

非线性水波理论新发展

中山大学 周清甫

一、早期的工作

非线性水波理论是流体力学中一个重要而又十分困难的课题，一直引起力学和应用数学工作者的注意。虽然摆线波理论在造船界沿用至今，但在此领域内取得的第一个富于理论性的成果是 Stokes (1847) 的工作 [1]。他得到的非线性周期波渐近解不仅证明了周期波列的存在，而且指出了波数及频率与振幅有关这一重要结论。这正是非线性波在本质上有别于线性波的重要特征，导致各种非线性效应。他在后期工作中还指出 [2]，这种周期波在最大陡度时，其波峰变尖，波峰的夹角为 120° ，此时波峰处水质点速度 u 等于相速 c 。因此如果有更陡的波出现的话，则由于 $u > c$ 导致波型歪曲而破碎。然而 Stokes 展式的收敛性一直未得到证明。直到 1921 年 Nekrasov [3] 在研究非线性周期是否存在的工作中，提出了一个积分方程，指出对于相当小的波振幅，此积分方程有周期波解。不久 Levi-Civita [4] 证明，当波的陡度充分小时 Stokes 展式收敛。比较完整的证明由 Krasovskii [6] 得到。早期在浅水波方面的工作有几点值得指出。Scott Russell [7] 是第一个观察到孤立波并且注意加以研究的人，不过他未能在理论上证明孤立波的存在。Boussinesq [8] 以水深对波长的比为小参数得到了以他命名的近似方程，找到了孤立波解。

Korteweg & de Vries [9] 通过类似的处理导出了著名的 KdV 方程，找到了由雅可比椭圆函数表示的周期解。由于他们用了 Cnoidal Wave 一词命名这种周期波，所以一直沿用至今。Keller [10] 从浅水波高阶近似的研究中重新得到了孤立波和周期波。

在 100 多年的时间里，虽然取得了以上所述的一些结果，但由于非线性波问题十分困难，人们把主要的注意力集中在线性水波方面。非线性水波理论得到迅速的发展是近 20 年的事。追究其原因，可能是：(1) 各国为取得能源、开发海洋、控制有害天气、发展海上运输的要求日益迫切，以前可以避免的问题，现在不解决就不行了；(2) 应用数学有了很大的发展，特别是各种奇异摄动理论和非线性发展方程的解法为研究水波理论提供了强有力的工具；(3) 计算机和测试设备不断完善。

非线性引起水波之间的干扰和共振，这是 60 年代首先受到重视的方向。这方面我校孙明光 [11] 已写了综合文章。在此只想指出两个十分重要的工作。一个是 Phillips [12, 13] 关于共振干扰的研究。两个波数、频率分别为 (k_1, σ_1) ， (k_2, σ_2) 的基本波相

乘就得到一个新的波数 $k = k_1 + k_2$ 和新的频率 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, 如果 (k, σ) 也满足频散关系, 则 (k, σ) 形成一个新的波。而 $(k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2), (k, \sigma)$ 就组成一个相互激发的波系。此时如果能量较小的波在干扰中不断从其他两个波中得到能量而充分增长, 则可能产生不稳定现象, 这组波系就成为一个共振波系。基于这一思想 Phillips 研究了重力波的共振干扰问题, 指出对于表面重力波的共振干扰不在二阶干扰中出现, 而三阶干扰中将存在着共振干扰。他的工作促进了一系列干扰和共振问题的研究, 使非线性水波理论研究日益活跃起来。另一重要工作是 Benjamin [14, 15] 的两篇文章。他使两个同主波接近的“边波带”(Side bands)与主波的自干扰(主波平方项)组成一组三阶共振干扰波系, 从而证明了无限水深中的 Stokes 波不稳定; 有限水深情况下, 当 $kH > 1.363$ 时 (H 为水深, k 为波数) Stokes 波也不稳定。由于自然界中这种边波带的干扰总是存在的, Stokes 波不可能长期维持它原来的形状。这项研究对水波的调制理论有深远的影响。

60 年代在水波共振干扰方面的研究内容十分广泛, 总结性文章 [16] 作了全面的介绍。下面着重谈谈近期的若干研究工作。分三个方面: 浅水波理论, 有限水深非线性波调制, 非线性周期波。

二、浅水波理论

目前研究的非线性水波在某种意义上是“弱”非线性的。这使我们能用小参数描述非线性效应, 从而可以用各种摄动方法来求解方程。有两个小参数十分重要。一是 $\alpha = a/H$ (a 为波幅), 它表征非线性加速度项对当地时间导数项的比, 表现了振幅弥散。它使重力波的波峰变尖而波谷变平; 另一是 $\beta = (H/\lambda)^2$ (λ 为波长), 它表征相位的弥散, 波长越长传播越快。这两个小参数之比 α/β 称为 Ursell 数。以前的浅水波理论认为 $\alpha \gg \beta$, 方程中保留 α 而忽略 β 的影响就得到 $h_t + (uh)_x = 0$, $u_t + uu_x + gh_x = 0$ 。它可以与气体力学一维非定常运动相比拟。二维浅水波方程以及它的适当修改形式用来研究水跃现象、河口潮汐波、河渠流动、近海环流以及其他某些大范围流动问题, 特别是对于近海环流的数值计算近年来有很大发展。但由于这种理论只强调了振幅弥散作用, 振幅不大的波动将沿传播方向使波的陡度愈来愈大以至破碎, 因此不存在有周期波。这显然是不符合实际的。

