

的研究中也得到了广泛应用。已经证明,神经的传导现象可以用非线性扩散方程来描述。柯林用摄动方法研究了形态增长的问题,提出了关于形态生成理论。生物学中形态的增长可以用非线性反应扩散方程来描述,它所得到的结论和线性理论非常不同。非线性反应扩散方程给出的解说明形态增长存在一个极限,而线性理论不可能导致这个结论。另外,对斑马的斑纹,人的手臂的骨架结构都提出了一些数学模式来描写,这都是颇有兴趣的。由于时间所限,对应用数学新的应用领域不可能介绍很多。但近来的研究表明,应用数学方法在研究各个领域内的实际问题时,已取得了很大的进展。

多相流体力学*

高野 暲

这次访问中国,受到了各位的欢迎,对此表示感谢。今天,对多相流问题讲讲一般的、基本的问题。多相流问题所涉及的范围很广,例如,在航空和航天技术中,常遇到气体里含有固体粒子或液体微粒的情况。大约从1960年以来,随着航空技术的发展和火箭发动机的利用,火箭发动机的推力特性、高速飞行体表面被粒子碰撞引起的损伤、粒子碰撞燃气轮机叶片时的损伤等重要课题,开始受到重视,研究工作活跃起来。除此之外,在燃烧工程方面,也研究液滴的燃烧等多相流问题。今天主要讲气体里悬浮着固体粒子或者液体微粒的流动现象。

微粒的数目非常少时,它们的运动基本上不影响流体的运动。因此,流体流动中只考虑粒子的运动,这是一种近似的处理方法。这种情况的例子就是在流动的可视化(流场显示)中,把粒子作为示踪剂来使用;在近似计算中,粒子的数目很少时,可采用小扰动方法。但是,一般而言,粒子的数目比较多,因而在粒子和流体之间发生相互干扰,在流动过程中,它们之间进行动量交换和能量交换。这些现象和我明天将要讲的有真实气体效应的流动现象一样,都有非平衡过程的松弛现象。因此,处理含有粒子的流动问题时,必须弄清松弛现象,其中最重要的是要找出恰当的阻力定律和传热定律,以弄清这些问题。

分析和实验研究多相流时,有几个比较困难的问题,其中最困难的是在二维和三维流动中,粒子的轨迹与流体的流线不一致。另外,粒子与物体表面相碰撞的机理不清楚,这也是困难的问题。

实际上,在物体表面的边界层剪切流中,粒子发生自旋(Spin),因而在垂直方向上产生一种力(Magnus效应)。我是星期天到达这里的,首先遇到的是刮黄沙,这是沙漠的沙丘上一刮风就飞起来的黄沙。沙粒到了边界层,发生自旋,受到一个向上的

* 日本东京大学工学部航空系高野暲教授,于1981年5月12日在中国科学院力学研究所作了题为《多相流体力学》的学术报告,由钱福星口译。本文是钱福星、金哲学根据报告的录音整理的。

力而浮起来，然后飞到比较远的地方。它集合起来后变为黄沙。每粒黄沙都是一颗粒子，所以这是一种多相流的现象。这在实验中也是看得非常清楚的。除此之外，还包括粒子之间的直接的碰撞、尾流中粒子的干扰、相变（例如离解和汽化）、化学变化等情况。另外，对液滴的情况而言，有液滴内部的流动、它的变形、分裂（分解）、结合等很多复杂的现象。对这些问题，虽然分别做过一些研究，但分析起来比较困难，而且理论和实验研究也是五花八门，因此，象前面提到的那样，只就固体粒子悬浮在液体特别是气体里的流动来说明。

对于多相流问题，如前所述，有着多种多样的现象。为了便于分析，提出一些假设。因为主要是处理气体，所以假设气体高速时是理想气体，当流动速度低（包括液体）时，假设为不可压缩流体。

对气体，一般假设为无粘性流体，当然边界层里是粘性流。这就是离物体表面很近的地方以外是无粘性流（气体与粒子有干扰问题）。

对粒子作如下假设：

（1）气体里粒子很小，所以一般假设粒子半径 r 比流体力学特征长 l 小得多，即 $r \ll l$ 。

（2）粒子的数目比起气体分子的数目少得多，而且是均匀分布的，如果粒子数目太多，粒子就相互紧贴，引起互相干扰。

（3）粒子的大小比气体分子的大小，或者比气体平均自由程 λ 大得多，因此可以忽略粒子由于热运动引起的分压和布朗运动。

以上三条假设是一般的常识，如果这三条不成立，下面的几条就不好说了。为了便于分析，还作几个假设：

（4）粒子不会直接碰撞或者不会通过尾流互相干扰。

（5）粒子是直径相同的球，它不变形。

（6）粒子材料的物质密度以及比热不变。如果粒子的种类不同（密度和直径等不同）时，可以把它们分类，对第一组、第二组、第三组，……进行分析，但此时方程的数目增加。

（7）粒子内部的温度是均匀的，因此不考虑粒子内部的传热。

（8）粒子在流体中受各种力，但在这里只考虑由于与流体的速度差引起的阻力，而不考虑粒子的自旋引起的垂直方向的升力（Magnus力），由非定常运动引起的力，以及重力等外力（一般定常问题较多）。

