第13卷 第2期
1983年5月25日

力学进展
ADVANCES IN MECHANICS

Vol.13 No.2
May 25, 1983

# 流动稳定性问题

天津大学 周恒

流动稳定性是一个很大的题目，这里只着重谈谈平行流或近似平行流的稳定性，也谈一些Taylor涡的稳定性问题。

1971年，J.T.Stuart〔1〕写了一篇综述性文章，谈了到那时为止上述两方面的问题。所以这里只着重谈最近一段时间内的情况。

## 1.弱非线性理论

自Stuart和Watson〔2,3〕发表了他们的文章以来，弱非线性理论就大体定型了。但是在具体应用时，常常遇到一个麻烦，就是它们的最初形式只适用于线性化情况存在中性曲线，而参数（如波数$\alpha$及雷诺数$R$）恰好对应于中性曲线上或近旁的点的情况。而从转捩角度看，关键的情况并非如此。例如平面 Poiseuille 流的线性理论临界雷诺数为5772，而转捩在$R>1000$时就可能发生；边界层流动即使失稳自中性扰动开始（这要求来流湍流度极低），由于边界层厚度的变化，随后参数也就不是中性所要求的值了；而圆管 Poiseuille 流及平面Couette 流等，线性情况迄今还未发现有中性曲线。因此可以说，弱非线性理论的一个关键性问题，就是如何推广以适用于非临界参数情况。

Reynolds 和 Potter〔4〕在这方面作了一次重要的尝试。Itoh〔5—7〕也做了这方面的工作，而且还采用了所谓的稳定性的“空间模式”(Spatial mode)，即在线性情况的扰动模式

$$\phi_0(y)e^{i(\alpha x-\omega t)} \tag{1}$$

中，$\omega$设为实数而$\alpha$则取复数值．但Reynolds 和Potter 的方法，只能用以求扰动的周期解，而Itoh的方法要用以实际求高阶近似（高于展式的二阶项）是非常困难的。此外，对他们的方法还可以挑出其他毛病．但更重要的是，Davey和Nguyen〔8〕用R&P的方法求圆管 Poiseuille流的不稳定阈值时，得到的结果与Itoh自己求解同样的问题所得结果截然相反。前者直到$R=300$都能算出不稳定扰动阈值，而后者的结果是无论$R$取何值，都不存在不稳定扰动阈值。显然，两者与已知实验结果都不符合。Itoh〔7〕及Davey〔9〕都对这一矛盾结果进行了分析，但问题并没有解决。Herbert〔10〕和 Orszag & Kells〔11〕用数值计算法对平行流的失稳问题进行了计算，得到了一些有意义的结果．例如 O&K的计算结果表明，平面Poiseuille流在$3000<R<5772$时，对二维扰动存在不稳定扰动阈值．在$R<3000$时，二维扰动总是稳定的，但三维扰动还可能不稳定，而当$R<1000$时，则二维及三维扰动都是稳定的．这与实验结果看来是不矛盾的．但数值计算结果的一个根本弱点是只能计算扰动在有限时间内的演化情况，而稳定性的结论是根据这有限时间内的趋势估计的。因而在较长时间内的演化情况，其可靠性就是一个问题．但无论如何，数值计算的结果对问题的理解还是很有帮助的。

近来，周恒[12]在弱非线性理论的推广上做了一些工作，从概念上及从对平面Poiseuille流的应用结果来看，似乎都比其它方法好．其基本概念如下：设$\bar{u}$为未扰速度分布，而扰动流函数为$\varepsilon\psi(x, y, t, \varepsilon)$，其中$\varepsilon$为某一小参数，则$\psi$满足的方程为

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial x}-\bar{u}''\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{1}{R}\nabla^4\psi+\varepsilon J(\psi,\nabla^2\psi)=0 \qquad (2)$$

