到(1)的差分方程。一般采用二级精度的中心差分格式,可得一组代数方程

$$(D^4\phi)_i = f((D^2\phi)_i, \phi_i, y_i) \quad i=1, 2, \dots, N$$

其中 $(D^4\phi)_i$, $(D^2\phi)_i$ 分别为第 i 个网格点处的四阶及二阶差商。为提高精度,可采用Numerov加权差分格式。即在第 i 个点差分化时令

$$(D^4\phi)_i = C_2 \{f((D^2\phi)_{i+1}, \phi_{i+1}, y_{i+1}) + f((D^2\phi)_{i-1}, \phi_{i-1}, y_{i-1})\} + C_1 f((D^2\phi)_i, \phi_i, y_i) \quad (3)$$

一般认为 $C_1 = 10/12$, $C_2 = 1/12$,这时式(3)将有四级精度。但我们计算时发现,对 $N = 300$ 来说, $C_1 = 11.6/12$, $C_2 = 0.2/12$ 得到的结果更好。用边界条件消去两个未知数,得 N 阶线性齐次代数方程组。其特征行列式为

$$\Delta = |A - CB| = 0 \quad (4)$$

这里 A 是斜对角带状复矩阵, B 是斜对角实矩阵,带宽均为5。

为了求特征值 C ,一般要预估 C 的三个近似值,用Müller方法(11)对 C 进行迭代。行列式的值可采用Gauss消元法,但一般须用双精度,才能保证精度。当两次迭代得到的 C 的修正值充分小,比如小于 10^{-7} 时,就认为是收敛了。此时的 C 即为所求。

若要求中性曲线,则由于 C_i 是 α , R 的函数,又须预估两个 α 值(R 不变),或两个 R 值(α 不变),用Müller法求得相应的两个 C 值后,再用牛顿法求使得 $C_i = 0$ 的 α 或 R 值,就可得中性曲线上的特征值 C_i 。也就是说求中性曲线需两次迭代过程。

有限差分法的优点是概念直观,方法简便。和其他方法比起来一般较省机时,结果也是准确的。(4)中的计算结果表明,当 $N = 100$ 时就得到很精确的结果。而它所需的机时据说只相当于后面要讲的准正规化积分法的十几分之一。但我们发现,实际上 $N = 100$ 是得不到精确结果的,一般需取 $N = 300$ 才得到精确到小数后6位的结果。这个方法的缺点是需要估初值,而初值的好坏对收敛速度和最后结果是有影响的。我们曾把有限差分法应用于圆管流和平行流的稳定性非线性理论的计算中,其结果是令人满意的(12)。

2. 加权残量法

这个方法最初由De Loach, Millsaps等人提出,但得到实际的应用是在Lee和Reynolds的文章之后(7)。由于(1)并不是自伴随的,不能用经典的变分原理。因此一般用Galerkin法推导所需方程。

假定 $\phi_i(y)$ 是一正交的完全函数族,且满足边界条件(1a), (1b)。取该函数族的线性组合作方程(1)的近似解。

$$\phi^*(y) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(y) \quad (5)$$

这里 a_i 是待定的常数。把 (5) 代入 (1) 得其余数为

$$L\phi^*(y) = \text{Res}(\phi^*) \quad (6)$$

$\text{Res}(\phi^*)$ 叫做残量。显然它的值就是 ϕ^* 的近似程度的度量。为了使 ϕ^* 很好地近似 ϕ ，我们要求 $\text{Res}(\phi^*) = 0$ 。为此在整个区域中对残量进行加权平均，并要求

$$\int_{-1}^{+1} \text{Res}(\phi^*) W_j(y) dy = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

其中 $W_j(y)$ 为权函数。按 Galerkin 法取 $W_j = \phi_j$ ，即

$$\int_{-1}^{+1} \text{Res}(\phi^*) \phi_j dy = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

把式 (5)、(6) 代入 (7)。可得到关于未知量 a_i 的 N 个线性齐次代数方程。其特征行列式等于零就是确定 C 的条件。即

$$|E - CF| = 0 \quad (8)$$

其中 E 是 $N \times N$ 复数矩阵， F 是 $N \times N$ 非对称实矩阵。〔4〕中用 QR 方法对 (8) 求解。

这种方法的计算精度和所选用的近似函数族密切相关。Lee 和 Reynolds 提出了选择近似函数族的原则，也可参看〔3〕。加权残量法的优点是它不需要知道 C 的任何初值。因此可以用它给其他更精确方法提供初值〔2〕，但一般所需机时较多。