浅水波理论的发展着重在对浅水弥散波的研究。要同时考虑到 α, β 的影响, 控制方程就变成著名的 KdV 方程以及各种类似的方程。Whitham [18] 在这方面作了详细的讨论, 但限于一维情形(指水平空间维度)。最近 Ablowitz [19] 用多重尺度法推导了二维重力-表面张力浅水弥散波的调制方程, 是目前较普遍的一种形式。他所研究的情形实际上是“近一维”的, 即主波沿一个方向传播但允许在两个方向上进行调制。最初研究它的动机是水池试验的需要。因为要想水池所造出的波真正是单方向传播的, 除非水池的宽度比波长窄得多, 这难以办到。因此要在试验中考虑到两个方向调制的影响。按 [19] 的记号, 我们表示波数 $\mathbf{k} = (k, l)$, 则“浅水”、“弥散”、“近一维”体现

在下面三个假定中: $\alpha \equiv \varepsilon = a/h \ll 1$ $(kh)^2 \ll 1$ $(1/k)^2 \ll 1$ 并认为它们同阶。如果以平均水深为单位尺度, 则水平方向 x 的改变尺度为 $\varepsilon^{-1/2}$, t 的尺度为 $(gh)^{-1/2} \varepsilon^{-1/2}$, 而 y 方向在调制中的慢变尺度为 ε^{-1} 。引入多重尺度变量 $r = \varepsilon^{1/2} [x - (gh)^{1/2} t]/h$, $s = \varepsilon y/h$, $\tau = \varepsilon^{3/2} (gh)^{1/2} t/h$, 并取表面升高为 $\eta = \varepsilon h \zeta(r, s, \tau)$, 代入自由表面条件, 这将在三阶近似式中出现 Secular 项。令此项为零, 就得到调制方程

$$[2\zeta_r + 3\zeta\zeta_r + (1/3)\zeta_{rrr}]_r + \zeta_{..} = 0 \quad (2.1)$$

它与 Kadomtsev [20] 所得方程一致。如果加上表面张力作用, (2.1) 变为

$$\{2\zeta_r + 3\zeta\zeta_r + [(1/3) - \bar{T}]\zeta_{rrr}\}_r + \zeta_{..} = 0 \quad (2.2)$$

其中 T 为表面张力系数与流体密度之比, 而 $\bar{T} = T/gh^2$ 。(2.1) 可被积分:

$$2\zeta_r + 3\zeta\zeta_r + (\frac{1}{3} - \bar{T})\zeta_{rrr} - \int_r^\infty \zeta_{..} dr = 0$$

如果不考虑 y 方向调制和表面张力作用, 就得到 KdV 方程

$$2\zeta_r + 3\zeta_r\zeta + (1/3)\zeta_{rrr} = 0 \quad (2.3)$$

它的标准形式为

$$\zeta_r - 6\zeta\zeta_r + \zeta_{rrr} = 0 \quad (2.4)$$

一个自然的想法是把 KdV 方程推广到轴对称或一般空间问题(长波)。Chwang & Wu [21] 得到了轴对称情形的调制方程

$$\left. \begin{aligned} \zeta_r + (1/r)((1+\zeta)ru)_r &= 0 \\ u_r + uu_r + \zeta_r &= \frac{1}{3}[\frac{1}{r}(ru)_r]_{..} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

u 为径向平均(按水深)速度。他们用此模型研究了海中地震波的传播问题。

Peregrine [22] 和 Svendsen [23] 研究了长波在缓慢变化的海底上传播问题, 得到方程(等倾斜海底情形, α 为海底斜度):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{1}{3} \alpha^2 x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \alpha^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (\alpha x + \eta) u \} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

类似的方程还可在其他波动问题中碰到。例如关于不同密度的两层流体界面波的调制, Benjamin [24] 导出了相应的方程; 而非定常空泡问题中, 文章 [25] 也研究了波的发展问题。

Gardner 等 [26] 提出的逆散射变换方法 [Ablowitz [2] 称之为逆散射变换方法 (IST)] 是求解非线性发展方程的开创性工作, 有力地促进了非线性水波理论的发展。他们对 KdV 方程在“紧支”初值条件下找到了求得精确解的方法。设初值为 $\zeta_0(x)$, KdV 方程(2.4)的解为

$$\zeta(t, x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, y, t) \quad (2.7)$$

$K(x, y, t)$ 满足 Gelfand-Levitan 积分方程

$$K(x, y, t) + B(x + y, t) + \int_n^{\infty} K(x, z, t) B(z + y, t) dz = 0 \quad (y > x)$$

其中 $B(s, t)$ 是由 $\zeta_0(x)$ 决定的已知核函数

$$B(s, t) = \sum_n \gamma_n \exp\{-k_n s + 8k_n^3 t\} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(k) \exp\{iks + 8ik^3 t\} dk$$

k_n 是由 Schrödinger 方程

$$\Psi_{,xx} + (\lambda - \zeta_0(x))\Psi = 0 \quad (2.8)$$

所决定的有限个离散特征值, γ_n 是相应特征函数 Ψ_n 的规范化常数

$$\gamma_n = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^2 dx \right\}^{-1}$$