这里$R$为雷诺数，$J(\phi,\psi)=\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}$．若能将$\bar{u}$分解为

$$\bar{u}=\bar{u}_0+\varepsilon\bar{u}_1 \qquad (3)$$

其中$\max|\bar{u}|$，$\max|\bar{u}_1|$，$\max|\bar{u}_1|$都是1的量级，且代人（2）后，在令$\varepsilon=0$时所得的方程存在中性解，则在保留带$\varepsilon$的项并用通常的小参数摄动法去求解（2）时，就可避免前述参数不在中性曲线上或不存在中性曲线的困难．在〔12〕中，周恒给出了求分解式（3）的方法，并计算了亚临界情况下的一些例子．结果与Orszag的数值求解结果大体吻合，和Nishioka等人[13]的试验结果也符合得不错．但非临界情况的问题还不能认为是已完全解决了．

## 2．边界层中的稳定问题

1980年A.D.D.Craik[14]评述了边界层转捩问题实验中所发现的现象．有关边界层实验的文献可以在其中查到．

边界层流动稳定性的问题在70年代得到了新的进展．其中一个方面是开始考虑了边界层厚度变化对稳定性的影响，但还限于厚度变化对线性理论中性曲线的影响．大体有两种做法．一种是以常规的摄动法求修正项[15—17]，其中以Gaster的结果最好．在局部平行假定下，原来的理论中性曲线与实验结果比较，主要是在稍大于临界雷诺数处，实验曲线在$\alpha$方向显著高于理论曲线．Gaster的理论修正曲线，显著地减少了这一不一致的地方，但还没有能做到完全一致．另一种理论方法则用了渐近理论中的多层结构（multi-layer structure）理论[18,19]．从数学上讲，似乎比上一种更严格，但迄今没有能用这一方法得到完整的修正中性曲线．因此不能认为已经解决了问题．因此，即使在线性理论范围内，边界层厚度的影响问题也还是个没有完全解决的问题．至于如何进一步同时考虑非线性影响，则更还有待研究．

Gaster[20,21]在1974年用另一种方法，做了边界层中扰动演化的实验，随后他又做了相应的理论解释．他的实验所引入的扰动，不是二维扰动，也不是在平板展向有周期性的扰动，而是以孤立的波包形式引入的扰动．在扰动下游观测扰动演化的过程．Gaster对扰动还进行了Fourier分析，并用线性理论研究每一分量的演化．他所得到的一个重要结论是，直至发生转捩前不远的地方，准平行流假定下的线性理论还能相当好地描述扰动演化过程．但也发现在快发生转捩处，有些现象已不能用线性理论解释．而且也和早期Klebanoff等人的实验结果一样，似乎三维扰动的展向波数有某种选择性，这也不是单纯的线性理论能解释的．

三维扰动在转捩问题中起着重要的作用，是一个公认的事实．但三维扰动波数是否有自然的选择性，以及为什么在扰动演化过程中，必然会出现三维扰动，是一个在理论上还没有

弄清的问题。Craik，Usher以及Штерн等人[22—25]曾用“共振三波”（resonant triad）的概念试图对此作出解释。但是他们的理论有一个和第1节中弱非线性理论同样的问题。简单地说，“共振三波”就是设在线性问题中，存在着三个Tollmien-Schlichting波如下：

$$\left.\begin{array}{l}\phi_{10}(y)\,e^{i(\alpha_1 x-\alpha_1 c_1 t)}+C.C.\\[2ex]\phi_{01}(y)e^{i(\alpha_2 x+\beta_2 z-\alpha_2 c_2 t)}+C.C.\\[2ex]\phi_{01}(y)e^{i(\alpha x-\beta z-\alpha_2 c_2 t)}+C.C.\end{array}\right\}\tag{4}$$

如果其参数满足下列共振条件：

$$\alpha_1=2\alpha_2,\ c_{1r}=c_{2r},\ c_{1i}=c_{2i}=0\tag{5}$$

其中下标$r$及$i$分别指实数及虚数部分，则通过非线性作用，它们将相互“共振”而加强。在给定雷诺数$R$下，可能存在满足前两个条件的波，但在亚临界情况下，第三个条件就不成立。Craik等人有的干脆不要第三个条件，有的限于在中性曲线上去找“共振三波”。因而都不能算是真正说明了问题。

最近，周恒[26]推广了他在[12]中的工作，使之能用以研究亚临界情况下的“共振三波”问题，取得了部分的成功。正在针对具体的参数，求“共振三波”的演化方程。但由于边界层厚度变化的影响尚未搞清，所以只能暂时以平面Poiseuille流作为试算的模型。

