

理性力学简介

北京大学数学力学系 郭仲衡

“1.像几何学一样,理性力学必须建立在显然正确的公理上;

2.力学的进一步事实由数学证明给出。”1743年达朗贝尔的这两句话点出了理性力学的核心。

牛顿的“自然哲学”(1687)是理性力学的第一部著作。在前人探索的基础上,他总结出力学运动三定律。从这些简单的公理出发,物体(质点)力学运动的全部主要性质便由演绎得出。

理性力学的另一个先驱者J·伯努利从事变形体力学的研究。他用四种方法推导出沿长度受任意载荷的弦的平衡方程(1691—1704)。通过实验他发现,伸长和张力并不满足胡克所提示的线性关系;他一直认为线性关系不能作为物性的一般原理。他首先得到杆的弯曲理论,当杆为直线时,就变成“elastica”的微分方程(1694)。

1788年拉格朗日发展了分析力学,其中许多内容是符合达朗贝尔的框架的。

在后来漫长的历程里,变形体力学的一些基本概念如应力、应变等逐渐建立。1822年柯西宣布“应力原理”。从此,这原理成为连续介质理性力学的基础。在这里,应力向量仅与截面的法向量有关只是他的假设(一百多年后才得到证明),并且还没有偶应力的概念。在小变形范围内,弹性理论是柯西完成的。1894年芬格(Finger)完成了超弹性(hyperelastic,即有弹性势的)体的有限变形理论。有向物体的思想是迪昂(Duhem, 1893)提出的,其理论则在1907年由科瑟拉(Cosserat)兄弟建立。

在那些时候,“理性力学”是指按达朗贝尔提法对力学问题进行的一切研究。吉布斯(Gibbs, 1902)还认为他关于统计力学的书是对理性力学的贡献。“理性力学(rational mechanics)”一词大体沿用到十九世纪末本世纪初,但法国和意大利例外,那里的大学至今还没有理性力学教研室,西尼奥里尼(Signorini)的职称是理性力学教授。阿佩尔(Appell)的专著就称为“理性力学论(Traité de Mécanique Rationnelle)”。

有限变形弹性理论方程冗长而复杂,特别是强烈的非线性,使当时的人们感到在数学上进行一般性的讨论是没有多大希望的。

对非线性问题进行线性化的尝试很早就有记载。只是到上世纪末,在瑞利(Rayleigh)的影响下才形成了这样的状况:绝大部分工作都从事于线性(指几何及物理上的线性化)力学及其数学的研究。线性化几乎成了一种习惯。差不多一百年来,线性理论充分发挥了它解释力学现象的能力,并且使它的数学也发展到相当完善的地步。有限变形弹性理论的研究在长时间内进展不大,甚至几乎被遗忘。随之而来的是“理性力学”一词逐渐在文献上消声匿迹。

诚然,对许多力学现象线性化是许可的。线性理论解决了大量问题,在力学的发展上起了并继续起着重要作用。但在许多其他情况下,线性理论则是完全不对的。例如:油漆工业中油漆为什么总是积聚在搅拌器轴杆周围而使搅拌效率不高?怎样计算像车胎那样的橡皮制品?柱体扭转时为什么会伸长?射流在刚离管口处为什么会呈现径向膨胀现象?诸如此类生产斗争和科学实验中提出的问题经典理论无法回答。

力学从本质上是非线性的。着眼点不能局限于线性理论。开展非线性理论的研究,除了克服“线性思维”习惯外,确实有许多困难。特别是物性的非线性,应根据什么原则建立本构关系?