3. Chebyshev 多项式近似法

可用于逼近 (1) 的解的函数族有很多种。但用 Chebyshev 多项式比用其他函数族所得的结果更精确、更节省机时和内存。Orszag 用该方法求解问题 (1) 得到了很精确的结果〔9〕。据分析，这和用该多项式逼近时，在边界处分辨率好有关。

若 $T_n(y)$ 表示第一类的 n 阶 Chebyshev 多项式，其定义为

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \quad y = \cos\theta \quad (9)$$

$T_n(y)$ 具有下列递推关系：

$$2yT_n(y) = T_{n+1}(y) + T_{n-1}(y) \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

我们把 (1) 的解及其各阶导数都展成 Chebyshev 多项式的级数

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(y) \quad (11)$$

$$\frac{d^{(q)}\phi(y)}{dy^{(q)}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} T_n(y) \quad q = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (12)$$

其中 $a_n^{(0)} = a_n$ 是待定的常数。由 (9) 不难得到

$$\frac{e_n}{n+1} T_{n+1}'(y) - \frac{d_{n-2}}{n-1} T_{n-1}'(y) = 2T_n'(y) \quad (13)$$

这里一撇“'”表示对 y 求导数。上式中若 $n < 0$ ，则 $e_n = d_n = 0$ ；若 $n > 0$ ，则 $e_n = d_n = 1$ ， $e_0 = z$ ， $d_0 = 1$ 。由(12)，(13)得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q-1)} T_n(y) &= \frac{d^{(q)} \phi}{dy^{(q)}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} T_n(y) \\ &= \frac{d}{dy} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} \left[\frac{e_n}{n+1} T_{n+1}(y) - \frac{d_{n-2}}{n-1} T_{n-1}(y) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

对 $n \geq 1$ ，(14)中使两边 $T_n(y)$ 项的系数相等，则

$$e_{n-1} a_{n-1}^{(q)} - c_{n+1}^{(q)} = 2n a_n^{(q-1)} \quad (n \geq 1) \quad (15)$$

由(15)可得 $a_n^{(q)}$ 和 a_n 的关系

$$e_n c_n^{(1)} = 2 \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^{\infty} p a_p \quad (16)$$

$$e_n a_n^{(2)} = 2 \sum_{\substack{m=n+1 \\ m+n \equiv 1 \pmod{2}}}^{\infty} m a_m^{(1)} = \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{\infty} p(p^2 - n^2) a_p \quad (17)$$

$$e_n a_n^{(4)} = \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{\infty} p[p^2(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^4 + 3n^4 p^2 - n^2(n^2 - 4)^2] a_p \quad (18)$$

这里 $a \equiv (\text{mod } 2)$ 表示 $a-b$ 可被2整除。利用递推关系(10)可得(1)中 $y^2 \phi$ 的展式中第 n 项的系数为

$$\frac{1}{4} [c_{n-2} a_{n-2} + (c_n + c_{n-1}) a_n + a_{n+2}], \quad n \geq 0 \quad (19)$$

我们要找的是(1)的近似解。为此，在(17)，(18)，(19)中只取前 N 项代入(1)并使 $T_n(y)$ 项的系数为零，则得方程

$$\frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N [p^3(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pn^2(n^2 - 4)^4] a_p$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \{ [2\alpha^2 + \frac{1}{4}i\alpha R(4-4c-e_n-e_{n-1})] p(p^2-n^2) \\
& - \frac{1}{4}i\alpha R e_n p [p^2 - (n+2)^2] - \frac{1}{4}i\alpha R d_{n-2} p [p^2 - (n-2)^2] \} a_p \\
& + i\alpha R n(n-1)a_n + \{ \alpha^4 + i\alpha R(1-c)\alpha^2 - 2 \}^2 e_n a_n \\
& - \frac{1}{4}i\alpha^3 R [e_{n-2} a_{n-2} + e_n(e_n + e_{n-1})a_n + e_n a_{n+2}] = 0 \tag{20}
\end{aligned}$$

Chebyshev 多项式不自动满足边界条件, 因此边界条件 (1a), (1b) 又成为两个独立的方程. 利用性质 $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$, $T_n'(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1}n^2$, 则 (1a), (1b) 变为

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N a_n, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0 \tag{21}$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0 \tag{22}$$

容易看出 (20), (21), (22) 当 n 为偶数和 n 为奇数时是互不相干的两组方程. n 为偶数时是关于未知量 a_{2k} ($k=0, 1, 2, \dots$) 的一组方程 ($a_{2k+1}=0$). 它对应的是 (1) 的对称解, $n=2k+1$ 的那组方程对应的是反对称解.