Gaster 研究的只是波包在有限时间内演化的问题。Stewartson和Stuart[27]研究了二维波包的稳定性问题，Hocking等人[28]研究了三维波包稳定性问题，后来，Davey 等人[29]发现其中有个错误并重新研究了这一问题，但这三篇文章研究的都是平面 Poiseuille 流中的波包，而且要求雷诺数刚好超过临界雷诺数一点。这显然解决不了边界层中的波包稳定性问题。由于在边界层中的转捩问题中，湍斑是发展过程中必然出现的一个现象，而波包似乎是有可能用以解释湍斑发生机理的一个模型，因此如何将非临界雷诺数下波包的稳定性问题研究清楚，进而再考虑到边界层厚度变化的影响，可能是一个有意义的问题。

### 3.其他有关平行流稳定性的问题

边界层稳定性的实验相对来说多一些，平面 Poiseuille 流的实验就少得多。而平面 Poiseuille 流作为理论研究的模型来说，要比边界层容易一些。真正有可靠定量结果的平面 Poiseuille 流的实验，第一个是前面提到过的Nishioka等人的实验。该实验中有一个结果目前还无法解释，即直到$R=8000$，还有可能维持层流。而线性理论的临界雷诺数为5772。一个可能的解释是实验段不够长，以致实际虽已不稳定，但未检测出来。另一个可能的解释则是边壁的影响。因为虽然高宽比已经非常小，但终究是有限的。Hocking[30]研究了边壁对稳定性的影响，发现确实使临界雷诺数提高了。但他所得结果说明这一修正量很小，因此还不足以说明这一差别。

Nishioka等人[31]后来又发现，如果基本未扰层流在展向不均匀而呈周期性时，会显著影响稳定性问题。易见这样更容易引起三维扰动。但目前还没有人对此实验结果作出解释。Dhanak[32]在假定 Poiseuille 流的两平行平板在展向有小的波纹状起伏的边界条件下，研究了层流稳定性问题。在这样的条件下，基本层流的一级近似正是在展向具有周期性的平面 Poiseuille流。因此在这一点上，和Nishioka 等人的实验是一致的。而Dhanak的理论结果，也和实验结果定性地一致。

最近，Carlson等人[33]用可视化的方法，研究了平面Poiseuille流的转捩现象。重点是研究湍斑的发生及发展。得到了一些有趣的结果。他们发现在湍斑的前沿和后沿，都有明显的斜波。可惜这个实验定性的结果多而定量的结果少。

总之，目前实验的结果还不够多，有待于做更多的工作。

在将理论结果与实验结果比较时，还有一个问题。做实验时，扰动往往在一个地方引入，而在另一地方去检测，以看其发展趋势。这相当于看扰动在空间中的变化，因而相当于所谓的空间模式。但是分析式（2）可见，扰动方程对$t$只是一阶导数，而对坐标则是四阶导数。因而若采用通常的摄动法，则时间模式（temperal mode)要比空间模式容易处理得多。因此理论分析中大部分采用的是时间模式。这样，就有一个时间模式的理论结果如何和空间模式的实验结果比较的问题。自60年代有人正式提出(其实40年代已经遇到这个问题)这一问题后，70年代还有人[34—36]在研究并将结果推广到三维扰动情况。他们的方法基本上都是先将初始扰动表示为Fourier积分，然后利用最速下降法求积分的渐近值，这一方法可以解决线性问题中两种模式的关系。但在有限小扰动的非线性问题中，两种模式的关系如何还是一个问题。