张量分析的运用帮了一些忙,方程不显得那样可怕了。

事情发生变化开始于1945年赖纳(Reiner)和1948年里夫林(Rivlin)的工作。

里夫林在任意形式的贮能函数下,对于不可压缩弹性体得到了几个简单而重要问题(圆柱体扭转,立方体弯曲等)的精确解。把这些解和橡皮的实验作比较得到了橡皮贮能函数的形式。用这结果予拟橡皮制品的行为,即使它的伸长为原长的两三倍,精度仍能达到百分之几。只要想到,伸长度为1%时小变形理论的误差已甚大,就可以体会到有限变形论获得成功的份量了。这个成功鼓舞了人们研究这理论的勇气,从而开始了对有限变形弹性论的新攻势。在这以前,不少人企图从分子结构观点提出橡皮的计算理论,但都失败了。现在在力学的唯象理论里获得了完全精确的和一般性的解决。从这里还产生一个新的工程学科“橡皮应用力学”。里夫林的解使“柱体扭转为什么会伸长——即波因廷(Poynting)效应”自然获得解决。

赖纳的文章(1945年)是研究非线性粘性流体的。曾经使物理学家和化学家们伤过不少脑筋的油漆搅拌器效率不高问题〔根源在于所谓韦森贝格(Weissenberg)效应〕在这个基于纯粹力学的非线性流体理论下顿时真相大白:要想使爬升现象不出现,必须施加一个与转速平方成正比的压力。里夫林曾用这理论算出粘度计的爬升曲线形状,和实验符合。赖纳的工作使1945年以前基于线性关系的流变学理论全部报废。赖纳工作更深一层的意义是在建立非线性本构方程方面走向一般性方法的第一步。在应用凯利-哈密尔顿(Cayley-Hamilton)定理后,应力 \mathbf{t} 和应变率 \mathbf{d} 的非线性关系一般可表达为 $\mathbf{t} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{d} + \gamma \mathbf{d}^2$,其中 α, β, γ 是 \mathbf{d} 的三个不变量的函数。

一般认为,在1945年理性力学获得了复兴。复兴不是简单的重复,而是达朗贝尔提法在变形体力学方面的进一步发展。1900年希尔伯特(Hilbert)在巴黎数学大会上提出的23个问题中的第六个问题是关于物理(特别是力学)的公理化问题。1909年哈梅尔(Hamel)又重提此事,但长期以来反应不大。

1950年奥尔德罗伊德(Oldroyd)指出本构方程必须具有“正确的不变性”——即应描述与参考系无关的性质。他用根据这原则采用随体坐标建立的粘弹性理论计算两旋转圆筒间的流动问题,和旧的粘弹性理论弗勒利希和扎克〔(Fröhlich和Sack), 1946〕比较,法应力相差一符号。旧的粘弹性理论和韦森贝格效应相反而宣告无效。这说明“不变性”在建立理论时的重要性,是变形体力学公理化方面跨出的第一步。

积极提倡复兴“理性力学”的特鲁斯德尔(Truesdell)在1952年主编了《理性力学与分析杂志(J. Rational Mech. Anal.)》〔1957年改名为《理性力学与分析集刊(Arch. Rational Mech. Anal.)》〕,并在其中发表了理性力学总结性重要文献《弹性和流体动力学的力学基础》。在他的工作的影响和提倡下,一批青年数学和力学工作者积极开展了这领域问题的探讨。

1953年特鲁斯德尔提出低弹性体(hypoelasticity)的概念 $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$,分别是应力和应变率,字母上方的小圆圈表示本构导数, \mathbf{F} 线性依赖于 \mathbf{D} 。诺尔(Noll)证明,任何弹性体在应力和应变关系可逆的条件下,同时是低弹性体,而任何低弹性体在单参数变形或小变形中其行为有如弹性体。格林和托马斯(A.E.Green和Thomas, 1955—56)证明,除了屈服条件,低弹性理论包含了所有塑性流动的一般理论。在1955年的工作里,特鲁斯德尔还具体算出低弹性体表现出塑性流动的实例。

1955年诺尔(Noll)发表了《固态和流动态的连续性》。工作的原始目的是将麦克斯韦粘弹性模型推广至三维非线性情形,把固体和流体作为特殊情形包括进去。推广工作以前有人做过,但正如奥尔德罗伊德所举的例子,因不满足“不变性”要求,有些是错的。诺尔在这里明确提出了“空间各向同性原理”(即本构关系与观察者无关,现称“客观性原理”)。应用这原理得出,原假设为 $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{T}, \rho)$ 的本构方程必具有形式 $\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{D}, \mathbf{T}, \rho)$,其中 \mathbf{Q} 是速度梯度, \mathbf{W} 是旋率张量, ρ 是密度。这种模型他称为流固体(hydrostatic)。