（9）粒子和气体之间的传热（包括传导、对流等）与它们之间的温度差成正比。

（10）在一般的分析中认为粒子所占的体积很小，可以忽略，如果它所占的体积太大，就不能忽略。

这些假设是我们进行分析的基础，对此有什么问题没有？（问：分析中是否考虑了湍流问题？答：这里不考虑湍流里的粒子或由粒子引起的湍流。）

根据以上假设,并考虑了混合系中粒子所占的体积比率,对无粘性定常流建立了基本方程。多相流中一般要求出的量有两相的速度 \vec{v}_G, \vec{v}_P ; 温度 T_G, T_P ; 密度(混合系单位体积中的质量) ρ_G, ρ_P (或者是粒子所占的体积比率 ε); 以及气相的压力 p 等11个变数。这里下标G, P分别表示气相和粒子相的值。粒子和气体所占的体积比率,由下式定义:

$$\varepsilon = \rho_P / \hat{\rho}_P \quad (2.1) \quad 1 - \varepsilon = \rho_G / \hat{\rho}_G \quad (2.2)$$

其中 $\hat{\rho}_P, \hat{\rho}_G$ 分别表示粒子和气相的物质密度。另外,粒子的质量比率 φ , 物质密度比 ξ 以及质量比 η 由下式给出:

$$\varphi = \rho_P / \rho_M \quad (2.3) \quad \xi = \hat{\rho}_P / \hat{\rho}_G, \eta = \rho_P / \rho_G = \varphi / (1 - \varphi) = \xi \varepsilon / (1 - \varepsilon) \quad (2.4)$$

粒子和气体的密度比 ξ 约有100—1000的量级。如果粒子和流体一起流动而没有速度差时, η 就是流量比。设 ρ_M 为混合系的密度,则

$$\rho_M = \rho_G + \rho_P = (1 + \eta) \rho_G = \rho_G / (1 - \varphi) \quad (2.5)$$

假设流体为理想气体,则其状态方程为

$$p = \hat{\rho}_G RT_G = \rho_G RT_G / (1 - \varepsilon) = (1 - \varphi) \rho_M RT_G / (1 - \varepsilon) \quad (2.6)$$

其中 R 为所考虑的气体的气体常数。气体的内能 e_G 和焓 h_G 由下式给出:

$$e_G = C_V T_G, \quad h_G = e_G + (p / \hat{\rho}_G) = C_P T_G \quad (2.7)$$

这里 C_V, C_P 分别为定容比热和定压比热。

与气体的情况相仿,粒子的 e_P, h_P 分别由下式定义:

$$e_P = C T_P, \quad h_P = e_P + (p / \hat{\rho}_P) \quad (2.8)$$

其中 C 为粒子的比热。类似地把混合系单位质量的内能 e_M ,焓 h_M 由下式给出(这里采用了一些技巧):

$$\rho_M e_M = \rho_G e_G + \rho_P e_P, \quad \rho_M h_M = \rho_G h_G + \rho_P h_P \quad (2.9)$$

$$\text{由此可得 } e_M = (1 - \varphi) e_G + \varphi e_P, \quad h_M = (1 - \varphi) h_G + \varphi h_P \quad (2.10)$$

对粒子相(被认为是连续介质)而言,基本方程有连续方程、动量方程和能量方程(粒子温度——热平衡),可以分别写成〔1,2〕:

$$\text{div}(\varepsilon \hat{\rho}_P \vec{v}_P) = 0 \quad \text{或} \quad \text{div}(\rho_P \vec{v}_P) = 0 \quad (2.11)$$

$$\rho_P (\vec{v}_P \cdot \text{grad}) \vec{v}_P = \vec{F} - \varepsilon \text{grad} p \quad (2.12)$$

$$\rho_P C (\vec{v}_P \cdot \text{grad}) T_P = \dot{Q} \quad (2.13)$$

(2.12) 右边第一项 \vec{F} 是气相给粒子相作用的阻力, 第二项是由气相的压力梯度引起的体力——根据假设(10), 它表示粒子体积比率。(2.13) 等号右边的 \dot{Q} 是气相对粒子相的传热率。对于气相而言, 除了上面三个方程外, 还有与气体有关的三个守恒方程和状态方程(2.6), 把它们联立求解即可。但是对气相而言, 用气相的基本方程不如用混合系的守恒方程更方便。混合系的质量守恒方程、动量守恒方程分别为:

$$\operatorname{div} [(1-\varepsilon) \hat{\rho}_G \vec{v}_G + \varepsilon \hat{\rho}_P \vec{v}_P] = 0 \quad \text{或} \quad \operatorname{div} (\rho_G \vec{v}_G + \rho_P \vec{v}_P) = 0 \quad (2.14)$$

$$\operatorname{div} (\rho_G \vec{v}_G \vec{v}_G + \rho_P \vec{v}_P \vec{v}_P) = -\operatorname{grad} p \quad (2.15)$$

关于总的能量(内能和动能之和)的变化, 如果假设混合系为绝热、无粘性的, 那就相当于压力所做的功。两相之间的能量交换相互抵消。因此如果利用前面(2.7)和(2.8)所定义的焓, 混合系总体的能量守恒方程就可写成如下型式 ($U = \left| \vec{v} \cdot \vec{v} \right|^{1/2}$):

$$\operatorname{div} [\rho_G \vec{v}_G (h_G + \frac{1}{2} U_G^2) + \rho_P \vec{v}_P (h_P + \frac{1}{2} U_P^2)] = \operatorname{div} [-\varepsilon p (\vec{v}_G - \vec{v}_P)] \quad (2.16)$$