近年来，还有人[37,38]将稳定性的概念用于剪切湍流中，用以说明湍流中的大尺度拟序结构，取得了部分的成功。

上面谈的都是与转捩有关的问题。从另一个方面说还有个全局稳定问题。即从理论上证明在一定的雷诺数下，流动对任何扰动都是稳定的。早在本世纪初，就有人以能量法证明了在雷诺数小时，流动是全局稳定的。但这种方法给出的雷诺数过于保守。以后虽经一些人的努力，直至1970年前后，Joseph 等人又做了一定的推广，但始终不能解决这一过于保守的问题。Joseph等人的工作，可以在其专著[39]中找到。用能量法只能给出偏于保守的结果，其原因也早就有人指出过。用能量法证明稳定性，要求对任何形式的扰动，在任何时候，扰动能量总是衰减的。而实际的运动，在初始扰动给定后，有其自己的演化规律。最终衰减的扰动，其扰动能量未必是单调衰减的，解决这一困难的途径，目前还没有找到。但如果和常微分方程稳定性理论做一对比，则可以想到，或许将常微分方程稳定性理论中的Ляпунов第二方法推广用于流动稳定性问题中，有可能得到较好的结果。周恒、李骊[40,41]在这方面曾做了一些尝试。但这方面的进一步工作是相当困难的，还未取得显著成效。

以上我们介绍了与平行流稳定性有关的最基本问题。从应用的角度看，如流体可压缩性，传热等等对稳定性的影响，显然也是重要的问题，而且也确实有不少人在做这方面的工作。但是上面这些是更基本的问题。其他问题的进一步解决，也只有在这些问题取得进展后才有可能。

**4.Taylor 涡的稳定性问题**

自从 G.I.Taylor 发表了经典性的文章以后，Taylor涡的问题就吸引了不少研究者。一段时间内，大家似乎认为以此为模型研究转捩问题是一个较好的途径。因为它看来与Landau提出的连续分叉（bifurcation）理论最接近。此外，这一问题与诸如轴承中的流动有关，因而也有其实际意义。

但后来发现，问题并不象想象中那样的简单。特别是实验装置总是有限长的。由于端部的影响，实际Taylor涡并不是在某一雷诺数（或Taylor数）下突然发生，而是随雷诺数的增加逐步从端部向中间发展的，因此从理论研究来说，不能限于无限长圆柱的情况。

从实验上说，Cole[42]在1976年发现，如果说第一次分叉的临界雷诺数在圆柱较长时不

太受圆柱实际长度的影响，则第二次分叉点的雷诺数就明显地受圆柱长的影响。1976年Fenstermacher 等人[43]从实验结果又发现，Taylor涡环在经过两次分叉以后，流速即呈不规则状而变为乱流(Chaotic motion)，似乎又说明Landau的模型未必能说明转捩现象。近年来，Benjamin 和Mullin[44]对有限长且两端有固定端盖的同心圆柱做Taylor涡实验时，又发现了许多新的现象。例如他们发现，在同一超临界雷诺数下，竟可能存在15种不同的定常涡环模式。因此Taylor涡的问题实际比人们想象的要复杂得多。特别是如果圆柱是有限长时。

上面这些实验结果还未能从理论上给以很好的解释。近年来，Stuart, DiPrima 及Hall 等人[45,46]，曾对有限长圆柱的Taylor涡问题进行研究。但他们都要求两端端盖是可变形的，显然不能完全说明问题。数值计算也是相当困难的，因为固定端盖与旋转圆柱交点处速度不唯一的问题必须首先设法解决。

Benjamin[47]曾用抽象分叉理论解释过有限长圆柱中Taylor 涡环多重可能性的问题。根据定性理论，若存在 $n$种稳定的定常解，则必然还存在$n+1$个不稳定的定常解。因此，若实验中存在15种不同的定常涡环，则因为它们都是稳定的(不稳定的不可能在实验中实现)，必然还有相当数量的不稳定涡环与之对应。由此可见Taylor涡环问题在数学上实际也是一个极为复杂的问题。它本身有其特点，与平行流的稳定性问题是不同的两个类型。

最后，我们要简单地提一下，转捩问题的理论研究在较长时间内似乎只有理论价值，而对实际问题不起很大作用。这一方面固然是因为其难度很大，短期内还不可能指望它能直接提供工程计算准则。另一方面，过去很多工程问题，例如飞行器的设计，在很大程度上要依赖于风洞实验。而在实验过程中，也可解决转捩点的问题。但随着计算力学的发展，工程设计将逐步地更多依赖于计算。而若不解决转捩点的问题，就不可能完全解决计算问题。因此，从理论上解决转捩问题，对于减少工程计算对实验的依赖来说，就不是个可有可无的问题。虽然问题的本身确实很困难，但经过很多人的努力，也取得了相当大的进展。我们希望有更多的人，特别是青年力学及应用数学工作者，参加这一问题的研究。