对于对称解, 设 $N=2M$, $n=2k$, 未知数为 a_{2k} ($k=0, 1, 2, \dots, M$). 在 (20) 和 (21) 中共有 $M+1$ 个未知数, 却有 $M+3$ 个方程. 解决这一矛盾可用 Galerkin 法也可用 Lancos 的 Tau 方法^[9]. 去掉 (20) 中的第 $N, N-2$ 个方程, 于是 (20), (21) 中共有 $M+1$ 个方程, $M+1$ 个未知数, 方程就可以求解了. 这时若将解代入 (20) 中, 未用的两个方程, 将不能满足. 而可化为

$$L\phi = \tau_{N-2} T_{N-2}(y) + \tau_N T_N(y) + \tau_{N+2} T_{N+2}(y)$$

$\tau_{N-2}, \tau_N, \tau_{N+2}$ 就可看作是这个方法实际误差的度量.

用式 (21) 消去 (20) 中的 a_N, a_{N-2} , 经整理后方程的特征行列式为

$$|A - CB| = 0 \tag{23}$$

其中 A 是 $(N-2) \times (N-2)$ 的复数方阵, B 是实方阵. 求解时可用 QR 方法^[11].

这个方法的优点是不需很多项, 就能达到很高的精度, 因而省机时和内存. 如不求特征函数所用内存只是 N^2 的量级. 一般当 $N \geq 26$ 时计算结果就不变了. 若用 QR 法, 则所需机时约为有限差分法的 2 倍, 但精度较高. 幸运的是在 QR 迭代中总是最不稳定模式的特征值第一个出现, 这正是我们所希望的. 由于 Chebyshev 多项式近似的一些递推公式很简单, 因此这种方法不仅可以求特征值、特征函数, 而且有可能用于非线性问题中. 要说明的是, 我们试用的结果, 所得具体数值和 [9] 中结果略有差别 (在小数点第 6 位以后).

4. 有限单元法 近来英国和香港的学者用有限单元法解线性稳定性的特征值问题取得了一定成果. 下面用 Galerkin 方法推导有限元方程.

假设 $N_1(y)$ 为权函数, 对每一个线单元有

$$\int_0^1 N_1 \left\{ (\bar{u} - C) (D^2 - \alpha^2)\phi - (D^2 \bar{u})\phi + \frac{i}{\alpha R} (D^2 - \alpha^2)^2 \phi \right\} dy = 0$$

对上式分部积分两次得 (边界值在整体求和时将消去)

$$\int_{\delta} \left\{ \frac{i}{\alpha R} (\phi'' N_i'' + 2\alpha^2 \phi' N_i' + \alpha^4 \phi N_i) - [\phi' (N_i(\bar{u} - C))' + \alpha^2 N_i(\bar{u} - C)\phi] - N_i \bar{u}'' \phi \right\} dy = 0 \quad (24)$$

由于式 (24) 中包含有 ϕ 的二阶导数, 因此要求在单元的边界上 ϕ' 是连续的。所以取节点的函数及其一阶导数值为节点处未知数。而将 $\phi(y)$ 表示成

$$\phi(y) = \sum H_i \phi_i = H_1 \phi_1 + H_2 \phi_1' + H_3 \phi_2 + H_4 \phi_2' \quad (25)$$

取 Hermite 三次多项式做插值函数

$$\left. \begin{aligned} H_1(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3, & H_2(t) &= (y_2 - y_1)t(3 - t^2) \\ H_3(t) &= t^2(3 - 2t), & H_4(t) &= (y_2 - y_1)t^2(t - 1) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中 $t = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$, $0 \leq t \leq 1$, y_1, y_2 为线单元的两个端点。将插值函数和权函数代入, 则单元矩阵方程为

$$(K - CM) \{\phi\} = 0 \quad (27)$$

其中 K 和 M 为 4×4 矩阵, 其元素为

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_{\delta} \left\{ (\bar{u} N_i' + N_i \bar{u}') N_j' + \alpha^2 N_i N_j \bar{u} + \bar{u}'' N_i N_j - \frac{i}{\alpha R} (N_i'' N_j'' \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha^2 N_i' N_j' + \alpha^4 N_i N_j) \right\} dy \\ m_{ij} &= \int_{\delta} (N_i' N_j' + \alpha^2 N_i N_j) dy \end{aligned}$$