单个粒子所受的阻力 \vec{D} 由下式给出:

$$\vec{D} = C_D \frac{1}{2} \hat{\rho}_G \pi r^2 \left| (\vec{v}_G - \vec{v}_P) (\vec{v}_G - \vec{v}_P) \right|^{1/2} (\vec{v}_G - \vec{v}_P) \quad (2.17)$$

其中 r 为粒子半径, C_D 为阻力系数。因此单位体积中粒子群上所作用的力 \vec{F} 可写成

$$\vec{F} = \vec{D} \frac{\rho_P}{\hat{\rho}_P (4/3) \pi r^3} = \frac{1}{\tau_v} \frac{C_D}{C_{Ds}} \rho_P (\vec{v}_G - \vec{v}_P) \quad (2.18)$$

式中 C_{Ds} , τ_v 分别为 Stokes 阻力系数和速度的松弛时间, 即

$$C_{Ds} = 24/\operatorname{Re} \quad (2.19) \quad \tau_v = 2r^2 \hat{\rho}_P / (q\mu_G) \quad (2.20)$$

怎样表达力 \vec{F} 的问题, 实际上是如何确定阻力系数 C_D 的问题。如果速度比较慢, 阻力系数按 Stokes 的阻力系数来表达的话, 则 $(C_D/C_{Ds}) = 1$ 。至于雷诺数 Re , 可写

$$\operatorname{Re} = \hat{\rho}_G \left| (\vec{v}_G - \vec{v}_P) (\vec{v}_G - \vec{v}_P) \right|^{1/2} / 2r/\mu_G \quad (2.21)$$

这里需要注意的是在流动的各个方向上, Re 数的值不同, 而且 μ_G 一般是温度 T_G 的函数, 因此, τ_v 也是变量。所以, 雷诺数 Re 是变数, 一般不是一定的。

对多相流进行分析时, 需要有包含在 \vec{F} 中的阻力系数的表达式。很早以前, 认为阻力与速度差成正比, 因而采用了 Stokes 阻力公式, 然后又提出修正 Stokes 阻力公式的 Ossen 阻力公式(这时假设 τ_v 一定)。不管哪个公式, 适用范围只限于 Re 数非常小的低速流。最近, 在高速流的一些问题中, 需要 Re 数范围很大的情况下都能适用的阻力

系数表达式, 因此, 根据实验结果, 提出了很多 C_D 的表达式 [8—13]。Ingebo [10] 根据低速气流中喷射球形粒子的加速运动, 提出了如下表达式:

$$C_D = 27 Re^{-0.84} \quad (6 < Re < 400) \quad (2.22)$$

这个公式是Stokes阻力和Osseen阻力之间的一种阻力系数 (图 1), 据说还能应用于有蒸发的液滴的运动。另外, Gilbert [11] 等人提出

$$C_D = 0.48 + 28 Re^{-0.85} \quad (2.23)$$

Rudinger [3,9] 提出标准阻力系数

$$C_D = \left(24 / Re \right) \left(1 + Re^{2/3} / 6 \right) \quad (2.24)$$

这些都是根据定常不可压缩流动中球的实验得到的, 可用于 Re 数在 1—100 的范围内, 与实验值的误差只有百分之几 (图 1)。另外, 还有把雷诺数分成几个区段, 对每个区段提出阻力系数表达式的 [12, 13]。Ishii-Zuber [14] 提出球状有变形、还有内部流动的液滴或气泡的阻力系数的表达式。随着电子计算机的发展, 把 Re 数分几个区段, 也能精确地表达出那些区段的阻力系数。图 1 是典型的阻力系数随 Re 数变化的情况。

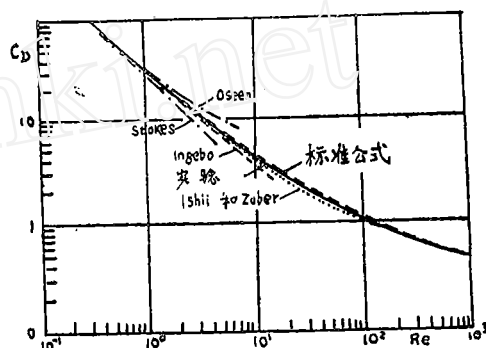


图 1 典型的阻力系数随 Re 数的变化

因为每个人的结果都是通过实验提出来的, 所以有些差别。这些差别可能是由于对粒子群所做的实验引起的, 在这些实验中, 实验结果与粒子群的状况很有关系, 也就是粒子之间速度的干扰, 或由自旋引起的Magnus效应, 或者粒子具有电荷且其值有变化等。另外, 更重要的是粒子的表面状态对阻力系数影响很大。

最近在激波管实验中测得的阻力系数也在图 1 中那条线附近。

以上是速度比较低的情况。如果速度高, 还要考虑马赫数的影响, 可压缩性的影响, 粒子温度对阻力系数的影响等。Carlson-Hoglund [15] 和Crowe [16] 提出了用 Re 数和 M_∞ (用两相的速度差定义) 表示的 C_D 的实验公式。另外, 超声速流中粒子的温度对 C_D 的实验值影响显著 (图 3) [17]。Henderson [18] 对 Re 为 10^{-2} — 10^4 的范围考虑了粒子温度, 适用于 M_∞ 在 0 附近 (自由分子流区域) 到 6 范围, 提出了 C_D 的实验公式, 并提出Carlson-Hoglund和Crowe的实验公式, 在超声速流中与实验值有很大的误差。