1958年,诺尔在“客观性原理”基础上,把以往力学家们都不自觉地默认的事实“质点的应力由该质点的任意小邻域的运动历史所决定”,即“质点有记忆自己过去历史的能力”,名之曰“确定性原理”。满足这一般性原理的材料称为“单纯物质体”。另外他还提出“物质同构”的概念,把材料

按其满足的变换群来分类。这个变换群如果是完全正交群，材料就是各向同性的。

1960年，科尔曼 (Coleman) 和诺尔提出“减退记忆原理”。它反映了质点对近期历史有较强记忆力。人们不是也有“时间长记不太清了”的情况吗？更不用说在确定性公理中的记忆力是从现时刻至负无穷的了。减退记忆原理是这样实现的：设本构关系 $T = \overset{\infty}{\underset{s=0}{F}}(g(s))$ 。引进影响函数 $h(s)$

(当 $s \rightarrow \infty$ 时它很快趋于 0) 后，假定 F 在历史函数 g 空间里在零历史邻域按模 $\|g\| = \left(\int_0^{\infty} (g(s))^2 h(s) ds \right)^{1/2}$ 是连续的。由此，对缓慢历史得到用多项式逼近本构泛函的定理。1965年王 (C.-C. Wang) 又将这原理进一步发展。后来还有“应力松弛”，“历史延迟”等概念。

另外，又有微分型，率型，积分型材料等概念。以上所有这些都是对单纯物质体而言的。

诺尔在1965年给出了连续介质纯力学理论本构公理的形式系统。王在1973年的专著中转述为：1. 确定性；2. 局部作用；3. 等存在；4. 万有耗散；5. 物质标架无差异；6. 物质对称性。

单纯物质体理论以诺尔1972年提出的新理论达到高潮，他认为当前应力受无穷远历史影响在哲学上是不能接受的，而只是由有限历史所决定。这里他的六个公理更形式化了，由此演绎出单纯物质体的全部性质。这里他用到了许多抽象的数学工具。在1975年埃林根 (Eringen) 的专著中归结为八个公理：1. 因果性公理；2. 确定性公理；3. 等存在公理；4. 客观性公理；5. 物质不变性公理；6. 邻域公理；7. 记忆公理；8. 相容性公理。看来，单纯物质体的公理系统日趋完备。结合各种具体特殊材料的研究相当多。对于单纯物质体的波动问题的研究也有很多有意义的结果 (参见段祝平的调研报告)。

在不断深入研究单纯物质体及其公理系统的同时，理性力学在广度上也不断发展。在连续介质理性热力学，有向物体理论，连续位错理论，非局部理论，混合物理论，电磁介质力学，相对论性连续介质力学等方面的早期代表性著作由科尔曼-诺尔 (1959)，埃里克森 (Ericksen) - 特鲁斯德尔 (1957, 1958)，贡特尔 (Günther, 1958)，比尔比 (Bilby)，克伦纳 (Kröner, 1960)，埃德伦 (Edelen, 1971)，埃林根 (1972)，图平 (Toupin, 1956, 1957) 等相继发表。

关于存在唯一的研究尚少，可举出斯托佩里 (Stoppelli, 1954—58) 和约翰 (John, 1960) 的工作。

在非线性和连续介质理论数值方法方面，美国以奥登 (Oden) 为代表的一组人进行了庞大的 THEMIS 研究计划 (1969—74)，共发表论文97篇，30份研究报告，9本书，4篇博士论文，30篇硕士论文。

近20年来，理性力学代表性著作大多发表在《Arch. Rational Mech. Anal.》及《Int. J. Engng. Sci.》两种刊物上。1960年和1965年特鲁斯德尔等相继编写了《物理大全》卷三之一，之三，题目分别为“古典场论”和“力学的非线性场论”。它们是理性力学研究的阶段性总结。1971年《应用力学评论 (Appl. Mech. Rev.)》开辟了“理性力学和数学方法”专栏，并且列为第一栏。从此“理性力学”作为数学力学的一个重要方面和力学的理论基础不仅得到承认，而且坚实地站稳了在力学中的位置。近年来还出版了不少论述理性力学不同侧面的专著。为了在日本介绍和普及理性力学，《机械的研究》在1976—77年连续18期刊载了德冈辰雄的讲座“理性连续体力学入门”。目前国际上理性力学的研究仍然持续着高潮的局面。

