关于热弹性力学的耦合理论

上海交通大学　范绪箕　陈国光

主要符号

u_i——位移分量	β——热应力系数
ϵ_{ij}——应变分量	c_v——定容比热
σ_{ij}——应力分量	λ_t——导热系数
T——温度	κ——导温系数
λ,μ——Lamè常数	Q——热源密度
ρ——密度	δ——耦合系数
α——线膨胀系数	v_e——膨胀波波速

作为固体力学的一个分支学科，热弹性力学已经有很长的历史了．近三、四十年以来，热弹性力学的基本理论日趋成熟，应用日益广泛，已经成为一个相当活跃的研究领域．耦合理论就是它的较为引人注目的课题之一．

各向同性材料非耦合线性热弹性力学的基本方程由Fourier热传导方程

$$\lambda_t T_{,ii}+Q=\rho c_v \dot{T} \tag{1}$$

和运动方程

$$(\lambda+\mu)u_{j,ij}+\mu u_{i,jj}-(3\lambda+2\mu)\alpha T_{,i}=\rho\ddot{u}_i \tag{2}$$

组成．在求解一般的应力问题时，首先由方程(1)确定在指定的边界条件和初始条件下的温度分布，然后再由方程(2)和相应的初始和边界条件求解位移场和应力场．

我们知道，Fourier热传导方程是在“单元体体积不变”的假定下导出的．这一假定忽略了应变场对温度场的作用．事实上，弹性性体的变形引起的体积改变将或多或少地影响热量的传递．因此，方程(1)所反映的热传导规律是近似的．

1956年，Biot对方程(1)进行了修正[1]．他放弃了体积不变的假定，在根据热力学第一定律建立能量平衡时考虑了变形功，导出了修正的Fourier热传导方程

$$\lambda_t T_{,ii}+Q=\rho c_v \dot{T}+(3\lambda+2\mu)\alpha T_o \dot{u}_{i,i} \tag{3}$$

方程(3)的最后一项是由弹性体的体积改变引起的．它表示导入弹性体的热量不仅引起温度上升，一部分还转变为变形功．这一项就是温度场和应变场的耦合项．由于耦合项的存在，温度场不能独立地确定，而必须与运动方程联立求解，这便大大增加了问题的复杂性．因此，对于热应力问题，研究耦合效应究竟在什么条件和多大程度上对问题的解产生影响，不考虑耦

合将会引起多大的误差，这是一个具有重要意义的问题．

对耦合问题较早进行研究的是 Boley 和 Weiner[2]．1960 年，他们引入了一个无量纲参数——材料的耦合系数δ：

$$\delta=\frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha^2T_0}{\rho^2c_v v_e^2}$$

其中$v_e=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$为膨胀波在弹性介质中的波速．于是方程(3)可以改写为

$$\lambda_t T_{,ii}+Q=\rho c_v\dot{T}\left[1+\delta\cdot\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\cdot\left(\frac{\dot{u}_{i,i}}{\alpha\dot{T}}\right)\right] \tag{4}$$

因此，若

$$\frac{\dot{u}_{i,i}}{3\alpha\dot{T}}\ll\left(\frac{\lambda+2\mu/3}{\lambda+2\mu}\right)\cdot\frac{1}{\delta} \tag{5}$$

则方程(4)的右边括号中的第二项就远小于 1，因而可以略而不计，方程(4)就退化为方程(2)．他们计算了在$T_0=93.3$°C时铝和钢的δ值，结果铝为 0.029，钢为 0.014．对于这两种材料，上述条件成为

$$\frac{\dot{u}_{i,i}}{3\alpha\dot{T}}\ll 20 \tag{6}$$

他们认为，如果温度分布没有突变，或在时间过程中没有不连续，那么可以直观地预料，$\dot{u}_{i,i}$ 和 $\alpha\dot{T}$ 和同阶量．因此，不考虑耦合项是有理由的．

条件(5)说明，耦合项的影响是由材料的耦合系数δ和变形率两方面的因素决定的．若材料的耦合系数很小，变形比较缓慢，则耦合影响可以忽略不计．同时，由于耦合的影响与变形速率相联系，因此，耦合问题只有作为动态问题处理时才有较大的意义．