## 参考文献


〔1〕Stuart, J. T., Ann. Rev. of Fluid Mech., 3 (1971): 347-370.
〔2〕——, J. Fluid Mech., 9 (1960): 352-370.
〔3〕Watson, J., ibid, 9 (1960): 371-389.
〔4〕Reynolds, W. C. & Potter, M. C., ibid, 27 (1967): 465--492.
〔5〕Itoh, N., Tran. Soc. Aero. Sci. (Japan), 17 (1974): 160-174.
〔6〕——, J. Fluid Mech., 82 (1977): 455-467.
〔7〕——, ibid, 82 (1977): 469-479.
〔8〕Davey, A. & Nguyen, ibid, 45 (1971): 701-720.
〔9〕——, ibid, 86 (1978): 695-703.
〔10〕Herbert, Th., Proc. AGARD Symp. on Laminar Turb. Transition, AGARD-CP-224, Pap. No.3(1977).
〔11〕Orszag, S. A. & Kells, L. C., J. Fluid Mech., 96 (1980): 159-205.
〔12〕Zhou, H. (周恒), Proc. Roy. Soc. Lond., A381 (1982): 407-418.
〔13〕Nishioka, M., Iida, A. & Ichikawa, Y., J. Fluid Mech., 72 (1975): 731-751.
〔14〕Craik, A. D. D., ibid, 99 (1980): 247-266.
〔15〕Bouthier, M., J. Mec. (法文), 12 (1973): 75.
〔16〕Ling, C. H. & Reynolds, W. C., J. Fluid Mech., 59, (1973): 571-591.
〔17〕Gaster, M., ibid, 66 (1974): 465-480.
〔18〕Smith, F. T., Proc. Roy. Soc. Lond., A366 (1978): 91-109.
〔19〕Bodonyi, R. J. & Smith, F. T., ibid, A375 (1980): 65-92.
〔20〕Gaster, M. & Grant, I., ibid, A347 (1975): 253-270.
〔21〕——, ibid, A347 (1975): 271.
〔22〕Craik, A. D. D., J. Fluid Mech., 50 (1971): 393-413.

〔23〕 Usher, J. R. & Craik, A. D. D., ibid, 66 (1974): 209-221.
〔24〕 ——, ——, ibid, 70 (1975): 437-461.
〔25〕 Штерн, В. Н., Изв. АН СССР, Мех. Жид.и газа,5 (1976): 29—34.
〔26〕 Zhou, H. (周恒), On the resonant triad for the plane Poiseuille flow in the subcritical range (1983) (摘要登于1983年第2届亚洲流体力学会议论文集).
〔27〕 Stewartson, K. & Stuart, J. T., J. Fluid Mech., 48 (1971): 529-545.
〔28〕 Hocking, L. M., Stewartson, K. & Stuart, J. T., ibid, 51 (1972): 705-721.
〔29〕 Davey, A., Hocking, L. M. & Stewartson, K., ibid, 63 (1973): 529-536.
〔30〕 Hocking, L. M., J. of Appl. Math. and Phy., 29 (1978): 99-111.
〔31〕 Nishioka, M., Iida, S. & Kanbayashi, S., Proc. 10th Turb. Symp. Inst. Space Aeronaut. Sci., Tokyo Univ. (1978): 55-62.
〔32〕 Dhanak, M. R., Proc. Roy. Soc. Lond., A385 (1983): 53-84.
〔33〕 Carlson, R., Widnall, S. E. & Peeters, M. F., J. Fluid Mech., 121 (1982): 487-506.
〔34〕 Nayfeh, A. H. & Padhye, A., AIAA J., 17 (1979): 1084-1090.
〔35〕 Nayfeh, A. H., ibid, 18 (1980): 405-416.
〔36〕 Cebeci, T. & Stewartson, K., ibid, 18 (1980): 398-405.
〔37〕 Liu, J. T. C. & Merkine, L., Proc. Roy. Soc. Lond., A352 (1976): 213-247.
〔38〕 Alper, A. & Liu, J. T. C., ibid, A359 (1978): 497-523.
〔39〕 Joseph, D. D., Stability of Fluid Motion I, II, Springer-Verlag. (1976)
〔40〕 周恒，力学学报，8，1 (1965): 28-37.
〔41〕 周恒、李骊 (1983) (将登在《应用数学和力学》第4卷第4期.)
〔42〕 Cole, J. A., J. Fluid Mech., 75 (1976): 1-15
〔43〕 Fenstermacher, P. R., Swinney, H. L. & Gollub, J. P., ibid, 94 (1979): 103-128.
〔44〕 Benjamin, T. B. & Mullin, T., ibid, 121 (1982): 219-230.
〔45〕 Stuart, J. T. & DiPrima, R. C., Proc. Roy. Soc. Lond., A372 (1980): 357-365.
〔46〕 Hall, P., ibid, A372 (1980): 357-356.
〔47〕 Benjamin, T. B. & Mullin, T., ibid, A377 (1981): 221-249.