而 $\beta(k)$ 是散射问题 (2.8) 的反射系数。

每个离散的特征值对应于一个孤立波。如果对应于 $\zeta_0(x)$ 有 n 个特征值, 则 $\zeta_0(x)$ 所规定的解由 n 个孤立波与一个随时间衰减的尾波组成。因此在 $t \rightarrow \infty$ 的渐近状态, 解发展成为有限个孤立波。这种由初始波型“聚焦”为有限个孤立波的现象是最令人感兴趣的非线性效应之一。对应于一个特征值的孤立波为

$$\zeta(x, t) = -2k^2 \operatorname{sech}^2\{kx - 4k^3 t + S\}$$

S 为常数。由此看到它的特性: (1) 孤立波在传播过程中保持形状不变; (2) 以不变速度传播; (3) 对以速度 $(gh)^{1/2}$ 前进的观察者来看, 它的相速是振幅的 2 倍, 越强的波传播越快。KdV 方程存在有孤立波和周期波 (见本文第四节), 这些都是“永形”波。可见对于波动问题而言, KdV 方程比经典浅水波方程更为符合实际。

孤立波相互作用问题有许多人研究, 所谓“追撞”问题就是其中之一。两个传播方向相同的孤立波碰撞时波形如何变化, 可从精确解得到解答。这相当于 (2.8) 只有两个不同特征值的情形。设它们为 $k_1 > k_2 > 0$ 。如果相撞前两孤立波为

$$\zeta_1 = -2k_1^2 \operatorname{sech}^2 k_1(x - 4k_1^2 t - S_1 - \frac{1}{2k_1} \ln r)$$

$$\zeta_2 = -2k_2^2 \operatorname{sech}^2 k_2(x - 4k_2^2 t - S_2)$$

则碰撞后分别变为

$$\zeta_1 = -2k_1^2 \operatorname{sech}^2 k_1(x - 4k_1^2 t - S_1)$$

$$\zeta_2 = -2k_2^2 \operatorname{sech}^2 k_2(x - 4k_2^2 t - S_2 - \frac{1}{2k_2} \ln r)$$

其中 $r = [(k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)]^2$ 。可见: (1) 两孤立波相撞后波型不变; (2) 对于强波 (对应于 k_1) 碰撞后相位增加 $\ln r/2k_1$, 而弱波减少 $\ln r/2k_2$ 。可以想象有限个孤立波在 $t \rightarrow \infty$ 的状态是自右至左按强弱整齐地排列着 (以上结论是对向右传播的波而言)。[18] 中指出孤立波相撞问题也可以通过变换

$$\zeta = -2(\log F)_{xx} \quad (2.9)$$

得到解答, 此时 KdV 方程变为

$$F(F_x + F_{xxx})_x - F_x(F_x + F_{xxx}) + 3(F^2_{xx} - F_x F_{xxx}) = 0 \quad (2.10)$$

此方程前两项都含有 $F_x + F_{xxx}$, 而最后一项是导数齐次型的。所以可通过它找指数形式的解。如果把 F 展开为渐近级数 $F = 1 + F^{(1)} + F^{(2)} + \dots$, 则指数形式的解可通过下面的程序得到(并不是正规摄动法):

$$\left(F_x^{(1)} + F_{xxx}^{(1)}\right)_x = 0, \quad \left(F_x^{(2)} + F_{xxx}^{(2)}\right)_x = -3 \left\{ F_{xx}^{(1)} - F_x^{(1)} F_{xxx}^{(1)} \right\} \quad (2.10)$$

以上的思想被 Miles [28] 推广到孤立波斜相交问题中, 得到了一阶解(对 α, β 而言)。他首先指出有两种相交, 一种是“弱相交”, 意指在一阶近似中允许两个解叠加。这表现了相互作用时间是短的, 如迎头相撞问题。另一种是“强干扰”, 此时两个解叠加不组成新解, 还要加入耦合项。设 2ψ 是两孤立波之间的夹角, α 是波幅与水深之比。当 $K \equiv \sin^2 \psi = O(\alpha)$ 时产生“强干扰”。他用类似于 (2.10) 的程序得到了斜相交的完整解答, 研究了孤立波的反射问题, 指出在一定条件下反射具有“相守恒”性质, 也可能产生“奇干扰”使反射波变形。

两孤立波迎头相碰的高阶最近由 C.H.Su [29] 求得。他用的是变形坐标法。首先取波架坐标

$$\xi_0 = \varepsilon^{1/2} k(x - C_k t), \quad \eta_0 = \varepsilon^{1/2} l(x + C_l t)$$

k, l 是两个波的波数。考虑到碰撞后相位的改变, 他又引入坐标变形的变换

$$\xi_0 = \xi - \varepsilon k \theta(\xi, \eta), \quad \eta_0 = \eta - \varepsilon l \phi(\xi, \eta)$$