求得整体的矩阵方程后, 仍可用 QR 方法求特征值 C 。该方法已经用于平行流、窄缝区域的圆形 Couette 流、轴对称射流等, 都有一定成果。有限单元法的优点是其网格不必是等距离的。因此, 若事先能估计特征函数的变化率, 则可适当地分布网格点, 以期用较少的网格点达到同等精度。从平行流的结果看, 在不均匀布点时, 有 32 个点, 就可得虚部和 Thomas 的结果相差 0.0004 的特征值。

三、微分方法

微分方法又叫打靶法。它是直接对问题 (1) 进行数值积分。事实上, 在 α, R 给定之后, 若 C 为已知值, (1) 就变成了一个普通的边值问题, 也就可以按初值问题处理了。

假定求出 (1) 的两个线性无关的解 ϕ_1, ϕ_2 , 它们都事先满足边界条件 (2a)。显然这两个解适当的线性组合也是满足 (2a) 的方程 (1) 的解。即

$$\Phi = \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \phi_2 \quad (28)$$

Φ 应当满足边界条件 (2b), 于是 β_1, β_2 不全为零的条件将是

$$\Delta = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

由于 ϕ_1, ϕ_2 都与 C 有关, 这就是特征值 C 应满足的条件. 在 C 不知道时, 可以预估三个 C 值, 然后从 $y=0$ 向 $y=1$ 积分, 得三个不等于零的 Δ 值, 并用Müller法求 C 的修正值. 这样进行迭代, 直到 Δ 值充分小为止. 这时的 C 即为我们要求的特征值. 数值积分可选用任何一种积分方法, 比如Runge-Kutta法.

这本应是精确的方法. 当 R 比较小的时候也确实可以这样做. 但是稳定性问题, 往往是 R 比较大的情况, 这时不加任何变更地用该法“打靶”, 得到的结果是很差的, 甚至完全不对. 这是因为, 这个方法要求在积分过程中两个解始终是线性无关的. 但是当 R 很大时却做不到这一点. 由渐近理论知, (1)的两个解, 其中一个增长速度特别快, 而另一个解则增长缓慢. 比如当 $R=10000$ 时, 在 $(0, 1)$ 区间积分, $y=0$ 时快速增长解是1的量级, 到 $y=1$ 的边界时将增长到 10^{18} 量级. 这样在积分的每一阶段, 截断误差总会把快速增长解的一小部分引入第二个解. 我们把这部分误差叫寄生误差. 这部分误差会迅速增长, 最后就会把第二个解淹没了, 也就是说, ϕ_1, ϕ_2 将几乎线性相关. 这时再用(29)确定 C 就成为不可能. 因此, 关键是如何保持两个解的线性无关. 打靶法中各种方法的不同点也就在于此.

在打靶法中第一个成功的实例是Nachtsheim的初值问题匹配法⁽⁸⁾. 他通过两个途径控制寄生误差. 一是采用双精度, 二是缩短积分路程. 积分分成从 $y=0$ 开始的向前积分和从 $y=1$ 开始的向后积分, 向前积分和向后积分在区间的某一点相匹配就算完成了. 其他方法的基本思想是一致的, 即设法保持两个解有很好的正交性.

1. Kaplan的过滤积分法

Kaplan方法是通过构造辅助解来消除寄生误差的影响, 从而使两个解总是近似正交的⁽⁷⁾.

设 ϕ_e 为快速增长解, ϕ_e 不会受寄生误差的影响. 另一解为 ϕ . (假定除寄生误差外别无其他误差). 在第 i 个点上 ϕ_e, ϕ 的数值积分值为 $S(i), G(i)$. 在积分的每一阶段由截断误差引入的寄生误差为 $G(i)$ 的某一很小的倍数 $A_i G(i)$, 并假定此时 $A_i G(i)$ 尚未起主导作用. 于是

$$S(i) = \phi_e(i) + A_i G(i) \quad (30)$$

其中 A_i 是未知的. 定义一辅助解

$$S^*(i) = S(i) - B_i G(i) \quad (31)$$

把式(30)代入式(31)则有

$$S^*(i) = \phi_e(i) + (A_i - B_i)G(i)$$

显然, $A_i = B_i$ 时 $S^*(i)$ 中就不包含快速增长解的影响了. 事实上这是难做到的, 也没有必要. 我们只需在积分的每一步上 $A_i G(i)$ 不起主导作用, 使积分正常进行就成了. 这里关键是如何定义 B_i . Kaplan选择

$$B_i = L^*[S(i)]/L^*[G(i)] \quad (32)$$

其中 L^* 是方程(1)中当 $R \rightarrow \infty$ 时得到的无粘性算子. 于是辅助解为

$$S^*(i) = S(i) - \frac{L^*[S(i)]}{L^*[G(i)]}G(i) \quad (33)$$

这实际上提供了一个过滤或净化的辅助解, 这样就可以使快速增长解的影响减小到可以容许的地步. 之所以选 L^* , 是因为 $L^*(\phi_e) \neq 0$, 且 $L^*(f)$ 和 f 是同一量级, $L^*(f) = 0$ 的解没有很快的增长率.