图 2 是从文献 [17] 引用的, 是重新整理了的阻力系数与马赫数的关系, 这是以 Re 数作为参变量绘制的, 曲线弯曲的地方是马赫数为 1 左右的跨声速区域, 最上部是自由分子流极限 (Free-Molecule Limit)。 Re 数越小, 越接近自由分子流极限。

图 3 是阻力系数与粒子温度 T_p 的关系。马赫数 M_∞ , 粒子温度 T_p 与阻力系数 C_D 之间关系的表达式比较长, 因此在这里就省略了。

从气体向粒子传热的传热量与两者的温度差成正比, 也就是根据牛顿的冷却定律,

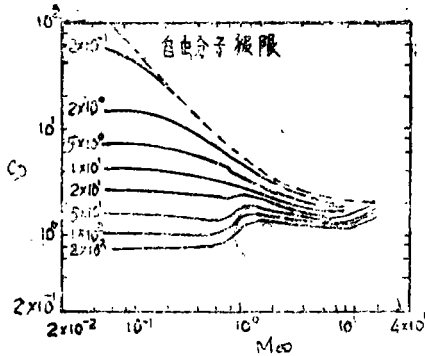


图2 C_D 随马赫数的变化 [17]

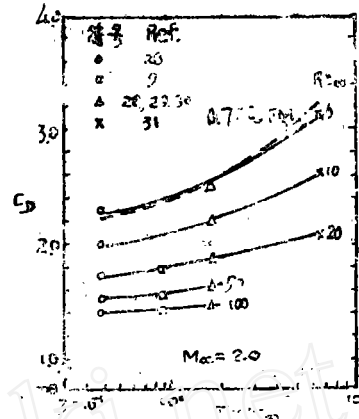


图3 C_D 随粒子温度的变化 [17]

在单位时间内，对单位面积的传热量

$$\dot{q} = \alpha (T_G - T_P) = (K_G/2r) Nu (T_G - T_P) \quad (2.25)$$

其中 α 为传热系数， Nu 为以粒子直径 $2r$ 定义的Nusselt数 ($Nu = 2ra/K_G$, K_G 为气体的传热系数)。因此，向单一粒子全表面的传热率是在(2.25)中乘以 $4\pi r^2$ 。向混合系单位体积中的粒子相的传热率 \dot{Q} 由下式给出：

$$\dot{Q} = (\rho_P/\tau_T) (T_G - T_P) \quad (2.26)$$

式中 τ_T 是温度的松弛时间，由下式给出：

$$\tau_T = (2/3) C_P r^2 / (K_G Nu) = (3/Nu) \delta Pr \tau_v \quad (2.27)$$

这也是温度的松弛时间和速度的松弛时间的关系。

$$\text{普朗特数 } Pr = C_P \mu_G / K_G, \quad \delta = C / C_P \text{ (比热比)} \quad (2.28)$$

如上所述， \dot{Q} 由 τ_T 决定，而 τ_T 又由 Nu 决定，因此在多相流分析中，如同 C_D 一样，需要 Nu 的表达式。 Nu 数一般是 Re 和 Pr 的函数，在Stokes近似的范围中， $Nu = 2$ ，一般采用根据定常流的实验值建立的标准形式 [3, 19]

$$Nu = 2 + 0.6 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (2.29)$$

上面大致介绍了基本的结果，这是对平衡流的，也就是与流动时间相比，松弛时间很短，很快达到平衡的情况，因此可以看作平衡流动来处理。在平衡流动中，粒子和流体的速度、温度都相等，没有动量及能量交换，所以是等熵的，在这种情况下，平衡流如果是绝热无粘性的，则流动为等熵过程，所以可看作是纯粹的气体，也就是和完全气体一样，可以建立等熵流关系式。下面谈谈这些问题。

平衡流中粒子和气相一起流动 ($\vec{v}_p = \vec{v}_G$)，流量比 η 是常数，因此质量比率 ϕ 也一定。基本方程是(2.14)，(2.15)及(2.16)，可以设 $\vec{v}_p = \vec{v}_G = \vec{v}$, $T_p = T_G = T$,

尤其利用 (2.10) 所给定的 h_M , 可以写出能量守恒公式为

$$(\vec{v} \cdot \mathbf{grad}) \left[h_M + \frac{1}{2} U^2 \right] = 0 \quad (2.30)$$

这个公式表明, 沿着流线 (两相一样), 混合系的总焓是守恒的。

利用混合系的运动方程, 上式可改写成

$$dh_M = [1 / (1 + \eta)] dp / \rho_G = dp / \rho_M \quad (2.31)$$

根据 h_G, h_P 的定义式 (2.7), (2.8) 和状态方程 (2.6), 消去 dh_M, dT ($T_G = T_P = T$), 可得

$$dp = \Gamma_{eq} d\hat{\rho}_G / \hat{\rho}_G \quad (2.32)$$

其中 Γ_{eq} 为由混合系定压比热 C_{PM} 与定容比热 C_{VM} 之比定义的等价等熵指数。利用 (2.10), 定义

$$C_{VM} = (\partial e_M / \partial T)_V = (1 - \varphi) C_V + \varphi c$$

$$C_{PM} = (\partial h_M / \partial T)_P = (1 - \varphi) C_P + \varphi c \quad (2.33)$$

$$\Gamma_{eq} = C_{PM} / C_{VM} = \gamma (1 + \eta \delta) / (1 + \gamma \eta \delta) \quad (2.34)$$