θ, ϕ 在求各级渐近解中决定。他再将 θ, ϕ, C_k, C_l 以及待求函数展开为 ε 的幂级数, 代入自由水面条件求解。得到了三阶的完整解答, 发现碰撞后相位移随 ξ, η 而改变, 这会引起波型扭歪, 这与一阶解波形不变的结论不同。Su 又分析了这种波型扭歪的慢时间发展, 发现碰撞后除产生总的相位移之外, 还在孤立波之后拖出一个小波列群, 不过它们的振幅是随时间衰减的, 而传播方向与主波相反。他的结果与 Chan & Street [30] 及 Maxworthy [31] 的数值计算和试验作了比较, 两者相吻合。

三、非线性水波调制理论

Benjamin-Feir 关于二维 Stokes 波在边波段干扰下当 $kH > 1.363$ 时不稳定的结论, 在两个方面推动了非线性波的研究。(1) Stokes 波是对时间变量进行调制而得的非线性波, 而 Benjamin-Feir 关于边波段干扰的理论是基于对振幅进行调制。因此, 能否对频率和振幅同时进行调制而得到新的调制方程, 从这新的方程出发研究波的稳定性? (2) Stokes 波在斜向和横向干扰下稳定性如何? 这些问题的研究导致有限水深的非线性波调制理论的发展。

首先是 Benney 和 Roskes [35] 应用多重尺度方法研究弱非线性水波调制的长时间

发展,得到了波列的波包缓慢变化的发展方程。1972年 Hasimoto 和 Ono [36]用同样方法处理了一维波列问题(此处“一维”指水平方向维度),指出其波包满足非线性 Schrödinger 方程,并通过此方程研究了 Stokes 波的稳定性,得到了与 Benjamin-Feir 相同的结果。他还指出沿此途径研究稳定性问题的优点。后来 Davey 和 Stewartson [37]研究了二维波缓慢调制,导出其波包发展方程为二个非线性偏微分方程,它在形式上与 Schrödinger 方程相似。还得到了不同于一维情形的新的不稳定性判别准则。不过他们的工作仅限于重力波。在这方面最普遍性的研究是 Djordjevic 和 Redekopp [38]的工作。他们考虑了重力-表面张力二维水波调制,给定了稳定性判别准则。在这方面工作的还有 Longuet-Higgins [39, 40], Ankar 和 Freeman [41]以及 Stuart 和 Diprima [42]。最近 Ablowitz 和 Segur [19]的工作综合了这方面的发展概况,研究了在有限水深情况下孤立波和波导波包的稳定性,指出了二维波所特有的聚焦(focusing)现象。

在弱非线性波中,研究其振幅、相位、频率和波数随时间缓慢变化的传播波。具体说,设在 $t=0$ 时刻,水面的自由表面升高为 $z = \zeta$

$$\zeta(x, y, t=0) = \varepsilon [i\omega/g(1+\bar{\eta})] \{ A(\varepsilon, \varepsilon_y) e^{ikx} - A^* e^{-ikx} \} \quad (3.1)$$

其中 $\bar{\eta} = k^2 T/g$, ε 是表征弱非线性的小参数, A^* 表示 A 的复共轭, k, ω 分别是波数和频率,它们之间由频散关系联系。

当此波从初始时刻开始随时间发展时,其振幅、相位、频率和波数不断进行调制。问题中除有普通的时间空间尺度外还有慢变时间空间尺度,所以应用多重尺度法进行分析。

Djordjevic 和 Redekopp 研究了沿 x 轴方向单方向传播的波,其波幅等参数允许在 x, y 方向上进行调制。他们引入的多重尺度为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varepsilon(x - C_g t), \quad \eta = \varepsilon y \\ \tau &= \varepsilon^2 t, \quad \xi_1 = \varepsilon^2(x - C_g t) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式中 C_g 为群速度:

$$\begin{aligned} C_g &= \partial\omega/\partial k = C_r [\{ (\sigma + kh(1-\sigma^2))/2\sigma \} + \{ \bar{\eta}/(1+\bar{\eta}) \}] \\ C_r &= \omega/k, \quad \sigma = \tanh(kh). \end{aligned}$$

推导出(3.1)中波包应满足的方程为

$$iA_\tau + \lambda A_{\xi\xi} + \mu A_{\eta\eta} = \nu |A|^2 A + \nu_1 \Lambda Q \quad (3.3)$$

$$(gh - C_g^2) Q_{\xi\xi} + gh Q_{\eta\eta} = \kappa (|A|^2)_{\eta\eta} \quad (3.4)$$

$$\lambda = \omega''(k)/2, \quad \mu = \omega'(k)/2k$$

$$\begin{aligned} \nu &= (k^4/4\omega) \{ [(1-\sigma^2)(9-\sigma^2) + \bar{\eta}(3-\sigma^2)(7-\sigma^2)] / [\sigma^2 - \bar{\eta}(3-\sigma^2)] \\ &\quad + 8\sigma^2 - [3\sigma^2 \bar{\eta}/(1+\bar{\eta})] - [8C_g^2/(gh - C_g^2)(1+\bar{\eta})] [(C_r/C_g)^2 \\ &\quad + (C_r/C_g)(1-\sigma^2)(1+\bar{\eta}) + (gh/C_g^2)(1-\sigma^2)^2(1+\bar{\eta})^2] \} \end{aligned}$$

$$\nu_1 = (k^4/\omega) [(C_r/C_g) + (1/2)(1-\sigma^2)(1+\bar{\eta})]$$

$$\kappa = ghC_g [2C_g + C_g(1-\sigma^2)(1+\bar{\eta})] / [(gh - C_g^2)(1+\bar{\eta})]$$

$$Q = (C_g/k^2) \Phi_{\xi}^{(1,0)} + [C_g/(gh - c^2)] \{ [2C_r/(1+\bar{\eta})] + C_g(1-\sigma^2) \} |A|^2$$