在同一著作中，Boley 和 Weiner 以一个简单的实例进行了进一步的分析：初始状态温度均匀分布、不受外力的无限介质，受给定的热内源：$Q(x,t)=Q_0(1-e^{-t/t_0})\cos(x/L)$加热．其中$Q_0$，$t_0$，$L$为常数．$t_0$决定了热源的加热速度，$t_0$越小，$Q(x,t)$达到最大值$Q_0$的时间越短．得到的解答位移$u(x,t)$和温度$T(x,t)$的表达式相当复杂．在仔细研究了这两个表达式后得到以下结论：

(1)　耦合效应的物理实质是对热弹性波的阻尼．

(2)　当耦合系数δ很小时，在很短时间内，这种阻尼的影响非常微小．

(3)　只要加热不太快(即$t_0\gg10^{-6}$秒)，那末当时间很长时，不仅是耦合效应，而且动态效应也没有多大影响．准静态解是足够精确的．

1962 年，Boley 和 Tolins 研究了半空间的耦合问题[3]．他们解了三个问题：(a)Boley 问题——半空间表面突然施加一均匀应变ϵ_0，而表面温度始终保持不变；(b)半空间表面温度突然有一跳跃，而表面位移保持为零；(c)Danilovskaya 问题——半空间表面温度突然有一跳跃，而表面保持自由．问题(a)和问题(b)在一定的条件下可以简单地类比，而问题(c)的解可通过前两个问题的解的线性叠加得到．所以他们集中分析了问题(a)．在对基本方程和相应的初始、边界条件进行 Fourier 正余弦变换，求得了映象空间的位移和温度的解以后，因为逆变换不能直接实现，只得从温度和应变在热弹性波的波前处的不连续性、$t\to0$的情形和$t\to\infty$时的情形三个方面来进行分析．根据文[4]提出的 Fourier 正余弦变换解的不连

续性判定定理，可以直接从象空间的解判定应变和温度的不连续性，而不必进行逆变换．他们把三个问题的不连续性列成表格．对于问题(a)，应变 ϵ_{xx}/ϵ_0 在波前 $x=v_e t$ 处发生突变 $e^{-\delta t_1/2}$，其中 $t_1=tv_e^2/\kappa$ 为无量纲时间．这说明，应变的突变以膨胀波的波速 v_e 在介质内传播，而耦合系数 δ 的作用在于使这种突变减小．因为在非耦合情况，即 $\delta=0$ 时，在波前始终有 $\epsilon_{xx}/\epsilon_0]_{x+}-[\epsilon_{xx}/\epsilon_0]_{x-}=1$．尽管对一般的工程材料 δ 的值很小，但由于 v_e 是一个很大的量(对钢 v_e 约为 10^6 厘米/秒)，这种突变在时间 t 很小时就消失了．耦合作用使应变(应力、温度等等)在波前的突变迅速衰减，这是耦合问题的重要特性之一．

在时间 t 非常小时，他们用数值方法进行逆变换．得到的短时间解不仅反映了不连续性，而且说明了，在膨胀波的波前未到达时，温度逐渐下降，而当波前到达后，温度又回升，最后趋向于零．在非耦合的情形，单纯的机械扰动不引起介质内的温度变化．这也反映了耦合作用的影响．

当时间非常大时，他们通过一系列的积分求极限的过程得到的耦合解趋向于准静态解．

几乎同时，Nariboli 用 Laplace 变换的方法考察了有一半径为 a 的球形空腔的无限介质，空腔壁温度突然有一个跳跃的问题[5]．在时间 t 很小时得到的环向应力 δ_θ 的表达式由两部分组成：一部分是扩散部分，另一部分代表以膨胀波的波速传播的应力波．在波前 $r=a+v_e t$ 处应力不连续，其大小与 $\frac{a}{r}e^{-\delta v_e(r-a)/2\kappa}$ 成正比．对于铝，$\delta v_e/2\kappa$ 大约为 10^5 的量级，所以这种不连续很快就消失了．除了十分靠近空腔壁的部分以外，应力的不连续是不明显的．在耦合系数 δ 很小的条件下，解出了空腔壁表面 $r=a$ 处的环向应力 δ_θ．开始时，δ_θ 迅速上升到最大值，又下降到静态解以下，再逐渐上升，趋近于静态解．而耦合作用则自始至终减小了动态解对静态解的偏离．