由上式可知, Γ_{eq} 是常数, 所以 (2.32) 可以积分。这样与理想气体的性质类似地可得等熵关系式 $p \propto \hat{\rho}_G^{\Gamma_{eq}}$ 。从这个意义上说, Γ_{eq} 叫做等价等熵指数 (等价比热比)。

对超声速流动来讲, 声速是个很重要的量。我们看看它是什么样子。混合系的声速为

$$a^2_M = (\partial p / \partial \rho_M)_s = (\partial p / \partial \hat{\rho}_G)_s (\partial \hat{\rho}_G / \partial \hat{\rho}_G) (\partial \hat{\rho}_G / \partial \rho_M) \quad (2.35)$$

对平衡流来讲, 利用 (2.2), (2.4) 和 (2.5), 可以从 (2.35) 得到平衡流声速为

$$a^2_{eq} = \frac{\Gamma_{eq}}{\gamma(1-\varepsilon)^2(1+\eta)} \quad a^2 = \frac{1+\eta\delta}{(1-\varepsilon)^2(1+\eta)(1+\gamma\eta\delta)} a_0^2 \quad (2.36)$$

其中 $a_0 (= \sqrt{\gamma RT})$, $\gamma = C_P / C_V$, 是理想气体的声速, 这里不同的是前面有个系数。 a_{eq} 比 a_0 小, 随着物质密度 ζ , 体积比率 ε 的增加而很快减小, 但比热比 δ 的影响较小。从物理上讲, 这种声速就是小扰动传播的时候, 粒子也跟着波动一起运动, 这是一种想像的情况。

一般认为声速是小扰动传播的速度, 在传播的时候, 粒子不动, 而波是传播的, 所以这种状态叫做冻结状态。所以, 根据小扰动传播的速度, 通过推导可得冻结流的声速关系。这在超声流的研究中, 譬如利用特征线法确定马赫线时, 它的传播速度就是冻结声速。这里粒子的体积比率、质量比率不同, 所以声速就不一样。

三

下面谈谈激波在流动中的情况。在多相超声速流中,气相中产生激波,形成不连续面,但其上游的流动处于平衡状态。当可以忽略粒子的体积比率时,粒子以激波上游的速度、温度通过激波(冻结过程),这时气相中的激波形状,不受粒子通过的影响,而且跟只有气相的情况一样,Rankine-Hugoniot关系式成立。但当不能忽略粒子体积比率时,粒子会受到激波前后压力差引起的体力的作用,其表达式与上述的冻结过程稍有不同。在激波的下流,从激波波阵面后的冻结状态,经过松弛过程达到平衡状态。这个松弛区域叫做激波结构。如果松弛时间 τ_v ,松弛温度 τ_T 比起流动的特征时间小得多,就可以忽略这个区域。这样的激波叫做平衡激波。

下面就最简单的情况,谈谈正激波。有正激波的流动是一维问题,上述的基本方程可以进行积分,可得到激波前后气体和粒子的质量、混合系的动量、能量(总焓)等四个守恒方程。需要求出的量是七个,除了状态方程外,还要加上两个条件方程。这些条件方程是依据激波是平衡还是冻结而定[21]。

对平衡激波而言,在激波后面的速度和温度很快达到平衡,所以 $u_G = u_P = u$, $T_G = T_P = T$ 。通过平衡激波后,温度相等,这一点是比较正常的。但通过激波时,不能忽略粒子的大小,即不能忽略 ε 时,由于摩擦力的影响,通过激波前后就要受到力。

粒子通过激波时的运动方程,类似于伯努利方程。粒子通过激波的速度,是与粒子在激波上游的速度不同的。对平衡激波的两个条件方程是 $u_G = u_P = u$, $T_G = T_P = T$ 。使用这些方程、守恒公式及状态方程就能求得各种量。由此可得压缩激波的最小上游速度 u_0^* 为(下标0是上游值)

$$u_0^{*2}/a_0^2 = (1 + \eta\delta)/(1 - \varepsilon_0)^2(1 + \eta)(1 + \gamma\eta\delta) \quad (3.1)$$

这里 a_0 为理想气体的声速。由(2.36)可知, u_0^* 是激波上游的平衡声速,而平衡激波存在的条件是上游的平衡马赫数($M_{e,q} = u_0/a_{e,q}$)要比1大。这里 $a_{e,q} < a_0$,因此即使通常的马赫数($M_0 = u_0/a_0$)比1小时,也有平衡激波存在。实际上,在超声速流中,物体前面产生冻结激波而平衡激波则在离物体无穷远的地方散逸。

对二维超声速流动,例如楔体上的激波而言,在楔尖处开始形成冻结激波,然后延长到很远的地方。由于松弛现象,平衡激波逐渐衰减。这样的激波,日语中没有恰当的名词,可叫做散逸激波(Free dissipation shock wave),所以,从物理上来考虑平衡激波是比较困难的。