而 $\Phi^{(1,0)}$ 是势函数的最低阶值。如果只考虑一阶调制过程,就可以通过求解(3.3), (3.4)

而得到波束(Packets of waves)

$$\Phi = \Phi^{(1,0)}(\xi, \eta, \tau) + A(\xi, \eta, \tau) \exp\{i(k - \omega t)\} \cosh k(z+h) / \cos(kh) \quad (3.5)$$

(3.5)中的 $\Phi^{(1,0)}$ 不依赖于 z ,它表现了调制过程中的平均流动,按浅水近似意义看,也可以说表现了一种长波,它是由于短波的二级自干扰产生的。

如果只考虑平面重力波,令 $\partial/\partial\eta=0$, $\bar{T}=0$ 则得到非线性 Schrödinger 方程

$$i(\partial A/\partial\tau) + \lambda(\partial^2 A/\partial\xi^2) = \nu|A|^2 A \quad (3.6)$$

Zakharov 和 Shabat [43] 首先用逆散射方法求得了(3.6)在初值条件下的精确的解。Ablowitz [27] 对其解法作了推广,指出对于一个“紧支”的初始条件,(3.6)总可以用逆散射方法求解,不过当 $\lambda\nu < 0$ 时存在有孤立波,后面还拖着一个随时间衰减的波列。当 $\lambda\nu > 0$ 时没有孤立波存在。[27]中还给出产生孤立波的条件。

目前,方程(3.3),(3.4)或(3.6)的具体应用是用它们分析波列的稳定性。Hasegawa 等用方程(3.6)得到了二阶 Stokes 波稳定性判别准则,指出当

$$\lambda\mu < 0 \quad (3.7)$$

时,这种波列不稳定。此准则对应于 $kH > 1.363$,所以与 Benjamin 的结果一致。Djordjevic 根据此判别式画出了重力-张力 Stokes 波稳定图(图1)。

图中曲线 1.5 对应 $\nu=0$,曲线 2 对应于 $\lambda=0$,曲线 3 上有关系式 $\bar{T} = \sigma^2/(3-\sigma^2)$,这是重力-张力波的二阶调和共振条件[44];而曲线 4 上有关系式 $C_s^2 = gh$,此时短张力波的群速与长重力波的相速相匹配,产生长短波的共振。对于这两种共振情况,上述调制理论不成立(这从系数 ν 的表达式在曲线 3、4 上有奇异性可以看到),必须用不同的尺度进行多重尺度分析。曲线 1—5

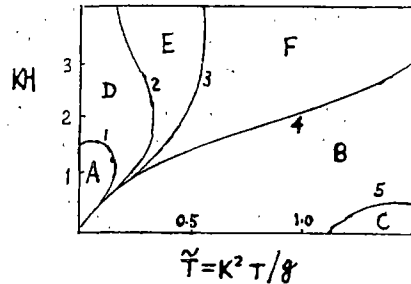


图 1

把 (\bar{T}, kH) 平面分为 A, B, C, D, E, F 六个区域。区域 A, B, E 内, $\lambda\mu > 0$, Stokes 波稳定;而区域 C, D, F 内 $\lambda\mu < 0$,运动不稳定。值得注意的是,在不稳定区域都存在有孤立波包,而稳定区域不存在孤立波包。这揭示了孤立波包与不稳定性之间的联系,比 Benjamin-Feir 的分析更深刻。当 $T=0$ 时对应于重力波情形,而曲线 1 正好经过点(0, 1.363)。

Ablowitz [19] 从方程(3.3),(3.4)出发证明了孤立波包在横向长波干扰下不稳定。孤立波包为

$$A = a|2\lambda/\mu|^{1/2} \operatorname{sech}(a\xi) \exp\{i\lambda a^2 \tau\}$$

而横向扰动波为 $(u+iv)\exp(i\lambda a^2 \tau)$

$$u, v \sim \exp\{ip\eta \pm iQ\tau\}$$

他指出,如果横向波是长波,即 $|p| \ll 1$,则在区域 C, D, F 内, u, v 将随时间而指数地增长。他还指出另一种可能的情形,如果对 Stokes 波只进行横向调制,则可认为 $\partial/\partial\xi$ 波 $=0$ 。(3.3)成为

$$iA_\tau + \mu A_{\eta\eta} = \nu|A|^2 A$$

在区域B, C, F内, $v < 0$ (而 μ 恒大于0), 所以存在有孤立波。他称之为“波导”, 他证明在“波导”存在的B, C, F区域, 对于长波的干扰也是不稳定的。