# ON THE PROBLEMS OF HYDRODYNAMIC STABILITY

Zhou Heng (H. Zhou)
(Tianjin University)

上接第Ⅳ页

153 Скотт П., Томкинс Б., 腐蚀疲劳在评价水反应堆可靠性时的意义, “Коррозион. усталость мет., Тр. 1 Сов.-Англ.семинара, Львов, 19—22 мая, 1980”, Киев (1982): 310—331. 参24
154 Теребушко О. И., 加肋板的稳定性和优化设计, Прикл. мех., 18, 6 (1982): 69—74, 参69
155 工藤英明 (Kudo H.), 金属塑性加工体系分类方法试验, 日本机械学会志, 85, 761 (1982): 401—407
156 大久保胜夫 (Okubo M.), 应力腐蚀裂纹及其预防, 材料, 30, 337 (1981): 963—974. 参64
157 大桥义夫 (Ohashi Y.), 复合载荷下金属的非弹性变形和本构律, 日本机械学会论文集, A48, 428 (1982): 389—394. 参52
158 山川宏等, 日本机械力学研究现状, 日本机械学会志, 85, 765 (1982): 834—840. 参444
159 山田敏郎 (Yamada T.), 可儿弘毅 (Kani K.), 关于超高压及其研究动向, 日本机械学会论文集, A48, 432 (1982): 975—980. 参58
160 木内学 (Kiuchi M.), 金属塑性加工分析法最近动向, 日本机械学会志, 85, 761 (1982): 373—379. 参22
161 中村恒善 (Nakamura T.), 上谷宏二 (Uetani K.), 弹塑性结构物的临界性状, 材料, 30, 333 (1981): 535—548. 参70
162 石田诚 (Isida M.), 二维弹性理论的发展 (着重早期研究工作), 日本机械学会论文集, A48, 433 (1982): 1083—1091; 434 (1982): 1239—1234. 参109
163 田岛清灏 (Tajima K.), 与流体运动耦合的振动, 同上, C48, 425 (1982): 3—10. 参53
164 北川浩 (Kitagawa H.), 塑性应变局部化现象研究最近动向, 同上, A48, 427 (1982): 250—258. 参78
165 矢川元基 (Yagaw G.), 塑性不稳定断裂综述, 同上, A48, 425 (1982): 3—10. 参51
166 米谷茂 (Yonetani S.), 残余应力及其应用, 材料科学, 19, 3 (1982): 125—130. 参12
167 西冈俊久 (Nishioka T.), Satya N. A., 动态断裂力学的有限元模拟, 日本机械学会志, 85, 759 (1982): 138—145. 参31
168 竹内洋一郎 (Takeuti Y.), 关于瞬态热应力的分析, 日本机械学会论文集, A48, 430 (1982): 699—706
169 ——, 野田直刚, 须见尚文, 热应力分析的问题及其研究动向 (1) (2), 机械の研究, 34, 7 (1982): 775—778; 8 (1982): 903—905. 参86 (下转第241页)