冻结激波时,粒子要受气体激波前后的压力差的作用,所以粒子在激波后的速度 u_{pf} 与 u_0 不同,而由下式给出:

$$\frac{1}{2} \widehat{\rho}_P u_{pf}^2 + p = \frac{1}{2} \widehat{\rho}_P u_0^2 + p_0 \quad (3.2)$$

使用条件(3.2)和 $T_P = T_0$,可得冻结激波有关的解。和平衡激波一样,可以得到界限上游速度如下:

$$u_0^{*2}/a_0^2 = 1 + \frac{1}{\zeta_0} \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0}$$

一般而言,物质的密度比 ζ_0 非常大, ε_0 一般不怎么大,因此, $u_0^* \approx a_0$,可以认为冻结激波一般是在 M 数大于1时存在。如果可以忽略体积比率时,则 $u_0^* = a_0$,所以 $u_p = u_0$ 。所谓激波是马赫线的包络线,所以一般认为小扰动传播的速度 u_0^* 就是冻结声速。

再举几个计算的例子。图4是平衡激波后很远的地方平衡状态的密度比与压力比。

由图可见理想气体平衡激波后密度比和压力比随 ε_0 变化情况,横坐标都是 M 数。如前所述,对平衡激波而言,在极限的地方, M 数比1小。密度比和压力比是体积比率 ε_0 。越大,就上升得越大。从物理上讲,这是因为在平衡时,粒子在激波后比较密集而引起的。初始体积比率 $\varepsilon_0 = 0.02$ 时,体积比率 ε 随马赫数的增加可达0.3左右;而 $\varepsilon_0 = 0.2$ 时, ε 可达0.9左右。

对多相流来讲,体积比率 ε_0 一般可达0.7。对这么大的体积比率是不能进行计算的。根据前面的假设计算,体积比率不能超过0.2。如果超过这个值,粒子就过分密集,将引起相互干扰,出现很多复杂的问题。特别是有激波的超声速流中,要考虑气体里含有多少粒子的问题。温度的变化则要看用哪一种阻力定律而定,是用标准的阻力定律,用Stokes阻力定律,还是用Osseen阻力定律而异(这时的 Nu 数为2)。可以看到,无论用哪个公式,其趋势是一样的。但所使用的阻力公式不同,因其过程不同,其松弛状态也不同。不管用哪个公式,激波后面的温度都是先上升后再下去。这说明粒子速度很快下降,其动能的一部分使气体的温度上升。

以上是对正激波的基本关系。

四

作为多相流的各种应用,下面对航空和航天工程中颇有兴趣的一些问题,谈谈两个问题,即喷管流动和二维物体(楔体)绕流问题。

喷管流动是二维或轴对称流动问题。正如前述,其中粒子的轨迹和气体流线不重合。这种多相流问题,对固体燃料火箭发动机的推力问题以及壁面损伤问题都有重要意义。

从Gilbert [25]对喷管流动拍摄的纹影仪照片(图5)可以清楚看到,黑线是喷管的壁面,中间黑影是粒子的流动。在这种喷管流动中,气体是膨胀的,但粒子基本上在喷管中

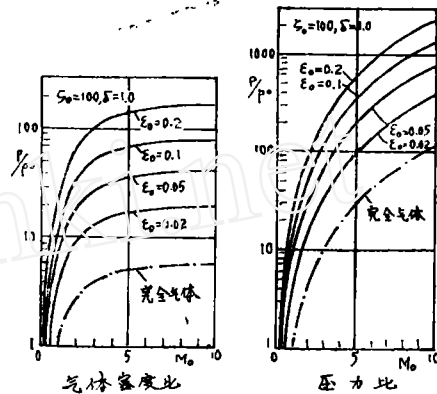


图4 平衡激波后各物理量与 ε_0 的关系

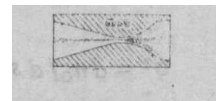


图5 喷管中粒子的流动

心线上流动。因为在壁面附近就没有粒子，所以具体计算的结果表明，粒子中越轻者越靠近壁面，有些粒子是从壁面弹回来后重新碰到壁面。这些粒子碰到壁面后，使壁面受到损伤，而且粒子流动的时候，气体的动量损失影响推力，因此目前还在进行研究。

分析这些问题时，作为二维问题处理是比较困难的，因此作为准一维流来进行计算。在准一维流理论中，假设粒子在喷管断面上具有同样的速度和温度。

用准一维流计算喉部的结果表明，包括中心线上和壁面的流动，对喉部的上游，用一维流计算还可以，但对下游，与实际情况相差较大。对喉部上游，有各种各样的近似计算。其中有喉部温度和驻点温度之比（速度比是一定的）的计算结果。对不同的速度比的情况，在某点附近，喉部的温度和驻点温度比较接近，而粒子的温度则比驻点温度稍低（约1—2%）。另外还有粒子的比热（热容量）比较大时的计算结果。因此，有一种近似计算中，假设速度比不变，喉部的温度比不变。从前有过这种近似计算。喷管流的特点是非平衡流，明天将要讲真实气体的流动计算，要讲气体和粒子平衡流的质量守恒方程即连续方程，相应地还有动量守恒方程和能量守恒方程。