最后我们介绍两个在水池中由Yuen和Lake [45, 46] 完成的试验。两个试验都证实了非线性 Schrödinger 方程能很好地描写(深水)水波的调制过程。1975年的试验说明一个其波包为紧支型的波列随时间发展为一串以孤立波为包络的波列。1977年又对深水均匀波列作了试验, 还对记录作了波谱分析。指出波列随时间的发展服从 Fermi-Pasta-Ulam 循环现象: 分为三个阶段, 第一阶段调制成服从 Benjamin-Feir 不稳定规律, 测得边波段(干扰波)依指数增长; 第二阶段, 波能从集中于个别几个频率传递到许多频率上, 调制变强, 以至个别的波峰调制为0; 在强调制下, 这阶段产生以孤立波为包络的波列; 第三阶段是反调制过程, 能量又重新集中到初始波型的几个频率上, 波型回复到原来形状。测试结果还指出波长在三个阶段保持不变。他们对方程(3.6)作了数值计算。证实了这种循环现象的存在。

四、高阶周期波

非线性周期波的研究日益活跃的原因有两方面。一是波浪对结构物的作用的研究要求对周期波有更多的了解。[47]中研究 Stokes 波对圆柱的散射问题便是很好的说明。另一是理论上的兴趣。KdV方程和 Schrödinger 方程只能表现一阶近似解(对 α, β 而言), 因此高阶波的研究就成了非线性水波理论的另一重要内容。究竟高阶的永形波是否存在? 最高波高的周期波与水深有怎样的关系? 波破坏的条件是什么? 这些问题无疑地是十分吸引人的。下面分别介绍 Stokes 波和浅水周期波的一些近期的工作。

目前对 Stokes 波研究的目的, 是在尽可能宽的参数范围内(水深、波高等范围)找到统一的、可靠的、收敛较快的数值计算方法。采用的基本方法还是 Stokes 提出的 Fourier 级数展开法。他选择第一项系数 a_1 为小参数, 对深水波计算到 $O(a_1^5)$, 对一般水深算到 $O(a_1^3)$, 相速 c 总是波高 h 的单调函数, 似乎可以一直做下去。但是 Schwartz [47] 用此法计算到 $O(a_1^7)$ 时发现 a_1 不是 h 的单调函数, 而是最初它随 h 增加而增加, 达到某个峰值, 其后随 h 增加而减小。一个 a_1 值可以对应于两个 h , 这表明 a_1 不能作为小参数。他的计算还表明, 如果波型超过某个陡度, 波高超过一定高度, Fourier 级数就不收敛。为了克服这些困难, 他选用了新的小参数, 又首先在周期波计算中引进了 Pade 求和法。这两个问题的解决为高阶周期波的数值计算开辟了一条新路。Cokelet [48] 详细地讨论了高级 Stokes 波问题, 得到了十分完善的结果。象前人一样, 他取以波速 c 随波运动的坐标系 (X, Y) 记作 $Z = X + iY$, $W = \phi + i\psi$ 。把 Z 看作为 W 的函数, 再利用底部条件和波型对称条件得到 Z 的展式(d 为水深)

$$Z(W) = -\frac{W}{c} + i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j} \left(e^{ijW/c} - e^{-2jd} e^{-ijW/c} \right) \quad (4.1)$$

将其代入自由表面条件, 并且将 a_j 等展开为某个小参数 ϵ 的幂等数 (K 为伯努利数):

$$a_j = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{jk} \varepsilon^{j+2k}, \quad C = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \varepsilon^{2l}, \quad K = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_l \varepsilon^{2l}$$

可得到一组决定 $\alpha_j, \gamma_l, \Delta_l$ 的方程组。但是这组方程并不封闭,还必须指定 ε 的形式,即 ε 与 α_j 等的具体关系。前已指出, ε 的选取与计算的可靠性和收敛性有重大关系。它的选取的原则是要求在计算范围内(从线性波到最大波高的尖峰波)满足:(1)级数收敛快速;(2)它的变化范围在(0, 1)之间;(3)是水深 h 的单调函数。据此 Cokelet 选取 ε 为

$$\varepsilon^2 = 1 - [q^2 \dots q^2 \dots q_{\text{max}}^2 / C^4] \quad (4.2)$$

q, \dots, q_{max} 分别为水粒子在波峰和波谷处的速度。要从(4.2)找到 ε 与 α_j 等的关系,还要用到 Stokes 的一个猜想(已被各作者普遍采用):在最大波高波的波峰处,其水粒子速度等于波的传播速度。在相对坐标系来看,此处水粒子速度为零。有了这些条件就可得到一个辅助方程,使基本方程组封闭。Cokelet 给出了求解方程组的路线。为了检验方法的可靠性,用 Pade 求和法计算到 $O(\varepsilon^{16})$ 阶,这对大部分的水深和波高范围能提供至少六位有效数字的精度。方法可应用于各种水深,对最大波高的 Stokes 波同样有效。通过大量计算得到的主要结果是:

1. 见图 2,对各种水深振幅 a 是 ε^2 的单调增加函数,所以 ε 的选取是合理的。 $\varepsilon^2 = 1$ 对应于最大波高的波。

2. 见图 3,它是波速与 ε^2 的关系。而动能、势能与 ε^2 的关系也与图 3 类似,可见最大波速、最大能量不是在最强的波上达到(即波高最大的波,它对应于 $\varepsilon^2 = 1$),而是在稍小于最大波高的 Stokes 波上达到(式中 C_0 为线性相速)。