2. 正规化积分法

Kaplan方法在 R 较大的时候就不适用了。Wazzan等发展了Kaplan的思想,提出了正规化积分法⁽¹⁰⁾。他建议在积分的每一步都保持两个解是线性无关的,为此在积分的每一个网格点上都使这两个解正交化一次。为了叙述的方便,我们把(1)的解写成一个四维矢量 $\vec{Z} = (\phi, \phi', \phi'', \phi''')^T$ 。这样在第 i 个网格点上积分得到的两个解 \vec{Z}_1, \vec{Z}_2 写成矩阵形式应为

$$Y(y_i) = \begin{pmatrix} \phi_1, \phi_1', \phi_1'', \phi_1''' \\ \phi_2, \phi_2', \phi_2'', \phi_2''' \end{pmatrix}^T$$

为使 \vec{Z}_1, \vec{Z}_2 正交化、正规化,可用一正交矩阵 p^i 右乘 $Y(y_i)$ 就得彼此正交的两个矢量了:

$$Z(y_i) = Y(y_i) p^i \quad (34)$$

这里 p^i 是 2×2 的上三角正交阵,可用Gram-Schmidt方法构成⁽¹⁾。

Wazzan法是始终保持两个解正交。由于每一步都正交化,虽然能得到较好结果,但计算量增大,既费时又影响精度。Conte建议在每积分一步后,就检查两个解的夹角 Ω ,如

果 Ω 小于规定的非正交化的标准 Ω_m ,即 $\Omega < \Omega_m$,就使 \vec{Z}_1, \vec{Z}_2 正交化一次,否则积分继续向前进行。假如在 y_i 点需要正交化,采用前述同样步骤

$$Z(y_i) = Y(y_i) p^i \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (35)$$

继续向前积分时,其初值就取 $Z(y_i)$ 。假定在 $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip}$ 点进行正交化,其中边界点也是一个,即 $y_N = y_{ip} = 1$ 。这样整个积分过程中基本解已经变化许多次了。我们用 $U(y_i) = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ 表示任意点上计算出来的离散值,在边界上 $y_i = y_N = 1$,则有

$$Z(y_N) = U(y_N) p^p$$

由边界条件(2b)得

$$Z(y_N) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^p \\ \beta_2^p \end{pmatrix} = 0 \quad (36)$$

其中 β_1^p, β_2^p 为常数。式(36)有非零解,则它的特征行列式为零,即式(29)。用Müller法即可求得特征值 C 。

如果要求特征函数,最方便的办法是从终点 y_N 往回进行,并把我们已经作过的变换考虑进去。设 y_s 为 $y_{i,p}$ 和 $y_{i,p-1}$ 之间的任意点,该点上正向积分值为 $U(y_s)$,利用(35)同样的变换则有 $Z(y_s) = U(y_s) p^p p^p$,是边界点上的正交矩阵,则该点上的合成解为

$$Y(y_s) = Z(y_s) \beta^p = U(y_s) p^p \beta^p = U(y_s) \beta^{p-1} \quad (37)$$

其中 $\beta^p = \begin{pmatrix} \beta_1^p \\ \beta_2^p \end{pmatrix}$, $\beta^{p-1} = p^p \beta^p$, $y_{i,p-1} \leq y_s \leq y_{i,p}$ 。

在一般情况下,对于每一个正交化点 $y_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, p$),我们在正向积分中得到了正交矩阵 p^j 。那么在 $y_{i,j}$ 和 $y_{i,j-1}$ 之间的任意点 y_s 上的解为

$$Y(y_s) = U(y_s) \beta^j, \quad y_{i,j-1} \leq y_s \leq y_{i,j} \quad (38)$$

这里 $U(y_s)$ 是正向积分值。 $\beta^j = \begin{pmatrix} \beta_1^j \\ \beta_2^j \end{pmatrix}$ 对相邻两个正交化点之间的任意点上都是常数,一旦 y_s 移到 $y_{i,j-1}$ 以下就变为另一个数值:

$$\beta^{j-1} = p^j \beta^j \quad j = p, p-1, \dots, 1 \quad (39)$$

Conte法是两步进行的,先正向积分得 $U(y_i)$ 和 p^i ,用Müller法进行迭代,以求特征值 C 。若要求特征函数,则需要保留每点的 $U(y_i)$ 和 p^i 。从 $y_N=1$ 往回进行,利用(38), (39)即可求出各点的函数值。