上面谈及的理性力学近代发展涉及五方面问题：(一) 公理系统及数学演绎；(二) 非线性理论；(三) 连续体力学古典模型的推广及与其他学科的交缘；(四) 存在唯一问题；(五) 数值方法。是否可以，理性力学内容就是这五个方面的堆砌？理性力学的核心任务是什么？在提出我们自己的看法之前，暂且先看一下国际上有些什么说法。下面引述特鲁斯德尔的一些观点可供我们参考：

“理性力学有实验的方面，但不是实验科学”。

“理性力学是一门数学科学。牛顿在《自然哲学》里给出了像几何学那样的数学严格性的范例。虽然除了时间和空间，在理性力学里还出现质量，力，能量等概念，但它的精确性丝毫不亚于几何学。”

“理性力学的独立目的是‘去理解力学’。”

“去理解力学”是什么意思呢？根据特鲁斯德尔提示的线索举三个例子说明如下。

1) 流体力学中的赫姆霍兹定理(1858)。定理里出现一个新概念——涡管。赫姆霍兹定理不是通过解边值问题或进行数值解，也没有通过实验，而是通过数学证明得出来的。涡管这个概念帮助我们对流体的流动有了深一层的理解。这就是理性力学“去理解力学”的一个例子。它同时说明，理性力学的任何工作应包含两部分：1.新概念；2.严格的数学证明。

2) 线性弹性理论的赖斯纳(Reissner)变分原理。赖斯纳(1950)把古典的最小总势能原理和最小余能原理作为特殊情形，提出一种以应力和应变同时作为变量的新的“能量”概念。他证明了，这“能量”取极小值时全部方程被满足。这里也包含了新概念和数学证明。

3) 圣维南原理。它是1855年圣维南在解决柱体扭转时提出的。这是个新概念，它能够通过全部或部分实验得到验证。虽然一百多年来一直得到工程师们的信任，而且有效地反复被应用，但对理性力学来说，这仅是事情的开端。因为只有解决“1.这个新概念确切的数学提法是什么？2.如何证明？”这两个问题才算完成理性力学在这个课题上的历史任务。这工作在一百多年后才被斯顿贝格(Sternberg)，图平，诺尔斯(Knowles)，和鲁宾逊(Robinson)等分别用不同途径完成。1965年图平对柱体端部受载情况给出了这原理的数学形式和证明，指出贮能按距离是指数量衰减的。后来贝尔迪切夫斯基(Berdichevskii, 1974)和伯格龙(Berglund, 1977)将这结果推广到一般形式的弹性体和微极弹性体。圣维南原理的实质是空间的距离效应，它目前已被推广到时间和过程问题上而成为极有力的数学原理。

可以看出，“去理解力学”也好，“新概念，数学证明”也好，都是对力学的基本问题进行严格的数学论证。同时也可看到，理性力学并不一概排斥，而只是扬弃那些与实际不符的线性理论。

第二次世界大战以后，在科学技术持续高速度的发展中出现许多引人注目的特点，其中两个是：

1) 摆脱原来分科的约束，各传统学科间互相渗透，互相促进，不断出现各种交叉学科和新兴学科，同时传统的学科本身也正经历着不断向深度和广度发展，进行着辩证综合的过程。

2) 数学的基本概念日益广泛地被应用于描述物理现象，使能用合适的语言简洁地建立自然界的普遍法则，发现自然科学理论的基本数学结构，从而能更深刻地理解现象的本质。

理性力学的新生与发展是和当代科学技术发展的总趋势相呼应的。为了更好地说明现代理性力学的内容和任务，我们先具体看一下它是怎样发展而又有所区别于其他传统力学分支的。

1) **从小变形理论到有限变形理论** 有限变形理论对变形大小没有任何限制。应变和位移的关系由线性形式 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 恢复为 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$ ，并且平衡方程应列在已变形的物体上。