3. 计算出的最大波高值为(H 为波高)

e^{-d}	d/λ	H/λ
0	∞	0.141055
0.3	0.191618	0.114430
0.5	0.110318	0.079100
0.7	0.056766	0.043740

4. 波型,见图 4。在近波峰处,对接近于最大波的一些波出现了波面的相交,此点与能量极值不在最大的 Stokes 波上达到的结论是吻合的。

Cokelet 的结果还提出了一些有意义的问题,例如一个波,其能量对应于两个波高,

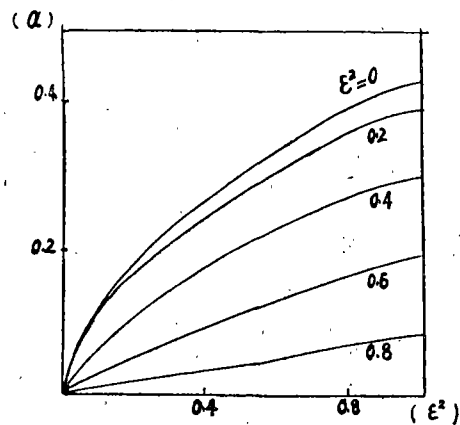


图 2

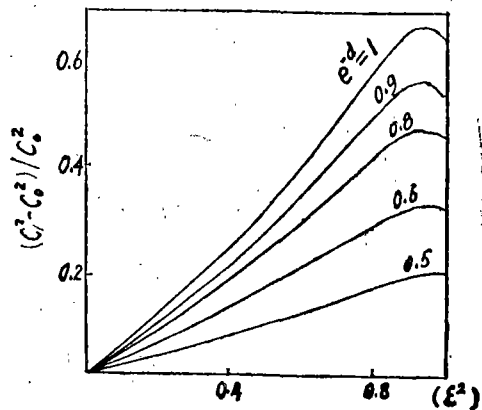


图 3

此时是否不稳定。如果是这样的话,那么要在水池中造出很高的波是不可能的。

关于浅水周期波的研究首先归功于 Korteweg & de Vries, 他们在推导出 KdV 方程的同时, 给出了“Cnoidal 波”解, 它是一阶的浅水周期波。70 多年后 Laitone [49] 才求得了二阶周期波解。最近 Fenton [50] 提出了一个有效的方法求解后发现各级无量纲流函数 F_n 可以表示为十分简单的形式:

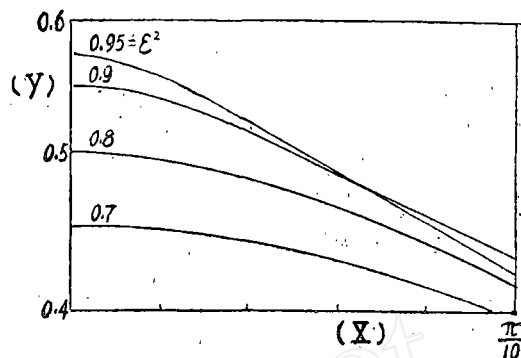


图 4

$$F_n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n F_{nkl} [Cn^2(\alpha X_*/m)]^k m^l \quad (4.3)$$

α 为小参数, F_{nkl} 为常系数, Cn 为雅可比椭圆函数, X_* 为无量纲空间坐标, 而 m 是 Cn 的模。计算结果发现无量纲波长比 8 大的波可用 (4.3) 的五项计算便可得到满意的精度; 波长小于 8 的波应用 Stokes 展式计算。如果波高较小, Stokes 展式与 (4.3) 给出的解有较大范围的重合, 例如: 波高/水深 = 0.2 时, Stokes 展式对波长/水深 = 12 时仍有效。(4.3) 对于波长/水深 < 5 时也仍有效。当计算积分量(如能量、波速)时, 即使波高/水深 = 0.65, 用 (4.3) 仍有较高精度。

最后要提一提, 对于非线性水波理论中的许多重要问题, 例如, 同近海环流有关的浅水波方程数值解, 波浪破碎问题, 内波问题等, 本文没有提到。

参 考 文 献

- [1] Stokes, G.G. (1847), On the theory of oscillatory waves, *Camb. Trans.*, 8:441—473.
- [2] Stokes, G.G. (1880), *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 1, Cambridge University Press.
- [3] Nekrasov, A.I. (1921), *IZV Ivanovo-Voznesensk, Politekhn. Inst.*, 3:52.
- [4] T. Levi-Civita (1925), *Math. Ann.*, 93:264—314.
- [5] Struik, D.J. (1926), *Math. Ann.*, 95:595—634.
- [6] Krasovskii Yu.P. (1960), *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 130:1237.
- [7] Scott Russell, J. (1844), Report on Waves, Brit. Assoc. Rep.
- [8] Boussinesq, J. (1871), *C.R. Acad. Sci., Paris*:755.
- [9] Korteweg, D.J. & de Vries, G. (1895), *Phil. Mag.*, 39, 5:422.
- [10] Keller, J.B. (1948), *Comm. Appl. Math.*, 1:323.