Conte法中正交化的判据可取一角度 Ω_m ,如 $\Omega_m=45^\circ, 60^\circ, \dots$ 。显然 $\Omega_m=0$ 就是不需要任何正交化, $\Omega_m=90^\circ$ 就是Wazzan的正规化积分。实践说明频繁地正交化不但浪费机时,精度也受影响。图1是误差和 Ω_m 关系曲线的一个例子。可见 Ω_m 的最佳值离 0° 近离 90° 远。当然,需要正交化的次数因问题不同而异。一般 K 越大,要求正交化的次数越多。实际上每一步都计算检查 \vec{Z}_1, \vec{Z}_2 的夹角,计算量也比较大。因此,正交化的判据可取一个数值 M 。当 $\max |\vec{Z}_i|^{1/2} > M$,即任意解的模超过 M 的数值时就正交化一次。当然也可规定每积分几步就正交化一次,而不必去作费时的计算。

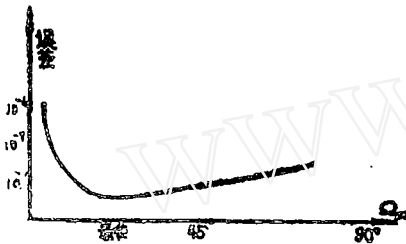


图 1

3. 完全正规化法

利用(1)是线性齐次的特点,在Conte法的基础上Davey提出了完全正规化方法(2)。

我们仍把(1)的解写成矢量形式 $\vec{Z} = (\phi, \phi', \phi'', \phi''')^T$ 。以一定的积分方法从 y_i 到 y_{i+1} 点积分应有

$$\vec{Z}_{i+1} = A^{i+1} \vec{Z}_i \quad (40)$$

其中 A^{i+1} 是 4×4 矩阵。因为(1)是线性齐次方程,因此,用数值积分从 y_i 到 y_{i+1} 点得到的 A^{i+1} 的各元素只决定于 α, R, C 以及所用的积分方法,而和初值 \vec{Z}_i 无关。利用这个性质可以很方便地得到 A^{i+1} 的各元素。取四个线性无关的初值 $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$,用Runge-Kutta法积分一步便得 A^{i+1} 的各元素。因为区间分成 N 等分,每一步都这样做,可以得到 N 个这样的矩阵, A^1, A^2, \dots, A^N 。显然,给定 C 的近似值,由这些矩阵就可以从一点的值得相邻点的值,因此我们把这些矩阵叫做传递矩阵。因为它们在每一步都是由四个完全正交的解积分得来的,按上节所述可知其误差极小。

所以这个方法叫完全正规化法。设 $y=0$ 时的解为 \vec{Z}_0 , $y=1$ 的解为 \vec{Z}_N ,则

$$\vec{Z}_N = A^N A^{N-1} \dots A^1 \vec{Z}_0 = B \vec{Z}_0, \quad B = A^N A^{N-1} \dots A^1 \quad (41)$$

如果每一点都求一个 A^i ,显然是不必要的。和Conte法类似Davey建议把区间 $(0, 1)$ 分成 p 个子区间,每个子区间包含 q 个网格点,即 $N = pq$ (p 是小的整数)。在每一个子区间中用上述方法从四个线性无关的初值出发连续积分 q 步便得一个传递矩阵 B^1 ,这样就只有 p 个传递矩阵,并使它们依次左乘,则有

$$\vec{Z}_N = B^p B^{p-1} \dots B^1 \vec{Z}_0 = B \vec{Z}_0, \quad B = B^p B^{p-1} \dots B^1 \quad (42)$$

由边界条件(2a), (2b)知, $\vec{Z}_0 = (\ ?, 0, \ ?, 0)^T$, $\vec{Z}_N = (0, 0, \ ?, \ ?)^T$ 。由(42)得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

显然应有 $\Delta = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{31} \\ b_{12} & b_{32} \end{bmatrix} = 0 \quad (44)$