Hetnarski 用 Goodier 热弹性位移势法求解了半空间的 Danilovskaya 问题[6]．引入热弹性位移势函数Φ：$u_i=\Phi_{,i}$，并将基本方程、应变、应力、温度的表达式以及初始、边界条件都用 Φ 来表示，然后进行 Laplace 变换．在时间 t 很小时，逆变换可以实现，得到的结果与文〔3〕吻合．

他还用同样的方法研究过无限介质中的点热源的问题[7]．求得的解答也只在时间 t 很小的条件下才适用．对铜($\delta=0.0168$)给出的温度分布表明，耦合与非耦合温度的最大差别只有 0.25% 左右，而且随着距离的增加而迅速减小．若取热源 $Q=1$，则得到的温度和应力的表达式就分别是无限体耦合问题温度和应力的 Green 函数．

Mahalanabis 研究过半无限弹性细杆自由端受到周期性加热的问题[8]．

1964 年，Hetnarski 用级数方法解了无限介质中的点热源问题[9]．引入热弹性位移势并对基本方程进行 Laplace 变换以后，他用算子方法求解，再将解得的象空间温度和应力展成耦合系数 δ 的级数，然后再进行逆变换求出温度和应力的表达式．在推导过程中有一些技巧，特别是在逆变换上下了很大功夫．最后得到的温度和应力的表达式，在耦合系数 δ 很小的条件下，适用于任意时间．而且，两个表达式具有这样的特点：第一项就是非耦合解，而以后各项表示了耦合的影响．取的项数越多，精度越高．

由于精确地求解耦合问题在数学上有很大的困难，许多近似方法便应运而生了．其中较值得注意是摄动法[10]和迭代法[11]．

Soler 和 Brull 提出了耦合问题的摄动方法[10]．他们以耦合系数 δ 为小参数，建立了摄动法一般方程，并且证明了摄动解的收敛性．他们计算的 Boley 问题的结果与文〔3〕的精确

解相当接近.这说明，摄动法可以较简便地得到相当精确的结果.

迭代法是 Wilms 提出的[11].他也计算了 Boley 问题.对基本方程(2),(3)进行 Laplace 变换，对于一维情形有：

$$\tilde{u}_{,xx}-\frac{p^2}{v_e^2}\ddot{\tilde{u}}-\frac{\beta}{\rho v_e^2}\tilde{T}_{,x}=0 \qquad (2a)$$

$$\tilde{T}_{,xx}-\frac{c_v p}{v_e^2}\dot{\tilde{T}}-\frac{\rho c_v \delta p}{\beta}\dot{u}_{,x}=0 \qquad (3a)$$

式中$\tilde{u}$，$\tilde{T}$分别表示象空间的 u 和 T. 在方程(2a)中，令$\tilde{T}_{,x}=0$，根据初始和边界条件解出$\tilde{u}$，然后代入方程(3a)中解出$\tilde{T}$,再将$\tilde{T}$代入(2a)中第二次求出$\tilde{u}$,……. 这样反复迭代 2—3 次,得到的映象空间中的应变和温度,虽然只是近似地满足基本方程,但表达式毕竟简单一些.在耦合系数 δ 很小的条件下能够实现逆变换,得到的解适用于"较长的时间和较大的距离".所谓较长的时间，对 Boley 问题是指 $t>10^{-10}$ 秒(对铜)，而较大的距离则是指大于半空间表面到波前的距离的 1 %.因此， Wilms 解实际上对相当大的时间和空间的范围都是适用的. Boley 问题的Wilms 解关于波前处的不连续性与精确解[3]完全吻合，而应变值只有极其微小的差别.

Dilon 解了几个半无限杆的耦合问题[12].他采用 Laplace 变换方法，而对难于进行逆变换的四个函数用数值方法进行计算.