- [11] 孙明光, 重流体中非线性波动力学, 未发表.
- [12] Phillips, O. M. (1960), *J. Fluid Mech.*, **9**, 1:193.
- [13] Phillips, O. M. (1961), *J. Fluid Mech.*, **11**, 2:143.
- [14] Benjamin, T. B. (1967), *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **299**:417—430.
- [15] Benjamin, T. B. and Feir, J. E. (1967), *J. Fluid Mech.*, **27**: 417—430.
- [16] LeBlond, P. H. and Lawrence, A. M. (1979), *SIAM Review*, **21**, 3:289.
- [17] 易家训, 流体力学.
- [18] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*:464.
- [19] Ablowitz, M. J. and Harvey Segur (1979), *J. Fluid Mech.*, **92**, 4: 691.
- [20] Kadomtsev, B. & Petviashvili, V. (1970), *Sov. Phys. Dokl.*, **15**:539.
- [21] Chwang, A. T. & Wu, T. Y., *Cylindrical solitary waves, Lecture Notes in Physics Vol. 64, Waves on Water of Variable Depth.*
- [22] Feregrine, D. H. (1967), *J. Fluid Mech.*, **27**, 4:815.
- [23] Svendsen, A. (1978), *J. Fluid Mech.*, **87**, 3:433.
- [24] Benjamin, T. B. (1967), *J. Fluid Mech.*, **28**:559—592.
- [25] Wijngarden, L. V. (1968), *J. Fluid Mech.*, **33**, 3:465.
- [26] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M. (1967), Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:1095—1097
- [27] Ablowitz, M. J. (1978), *Stud. Appl. Math.*, **58**:17—94.
- [28] Miles, J. W. (1977), *J. Fluid Mech.*, **79**, 1:157—169.
- [29] Su, C. H. and Mirie, R. M. (1980), *J. Fluid Mech.*, **98**, 3:509.
- [30] Chan, R. K. C. & Street, R. L. (1970), *J. Comp. Phys.*, **6**:68—94.
- [31] Maxworthy, T. (1976), *J. Fluid Mech.*, **76**:177.
- [32] Dryuma, V. (1974), *Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys.*, **19**:387.
- [33] Chen, H. (1975), *J. Math. Phys.*, **16**:2382.
- [34] Satsuma, J. (1974), *J. Phys. Soc. Japan*, **40**.
- [35] Benney, D. J. and Roskes, G. T. (1969), *Stud. Appl. Math.*, **48**:377.
- [36] Hasimoto, H. and Ono, H. (1972), *J. Phys. Soc. Japan*: **33**.
- [37] Davey, A. and Stewartson, K. (1974), *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **338**:101.
- [38] Djordjevic, V. D. and Redekopp, L. G. (1977), *J. Fluid Mech.*, **79**, 4:703.
- [39] Longuet-Higgins, M. S. (1978), *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **360**:471.
- [40] Longuet-Higgins, M. S. (1978), *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **360**:489.
- [41] Anker, D. and Freeman, N. C. (1978), *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **360**:529.
- [42] Stuart, J. T. and Diprima, R. C. (1978), *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*

362:27.

- [43] Zakharov, V. E. & Shabat, A. B. (1972), *Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys.*, **34**:62.
- [44] Mcgoldrick, L. F. (1970), *J. Fluid Mech.*, **42**:193.
- [45] Yuen, H. C. & Lake, B. M. (1975), *Phys. Fluid*, **18**:956.
- [46] Lake, B. M. & Yuen, H. C. (1977), *J. Fluid Mech.*, **83**,1:49.
- [47] Schwartz, L. W. (1974), *J. Fluid Mech.*, **62**:553.
- [48] Cokelet, E. D. (1977), *Phil. Trans. R. Soc., A* **286**:183.
- [49] Laitone, E. V. (1960), *J. Fluid Mech.*, **9**:430.
- [50] Fenton, J. D. (1979), *J. Fluid Mech.*, **94**,1:129.

国际工程材料本构规律会议：理论和应用

会议将于1983年1月10—14日在美国亚利桑那大学举行。会上将有发展现状和动向的邀请报告。会议具体内容有：

1、讨论多种工程材料和有关应力-应变分析的主要本构规律，尤其着重有可能获得成功应用的那些规律，包括弹性、低弹性、塑性、粘弹性、粘塑性、内时尺度理论和率型模型。

2、讨论研究过程中提出的困难问题，如：强非线性和率有关理论；不稳定性；变形路径和变形历史有关理论；静载荷和循环载荷；剪力作用下的体积变化；界面和联结处的摩擦滑移和脱胶。

3、对重要本构参数加以鉴别和根据合适的(先进的)实验室试验确定它们。

4、根据实验室试验验证本构模型，对诸如金属结构物、R.C. 结构物、土结构物、相互作用和地质材料等的边值问题求解。

5、处理强非线性、大塑性应变、摩擦滑移和脱胶等特殊因素的计算格式。

6、根据工程问题特性的测量结果对本构参数加以鉴别。

摘译自征文启事：*Earthq. Eng. & Struct. Dynamics*, **9**, 6(1981), 613.