2) **从物性的线性理论到非线性本构理论** 古典的理想物体是胡克体和牛顿流体及它们的各种线性组合。理性力学对本构关系进行极其一般的研究。现在不仅理想的材料数目大为增加，成为系谱，而且还有同时对整类材料进行描述和分析的有效方法。

3) **从古典物体模型到微结构理论(有向物体)** 古典模型是把物体看成有三个自由度的质点的集合，物体的运动就是这个质点集合在不同时刻到 R^3 的映射。在理性力学范畴内，除了对这种模型，特别是单纯物质体已作了深入的系统研究外，还进一步开展了对物体质点具有微结构(microstructure)的研究。在整体的宏观运动中每个质点还可以作为一个小物体进行微运动(micromotion)。如果只允许作刚性微运动，就有所谓“微极(micropolar)理论”，否则为“微态(micromorphic)理论”。在数学上相当于每一点还有一个具有一定拓扑的切空间。用微结构理论可以建立严格的杆、板、壳理论，可以研究颗粒固体、骨骼、复合材料和液晶的运动。在生物力学中用纳维-斯托克斯方程计算血液流动与实际不符，因血液中占容积一半的红血球作为一个细胞在流动中自身还会

变形。用微结构理论可能较好地模拟血液流动。对于在磁场作用下的偶极子，微结构理论显然是必需的。对于湍流的研究，也开始露出采用微结构模型的苗头。假如和涡旋尺寸变化相比，涡旋的运动是主要矛盾，则可采用较简单的微极模型。对某些简单情形，已有算出具体结果的。从这些例子可以看出微结构理论可以描述一大批在古典理论范围外的复杂力学现象。这理论的潜在力量目前尚难估计。随着模型的变化，理论的各个环节也就需要相应地修正，例如古典的应变只需刻划点与邻点间距离的变化，现在还需刻划点与邻点间微运动的差别，柯西应力原理需要扩充，应力不再是对称张量了，质点除了质量还有自旋惯性等等。

4) **从协调理论到非协调连续统理论** 古典理论要求满足协调方程；有位错或内应力存在的物体已不再满足。对离散的晶体位错，尚可作出种种切面，使古典理论仍可适用。但对连续位错，就必须引入不协调的概念了。这种非协调理论用微分几何的办法去考察才方便。且可容许有限的变形。如把未变形的状态视作欧几里德空间，则变形后的状态一般不再是欧几里德的空间。古典理论中的协调方程，即为变形后的空间的黎曼-克里斯托弗尔曲率张量为零。存在位错的空间，甚至已非黎曼空间，是有挠率(Torsion)加当空间，该挠率即可描写位错的密度。

有不少尝试，把非协调理论与有向物体理论统一起来，尚未见完整的结果。上面介绍的几何方法，如用到屈服的理论上，也提出一些有希望的可能性。

5) **从局部理论到非局部理论** 连续介质古典(局部)理论有两个假设：1.全部守恒法则对物体的任何任意小部分成立；2.物体任意点的状态只受该点的任意小邻域影响(局部作用原理)。前者排除了载荷对物体运动和状态变化的长程(距离)效应，后者忽略质点的长程交互作用。但物体总是由具有某种特征长度(尺寸或距离)的子物体(原子，分子，颗粒等)所构成。外载也具有特征长度或特征时间(如外载具有光滑分布的区域的尺寸，波长，频率等)。当内、外特征长度相近时，局部理论的结果失效，这时有必要放弃上述假设而采用所谓“非局部理论”。例如波的弥散现象，根据古典弹性论，波的传播是不弥散的，即相速度与波长无关。但实验表明，当波长较短(特别是当激励的波长和原子距离同数量级)时，弥散效应显著。用非局部理论对于一维情形算得的色散曲线与用点阵原子理论算得的结果非常符合。裂纹尖端的应力集中破坏原子间的连接而导致断裂。用非局部弹性理论可以排除裂纹尖端应力的间断。令箍应力(hoop stress)与内聚应力(cohesive stress)相等就可得到格里菲斯的断裂准则。非局部理论可以解释如表面张力，表面应力，表面粘性等表面现象。两种流体接触面的表面张力可以导致整体失稳和湍流。非局部理论与古典理论有不同的数学表现。例如非局部线性理论的应力应变关系可写成

$$\delta_{ij}^k(X) = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}(X) + \int_{\beta} c^{ijkl}(X,Z) \varepsilon_{kl}(Z) dV(Z)$$