如果说以上文献主要是在 δ 很小的情况下考察加载速率在耦合问题中所起的作用(载荷的突变是加载速率的极限情况)，那末〔13〕和〔15〕则集中研究了耦合系数 δ 的影响.Dilon 研究了一种非常特殊的情况： $\delta=1$[13]. 这时问题大为简化，逆变换也较易实现. 他计算了三个问题：(a)半无限长杆一端速度突变问题；(b)半无限杆的 Boley 问题；(c)半无限杆的 Danilovskaya 问题. 结果表明，在 $\delta=1$ 时，耦合作用有相当明显的影响.特别是(a),(b)两个问题的非耦合解完全一样，而在 $\delta=1$ 时却有非常显著的不同. 因此作者认为，"耦合的影响总是非常微小"的说法是不能令人信服的.

当然，文〔13〕所考虑的是一种假设的情况.目前还不存在 $\delta=1$ 的材料，而一般的材料 δ 的值都非常小.但对有一些塑料[14]，如果把它们近似地看作弹性材料的话，它们的 δ 值高达 0.5. 因此文〔13〕的讨论并不是没有意义的.而且在用数值方法计算耦合问题时，$\delta=1$ 的精确解可以为计算的方法和程序是否正确提供一个校核.

Kovelenko 解决了无限大平板上下表面绝热，受到突然施加的压力 q 的作用的问题[15].取$q=981\times10^5$Pa,在时间很长时,若平板由钢制成，温度只上升 0.18°C；若平板由塑料制成，温度将上升 9.4°C.这一实例有力地说明了 δ 在耦合问题中的作用.

Boley 和 Hetnarski 全面地研究了半空间体耦合问题的不连续性的传播[16].他们考虑了在半空间表面上分别施加应变、应力、温度和热流的阶跃或脉冲等共 16 种不同边界条件下，在热弹性波波前处所发生的应变、应力、温度等物理量的跳跃. 首先将基本方程写成无量纲形式，引入热弹性位移势 Φ，将方程和初始、边界条件都用 Φ 表示，然后进行 Laplace 变换.在 16 种不同的边界条件下分别求出象空间的解，然后根据 Boley 的积分变换解的不连续性判定定理[4]，逐一分析了在各种不同的边界条件下的各物理量在波前的不连续性，并制成详细表格. 对于其他许多边界条件的问题可以通过这些已知的解的线性组合得到，而不必另行详细求解.

Achenbach 提出了判定应力(应变、温度)在波前的不连续性的特征线法[17]. 利用这种方法，不连续性可以不解微分方程而简单地判定，而且得到的结果可以统一适用于平面波、柱面波和球面波(只要代入相应的坐标参数 $p=0,1,2$). 比应用 Boley 的积分变换解的不连续性判定定理〔4〕方便得多. 因为波前的不连续性随时间而迅速衰减是耦合问题的一个重要特性，所以尽管特征线法的优越性仅限于判定不连续性，它仍是一种很有价值的方法.

文〔17〕还考察了无限长实心圆柱和实心球表面应力突变的情形. 这时在 $r=0$ (柱轴心或球心)处，应力的不连续趋于无穷. 但在离中心很近的地方，不连续就达到了有限值. 应该指出，柱轴心或球心处的应力不连续趋于无穷大，实际上意味着该处的应力趋于无穷大. 这是不合理的. 就这一点而言，文〔17〕的结果还不是十分圆满.

最近，Bahar 和 Hetnarski[18]把变换矩阵法推广到分层材料的耦合问题. 这种方法对分层材料特别有效. 在进行了 Laplace 变换后求映象空间的解时，若用通常的方法，每两层材料之间的界面上有四个条件，n 层材料则需要联立求解 $4(n-1)$ 个方程来确定 $(4n-1)$ 个常数. 而用变换矩阵法只需进行 4×4 矩阵的相乘，比通常的方法简单得多. 但这种方法只对求映象空间的解提供了方便，而对耦合问题的最主要困难——逆变换，没有什么帮助.

耦合热弹性问题的变分原理和广义变分原理，已经有了很大的进展. 应用这些变分原理，用有限元法求解耦合问题，也已作过一些尝试，取得了一定的成功. 由于详细阐述这方面的工作需要较大的篇幅，这里不拟赘述，仅在篇末列出有关的文献〔1，19—28〕.