(44) 就是确定特征值 C 的条件。

要求特征值 C , 就要尽量精确地计算式 (44) 的值, 这只有 (43) 中矩阵的第一、三列有很好的正交性才能做到。但是每一个传递矩阵都是积分 q 步得来的。本来正交的现在也不正交了。为此需把每个 B^i 正交化、正规化。方法是: 把 B^1 的一、三列正交化, 每一列都正规化得矩阵 C^1 。用 C^1 右乘 B^2 , 并使新矩阵的一、三列正交化, 各列都正规化得 C^2 , 再用 C^2 右乘 B^3 , ..., 以此类推。最后 $B^p C^{p-1}$, 并使其一、三列正交化、各列正规化。这就使得矩阵 B 的一、三列是正交的, 因此也就保证了计算 Δ 的准确性。

Davey 法同样用 Müller 法求特征值 C 。

这个方法的优点是比较省机时, 如不求特征函数, 所用内存很少。该方法可以用到 R 很大的情况, 比如 $R = 10^8, 10^9$ 。[2] 中计算结果说明不同 Reynolds 数所需正规化的次数 p 的最佳值都是不大的。如 $10^3 < R \leq 10^4$ 时 $p = 2$, $10^4 < R \leq 2 \times 10^4$ 时 $p = 3$, $2.25 \times 10^4 \leq R \leq 3.5 \times 10^4$ 时 $p = 4$ 。

以上四个方法都是某种形式的正交化。Kaplan 法实际上是保持两个解在每一网格点上都近似正交, Wazzan 法是保证两个解在每一网格点上完全正交, 而 Conte 法和 Davey 法则都是分段正交化。只不过 Conte 法是正交化后以得到的新值为初值继续积分, Davey 法则则是每次都从四个线性无关的初值开始积分, 而不管上一段的值是什么。微分法的优点是精度高, 求中性曲线不需要第二次迭代过程。缺点是用机时较多, 都需要预估 C 的初值。

日本的 N. Itoh 还提出过一个方法⁽⁵⁾, 其基本概念和 Davey 等方法相似, 只不过在向前积分时, 不用通常所用的 Runge-Kutta 法, 而用级数法求解。

以上论述的一些方法, 从文献中的计算结果和我们对有些方法的实际计算经验看, 有限差分法, Chebyshev 多项式近似法, Conte 的准正规化积分和 Davey 的完全正规化法都是行之有效的好方法。有限差分法突出特点是简便, 省机时, 而 Conte 法和 Davey 法则有较高的精度。它们都适用于高阶的线性常微分方程, Conte 法适用于齐次的也适用于非齐次的。但 Davey 法只适用于求线性齐次方程的特征值, 其优点是简单迅速、内存少, 可用到 R 很大的情况。Chebyshev 多项式近似方法不但有很高的精度, 而且机时也很节省。这个方法应用到非齐次情况, 对解稳定性的非线性问题是很有意义的。

参考文献

- (1) Conte, S. D., SIAM Rev., V. 8 (1966); 309—321.
- (2) Davey, A., Quart. J. Mech. Appl. Math., V. 20, 4 (1973); 401—411.
- (3) Finlayson, B. A., The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press (1972).
- (4) Gersting, John M. and Jankowski, David F., Int. J. for Numer. Methods in Eng., V. 4 (1972); 195—206.
- (5) Itoh, N., Trans. Japan Soc. Space Sci., V. 17 (1974).
- (6) Lin, C. C., The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge (1955).
- (7) Lee, L. H., Reynolds, W. C., Quart. J. Mech. Appl. Math., V. 20 (1967); 1—22.
- (8) Nachtsheim, P. R., NASA TND-2414 (1964).
- (9) Orszag, A., Jour. Fluid Mech., V. 50, 4 (1971); 689—703.
- (10) Wazzan, A. R., Okamura, T. T., Smith, A. M. O., Phys. Fluids, V. 10 (1967); 2540—2545.

- (11) 冯康, 数值计算方法, 国防工业出版社 (1978).
(12) 周恒, 赵耕夫, 力学学报, 3 (1982): 217-225.

THE SOLUTION OF THE EIGENVALUE PROBLEM OF THE ORR-SOMMERFELD EQUATION

Zhao Geng-fu
(Tianjin University)

介绍“孤立子, 物理学家的数学方法”一书

本文推荐德国数学家G. Eilenberger教授最近所写的《孤立子, 物理学家的数学方法》(Solitons, Mathematical Methods for Physicists, Berlin: Springer 1981, 192pp.)一书.