对喷管流动来说，主要是因为流量不同，所以流动状态也不同。因此，对喷管流动来讲，最重要的问题是声速点发生在什么地方。流量不同时，流动状态也不同。亚声速的时候，对一个给定的流量，压力影响到某区域，在那里膨胀，流量 Q 不变时，根据 Q 和 p, x 的关系，可以确定声速点，这一点在数学上是一个奇点，对 p_x 进行微分后可以把基本方程重新写成另一种形式。可以根据冻结马赫数的表达式，可得流量增加的方向。确定声速点时，要考虑温度差、速度差的干扰项。如果没有这个干扰项，则对平衡流或冻结流来说，声速点发生在喉部；考虑了温度差和速度差后，声速点发生在喉部的下游。

在求喷管流动时，从声速点往后才能进行计算，因此必须找到声速点，然后从那里开始用特征线法计算。

对平衡流，单位面积的流量表达式和面积比的表达式中，都出现等价比热比（平衡比热比）。喉部的截面积和密度用带*号的字母表示。这种表达式的形式与完全气体的形式完全一样，所不同的只是比热比，在这种比热比的公式中，还多了一个流量比的影响。用这种公式表达的话，跟理想气体一样，可以得到流量和面积比的关系。

对二维问题就不同。对二维问题的计算，对喉部附近的流动为平衡流时，可用松弛法计算，先假设一个流动情况，然后再通过松弛法进行第二步、第三步计算，这样可以逐步修正流线。对接近平衡流的情况，也可以用松弛法进行逐步近似计算。

要更精确地计算喷管喉部下游的方法是特征线法。在这种特征线法中（这只能用于超声速区域），最重要的是马赫线。进行分析时，一般忽略粒子的体积比率。因为考虑的是冻结马赫数（ $M = U_G/a_0$ ），所以相当于只有流体时的马赫数。从基本方程求特征方向，可以得到八个特征方向，其中两条马赫线是跟完全气体的情况一样。

对二维定常流，基本方程的特征方向 $\sigma = dn/ds$ （ s, n 为流线坐标）由下式给出[20, 31]：

$$\sigma^2 = dn_0/ds_0 = 0, \quad \sigma^4 = dn_p/ds_p, \quad \sigma_{\pm} = \pm \sqrt{M^2 - 1} \quad (4.1)$$

前面两个公式分别表示气体和粒子的流线就是特征方向（分别为2重根，4重根），第三个公式表示由冻结马赫数 $M = U_0/a_0$ （ $\varepsilon_0 = 0$ 时 a_0 是理想气体的声速）定义的两条马赫线。由这些特征曲线把流动区域（流场）划分为网络，然后从喉部稍下游的某个初始值曲线开始进行数值计算。因此，在特征线法的计算中，确定声速点非常重要，所以喉部附近的跨声速流的解很重要。

特征线的方向就是扰动从某一点传播的方向。多相流的情况下，粒子和气体互相干扰的变化量也沿着流线传播。对特征线法的数值计算方法，在此就省略了。对特征线法就讲到这里。

下面谈谈绕物体流动时粒子的轨迹。这里假设气体的运动不受粒子运动的影响。Morsi [12] 对尾流使用了一种阻力公式，因为是亚声速、不可压缩流，所以使用了保角变换法。他还考虑了气相中速度梯度引起的Saffman [6] 升力，分析了圆柱和翼型等物体周围的流动。

Probstein [13] 等研究了高超声速流中楔体、钝头体、圆柱体以及球体驻点附近的流动，提出 Re 数范围很大时能成立的 C_D 的表达公式。这时，超声速流动中不考虑粒子的影响，而且把 Re 数的区域分成12个区段。另外还有分成3个区段，用对数坐标来表示的。绕球体流动的粒子的轨迹表明（原来的论文是绕圆柱的），这是按粒子的直径大小排列的，当粒子直径大时，直接碰上圆柱，粒子小时才绕圆柱流动。这种物理现象可通过流场显示看出，并且能看清多大的粒子能够直接碰上。

绕二维翼型、攻角不同时的微粒轨迹的实验表明，和绕圆柱的情况一样，轻的粒子绕着走，而大粒子基本上直接碰上物体。

对二维楔体（半顶角为 10° ， 15° ， 20° ）的绕流，可以用特征线法进行计算。激波的形状按各种参数（质量比，比热比，松弛时间）进行表达。对三种不同的楔体，马赫数不同的情况进行实验的结果表明，对理想气体，激波是直的，然后马赫波碰上激波后产生干扰，干扰的结果，激波弯曲，因此要进行数值计算就不可能了。但到了很远的地方，则成了散逸的平衡激波。激波在某处开始鼓起来，然后逐步转为平衡。这是因为速度减小后温度上升所致。现在作为声爆问题，研究激波有这样的变化后，到了什么时候能达到平衡的问题。

在计算时，粒子大了，它碰上物体后是停在那里，还是沿着物面走还不清楚，但现在假设为停在那里。实际的情况是粒子碰到物体后，因为有边界层，所以进到边界层里。有的粒子碰到物体后可能反射，但反射的规律还不清楚。进到边界层里的，就按边界层问题处理，今天就不讲了。在边界层问题里，气体的边界条件是知道的，但还不清楚粒子在壁面上的边界条件是怎样。