从以上的简略回顾可以看到，虽然已经有许多作者进行了研究，取得了不少有意义的成果，但总的说来，耦合理论至今还很不成熟，需要进行进一步的研究. 以往的工作都集中于一维问题，但也还不能说一维问题已经解决得很完善. 事实上，由于逆变换的限制，对于一维问题也往往只能得到短时间 $t\to0$ 和长时间 $t\to\infty$ 的解. 在除此以外的时间范围内，解的性质还研究得不够仔细. 对一些重要现象，例如文〔17〕所反映的球心或圆柱轴心应力的不连续趋于无穷的问题，还没有进行过具体的分析.

二维、三维的问题，如平面问题、轴对称问题以及更一般的问题的研究还未深入展开. 当弹性波沿两个方向传播的时候，特别是在这两个方向的材料性质不同时，耦合作用的特点，性质和影响较之一维情形有多大的改变，还很不清楚. 毫无疑问，这是一个令人感兴趣的问题.

迄今为止，积分变换法还是解决耦合问题的一个主要方法. 在继续深入地研究耦合问题时，尽管仍然不能低估这种方法的作用，但可以预料，对各种近似方法和数值方法寄于更大的希望，也许更为明智. 在解决一维问题时，摄动法、迭代法等近似方法就能较简便地得到相当精确的结果，如何继续发展这些方法，并把它们应用于更复杂的问题，还有许多工作要做. 至于数值方法，诸如快速 Fourier 变换、数值 Laplace 变换和有限元法在耦合问题上的应用和推广，也值得加以研究. 特别是有限元法，虽然已经作了一些工作，取得了一些成功，但还有很大的潜力.

应该着重提出的是，到目前为止，耦合问题的工程应用还没有受到足够的重视. 由于在一般的问题中，耦合效应的影响十分微小，因此它在工程应用中的重要性常被忽视. 事实上，如前所述，当动态效应较为明显、材料的耦合系数较大时，耦合效应将有显著的影响. 现在，在工程实际中应用的材料越来越多样化，工程问题中的动态效应越来越受到关注. 很清楚，随着科学技术的发展，耦合问题的重要意义将会越来越明显. 目前，应用的研究开始引起了

注意.据报道[29]，国外已经提出根据耦合理论通过测量温度的微小变化来测定动态载荷下的表面应力的新技术．这种新技术已经初步应用于工业部门，比通常的应变片测量方便，精确度也更高.这一实例说明，耦合问题的工程应用具有广阔的前景.

最近，耦合问题的研究又出现了一些新的动向．它已经不局限于线弹性的范围，进入了更加广阔的天地.在广度方面，处理弹塑性、粘弹性材料已经有了不少成果，而在纵深方向，对热传导方程进行进一步的修正以导出更精确的基本方程也作了一些探索．同时，耦合的概念正在进一步扩大，开始考虑温度场、应变场、电磁场等等的耦合．这样的更加一般、更加深入的研究，将会大大地加深人们对耦合现象的物理本质的理解，从而为热应力理论奠定更加坚实的基础，同时也必然在更加广泛的工程领域里不断促进它的应用．总之，耦合热应力理论的研究正在孕育新的突破，它的蓬勃发展是可以预期的.

参 考 文 献

(1) Biot, M.A.(1956), Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, *Journal of Applied Physics*, **27**: 240.

(2) Boley, B.A.and Weiner, J.(1960), "Theory of Thermal Stress", Wiley and Son, New York and London, P.42.

(3) Boley, B.A.and Tolins,I.S. (1962), Transient coupled thermoelastic boundary value problems in the half-space, *Journal of Applied Mechanics*, **29**: 637.

(4) Boley, B.A.(1962), Discontinuities in integral-transform solutions, *Quarterly of Applied Mathematics*, **19**: 273.

(5) Nariboli,G.A. (1961), Spherically symmetric thermal shock in a medium with thermal and elastic deformations coupled, *Quart. Journ. Mech.and Applied Math*, **14**: 75.