自然界存在孤立波的现象早在上一世纪就由英国造船设计师和工程师罗素(J. S. Russell)发现了. 那是一次偶然的奇遇, 罗素在10年之后1844年发表的“论波动”一文中, 对此作过生动的描绘:

“我观察过一次船的运动, 这条船被两匹马拉着, 沿着狭窄的河道迅速地前进, 被船体带动的水量不算太多. 突然, 船停止了前进, 船头周围聚集了急剧运动状态的水流, 它们形成了一个巨大的圆而光滑的水峰, 又突然离开船头, 以极大的速度向前移动. 这水峰约有30英尺长, 1至1英尺半高, 在行进中, 一直保持着这起初的形状, 速度也不减慢. 我骑着马, 紧紧跟着, 发觉它大约以每小时8至9英里的速度前进. 后来, 波的高度渐渐地减小, 1至2英里后, 才消失在蜿蜒的河道中.”

“这决不是一个被切开的通常的波,” 罗素解释道: “因为通常的波前进时, 总是一部分高于水面, 一部分低于水面. 不仅如此, 它的形状也是不同的. 它也不同于半个波, 而是一个完整的波. 这个波不是一半在水面上, 一半在水面下, 而是始终全部在水面之上. 除此之外, 这‘堆’水也不是停留在一个地方, 而是前进了相当长一段距离.”

正是由于对这一奇妙现象的深入研究, 导致了本世纪60年代一种具有“粒子”般性质, 经“碰撞”而不改变其形状和速度的波——孤立子(soliton)的发现. 而今20年不到, 孤立子的浪潮几乎已经淹没了整个科学界. 小至基本裂子, 大到木星上著名的大气红斑, 从实验室里的小水箱到太平洋沿海海面, 从超导约瑟夫森结到神经细胞轴突的传导冲动, 从DNA分子互相盘绕的螺旋在溶剂中打开或断裂到半导体掺杂过程中电子自旋的消失现象等等, 到处都出现了它们的踪迹. 科学家报道, 孤立子已经渗入到等离子体物理、基本粒子理论、天体物理、晶格物理、凝固物质物理、非线性光学、分子生物学、海洋学、生理学、流体力学、统计力学、固体物理以及通讯技术等许许多多的研究领域之中.

本书用物理工作者所熟悉的方式和语言, 对一维孤立子的数学理论和方法进行了简洁而又不失本质的阐述, 从而使当今物理学中最时兴的数学新思想新方法生动地呈现在大家面前. 本书并不追求高度的数学严密性, 一些详细的数学论证都放到书后的附录之中.

全书共分为七章, 作者始终环绕着两个最典型的孤立子方程: Korteweg-de Vries (简称KdV) 方程和 Sine-Gordon (简称SG) 方程来进行讨论. 第一章用例子介绍了孤立子及其应用. 第二、三章研究KdV方程; 其中第三章以KdV方程为例, 详细地介绍了随着孤立子的诞生而出现的数学新方法——散射反演变换. 第四章将散射反演理论推广到其他具有孤立子解的非线性发展方程中. 接下来的三章讨论了物理工作者最感兴趣的SG方程, 介绍了SG孤立子——正扭(Kink), 反扭, 孤立子与孤立子(Soliton-Soliton)的碰撞, 孤立子与反孤立子(Soliton-antisoliton)的碰撞, 呼吸子(breather)等等有趣的概念; 其中第六章仍以SG方程为例, 描述了热力学中的孤立子系统, 那里列出的一些问题, 有不少至今还没有完全解决, 涉及当前普遍感到兴趣的研究课题. 最后一章是第四章的继续, 介绍了散射反演变换在离散系统(差分方程)——Toda格的应用.

本书是作者在科伦大学讲授理论物理研究生课程的讲稿. 书中所需的数学基础并不很深, 只要具备一般物理专业所需的有关微分方程和希尔伯特空间算子理论等方面的知识就足够了.

Eilenberger教授为了使本书能成为一本自给自足的孤立子入门导引, 显然动了许多脑筋. 正如他在序言中所说, 他这本书“不仅将为读者提供新知识, 而且将使读者得到一种美的享受”. 当然, 作为一本200页左右, 教材式的入门书, 不可能对当今孤立子理论和应用的所有方面都一一阐述, 要这样做的话, 也许增加三倍篇幅还不够. 然而, 作者在书后附了一份带有说明和介绍的文献目录, 对想要深入学习和研究的读者来说, 这显然是极为有益的.

最后, 我们还要提一下, 关于本书, “欧洲物理杂志”(European Journal of Physics)曾三次作过介绍, 可见把这本书推荐给广大物理工作者不是没有意义的.

黄迅成