对半顶角为 10° ， 15° ， 20° 的楔体，沿着物面的速度分布（粒子和气体的速度分布）的实验表明，温度变化同样表现出松弛现象，可以看到在不同的距离内，能达到的平衡状态不同。至于压力关系，其特点是压力下降一次后再上升，物体角度大了，物体的干扰也就大。这里要注意的是压力、温度和速度达到一定值时就与没有粒子时的状态不一样，这是因为壁面附近质量、动量、能量守恒定律不成立，也就是从上游来的粒子的一部分，碰到壁面所致。

参 考 文 献

1. Soo, S. L., Fluid Dynamics of Multiphase Systems, Blaisdell, Boston(1967).
2. Marble, F. E., Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 2, Annual Reviews, Palo Alto, Cal. (1970).
3. Rudinger, G., Nonequilibrium Flows, Vol. 1, Part 1, ed. by P.P. Wegener Marcel Dekker, New York (1969).
4. Rudinger, G., AIAA J., 3, 7(1965): 1217-1222.
5. Marble, F.E., Phys. Fluids, 7, 8(1964): 1270-1282.
6. Saffman, P. G., J. Fluid Mech., 22, Part 2(1965): 385-400.
7. Hidy, G. M. and Brock, J.R., The Dynamics of Aerocolloidal Systems, Pergamon Press, Oxford (1970): 59.
8. Selberg, B.P. and Nicholls, J.A., AIAA J., 6, 3(1968):401-408.
9. Rudinger, G., J. Basic Eng., Trans. ASME, (1970):165-172.
10. Ingebo, R.D., NACA TN 3762 (1965).
11. Gilbert, M., Davis, L. and Altman, D., Jet Prop., 25 (1955): 26-30.
12. Morsi, S.A. and Alexander, A. J., J. Fluid Mech., 55, Part 2(1972): 193-207.
13. Probst, R.F. and Fassio, F., AIAA J., 8, 4(1970):772-779.
14. Ishii, M. and Zuber, M., AIChE J., 25, 5(1979):843-855.
15. Carlson, D.J. and Hoglund, R.F., AIAA J., 2, 11(1964):1980-1984.
16. Crowe, C.T., AIAA J., 5, 5(1967):1021-1022.
17. Bailey, A.B. and Hiatt, J., AIAA J., 10, 11(1972):1463-1470.
18. Henderson, C.B., AIAA J., 14, 6(1976):707-708.
19. Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, John Miley & Sons, Inc., New York(1960):407.
20. Kliegel, J.R., Ninth Symp.(Intern.) on Combustion(1963):811-826.
21. 高野, 羽鸟, 日本机械学会论文集, 39, 321(昭48-5):1553-1568.
22. Carrier, G.F., J. Fluid Mech., 4, Part 4(1958):376-382.
23. Rudinger, G., Phys. Fluids, 7, 5(1964):658-663.
24. Otterman, B. and Levine, A.S., AIAA J., 12, 5(1974):579-580.
25. Gilbert, M., Allport, J. and Dunlap, R., ARS J., 32, 12(1962): 1929-1930.

26. Neilson, J H. and Gilchrist, A., J. Fluid Mech., 33, Part 1(1968), 131-149.
27. Rudinger, G., AIAA J., 8, 7(1970):1288-1294.
28. Takano, A. and Adachi, T., Japan Soc. Aero. Space Sci., 18, 42(1975): 197-215.
29. Regan, J.F., Thompson, H.D. and Hoglund, R.F., J. Spacecraft, 8, 4 (1971):346-351.
30. Ishii, R. and Kawasaki, K., AIAA J., 18, 11(1980):1397-1399.
31. Johnson, G.R., Von Karman Inst. for Fluid Dynamics, Tech. Note 78 (1971).
32. Michael, D.H. and Norey, P.W., J. Fluid Mech., 37, Part 3 (1969): 565-575.
33. Healy, J.V., J. Fluid Mech., 41, Part 4 (1970):759-768.
34. Healy, J.V., J. Fluid Mech., 46, Part 1(1971):33-42.
35. Healy, J.V., Phys. Fluids, 13, 3 (1970):551-557.
36. Laitone, J.A., J. Aircraft, 16, 12(1979):809-814.
37. Peddieson, J. and Lyu, Chung-Hsein, AIAA J., 11, 6(1973):826-830.
38. Peddieson, J., AIAA J., 13, 7(1975):939-941.
39. Stock, H.W., Inter. J. Heat Mass Transfer, 23(1980):147-160.
40. Miura, H., J. Phys. Soc. Japan, 37, 2 (1974):497-504.
41. Miura, H., J. Phys. Soc. Japan, 38, 1 (1975):252-256.
42. Miura, H., J. Phys. Soc. Japan, 37, 4 (1974):1145-1152.
43. Takano, A., J. Fac. Eng., Univ. Tokyo(B), 33, 4 (1976):519-536.
44. 里深, 户木田, 日本机械学会论文集, 45, 394 (昭54-6): 773-779.

高频感应放电理论与特性计算方法*

中国科学院力学研究所 朱清文

提要 本文以双渠道模型为基础, 考虑气体流动、对流传热、热辐射修正, 利用等效温度能量平衡算法, 求出了等离子体放电特性和其他参数, 并同现有文献进行了比较, 能给出很好结果, 而计算大大简化。本文还推导了各种边界条件下的传热计算方程, 而对等离子体同振荡器的耦合、匹配、结构参数和运行参数的选择原则, 以及实践经验, 也作了详尽的讨论和分析。

* 1981年4月16日收到。