(6) Hetnarski, R.B.(1961), Coupled one-dimensional thermal shock problem for small times, *Archiwum Mechaniki Stoswanej*, **13**: 295.

(7) Hetnarski, R.B.(1964), The fundamental solution of the coupled thermoelastic problem for small times, *Archiwum Mechaniki Stoswanej*, **16**: 23.

(8) Mahalanabis,R.K.(1963), Approximate solution of a one-dimensional coupled thermo-elastic problem, *Indian Jr.Theoretical Physics*, **11**: 85.

(9) Hetnarski, R.B.(1964), Solution of the coupled problem of thermoelasticity in the form of series of functions, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, **16**: 916.

(10) Soler, A.I.and Brull, M.A.(1965), On the solution of transient coupled thermoelastic problems by perturbation techniques, *Journal of Applied Mechanics*, **32**: 389.

(11) Wilms, E.V.(1964), On coupling effects in transient thermoelastic problems, *Journal of Applied Mechanics*, **31**: 719.

(12) Dillon, O.W.(1967), Coupled thermoelasticity of bars, *Journal of Applied Mechanics*, **34**: 137.

(13) Dollon, O.W.(1965)Thermoelasticity when the material coupling parameter equals unity, *Journal of Applied Mechanics*, **32**: 378.

(14) Lever, A.E.and Rhys, J.(1958), "The Properties of Testing of Plastic Materials", Chemical Publishing Company, New york, P.150.
(15) Kovenlenko, A.D.(1969), "Thermoelasticity", Wolters-Noordhoff.
(16) Boley, B.A.and Hetnarski, R.B.(1968). Propagation of discontinuities in coupled thermoelastic problems, *Journal of Applied Mechanics*, **35**: 489.
(17) Achenbach, J.D.(1967), The propagation of stress discontinuities according to the coupled equations of thermoelasticity, *Acta Mech.*, **3**: 342.
(18) Bahar, L.Y.and Hetnarski, R.B.(1980), Coupled thermoelasticity of a layered medium, *Journal of Thermal Stresses*, **3**: 141.
(19) Parkus, H.(1968), "Thermoelasticity", Blaisdell Publishing Comp.
(20) Nickell, R.E.and Sackman, J.J.(1968), Variational principles for linear coupled thermoelasticity, *Quarterly of Applied Mathematics*, **26**: 11.
(21) 钱伟长(1980), 变分法及有限元, 科学出版社.
(22) Herrmann, G.(1963), On variational principles in thermoelasticity and heat conduction, *Quarterly of Applied Mathematics*, **21**: 51.
(23) Ben-Amoz, M.(1965), On a variational theorem in coupled thermoelasticity, *Journal of Applied Mechanics*, **32**: 943.
(24) Rafalski, P.(1968), A variational principle for the coupled thermoelastic problem, *International Journal of Engineering Sciences*, **6**: 465.
(25) Oden, J.T.and Kross, D.A.(1968), Analysis of the general coupled thermoelasticity problems by the element method, "Proceedings Second Conf.On Matrix Method", Air Force Flight Dynamics Laboratory.
(26) Nickell, R.E.and Sackman, J.L.(1968), Approximate solution in linear coupled thermoelasticity, *Journal of Applied Mechanics*, **35**: 255.
(27) 王洪纲(1980), 耦合热弹性平面问题的有限元法基本方程, 应用数学和力学, 第一卷.
(28) 陈国光(1981), 横向同性材料轴对称耦合热弹性问题的有限元方法, 上海交通大学研究生毕业论文.
(29) Contactless techanique measures stress by thermal emission (1981), *Engineer's Digest*, **42**: 40.

※※

(上接447页)

例如定期召开疲劳学术讨论会，除综合性的讨论会外，随着工作的进展，还可以就疲劳研究的各个分支召开更专门的讨论会，以促进各行业各学科之间的交流；进一步巩固和发展已经取得的研究成果，将这些成果进一步推广和应用到工程中去，在工程应用中发挥更大的作用；进一步加强对疲劳基本规律的认识和研究，使疲劳设计和分析的各种方法具有更坚实的理论基础，更快地赶上国际上的先进水平.

伍义生