问题归结为解积分微分方程。在神

经生理系统的研究里，非局部性是很重要的，如神经脉冲的传播由纳吉莫(Nagumo)积分微分方程

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + e(1-e)(e-a)-b \int edt$$

描述(参阅纳吉莫等, *Proc. IRE*, 50 (1962), 2061)。总的说来，非局部理论不是微观理论，用的仍是唯象的方法，但考虑到由微观性质引起的效应。这就使得有希望在古典的唯象理论与原子、分子理论间架起桥梁，有可能揭示许多过去属于古典场论之外的力学现象。

6) **从单一的物质理论到混合物理论** 混合物理论研究若干种物质的共同运动。各组分的质点可同时占据空间的同一位置，而在另一时刻，这些质点又可分别占据不同的位置。每组分的质点有自己的速度，混合物在空间各点的平均速度是此时在该空问点的各组分速度的质量加权平均。各组分在该点的扩散速度等于它的速度减去平均速度。化学反应可以使各组分的质量发生变化。用这种理论可以研究扩散现象，多种流体，多孔介质，化学反应介质等。例如催化剂回收是气固二相流动规律的研究问题。火箭燃烧室内进行的是带有化学反应的三相流动。又如地下水及一般的渗流问题中，解决达西

定理经常与实验不符的问题可以在混合物理论范畴内看作流体在弹性体或颗粒介质中的流动来研究。环境污染问题亦然。

7) 从单纯的力学理论到与热、电磁的耦合理论 古典连续介质理论经常局限在力学范围内研究问题。热的因素在气体力学和热弹性论是考虑进去的。自然界现象是辩证地相互联系的。物体变形使温度发生变化,而温度变化又引起变形是众所周知的。压电效应,电致和磁致伸缩现象也不陌生。当研究日趋深入和细致时,耦合现象是不容忽视的。生物力学的研究中,心脏的跳动是伴有电磁现象的。许多透明物体变形后出现双折射现象。古典地解释为介电张量对变形有某种依赖性,这方面的线性理论在麦克斯韦时代已存在,但非线性理论最近十年才开始被研究。旋磁(gyromagnetic)效应也是一种耦合现象。一般都观察到,龙卷风产生前都出现雷暴,这说明大气问题与电磁现象有关。地球内部存在着强大的磁场,地震前出现地磁异常说明地震不是一个单纯力学问题。仅这几个例子就足以说明开展电磁介质力学研究的必要性。在这种与电磁场打交道的情况下,对介质热动力学理论极为本质的“客观性公理”(即空间标架的刚性运动下的不变性)必须代之以洛伦兹不变性。要重新考察可变形连续统理论与电磁场交互作用的基础,因此最终必然引导到下面的相对论性的提法。

8) 从牛顿力学到相对论(狭义的和广义的)连续介质力学。

上述对传统力学关系的每一方面差不多均可单独自成理论,而更经常出现的则是它们间的组合,如非局部微极理论,有限变形连续位错理论等。任何一种力学理论都出现物体,质量,运动及应力等基本概念。采取物体的不同模型,其运动及变形的描述方式就不一样,随之质量,应力等概念也相应发生变化(如微极理论中的自旋惯性,非对称应力张量,偶应力张量等)。制约这些基本概念的各个守恒法则也要重新考虑。相对而言,模型一旦确定,这些工作都是可以做到的。重要的是,即使模型和外界作用相同,响应也会因材料而异。这里起决定性作用的是本构关系。每一个本构关系代表一种理想化的材料。如何建立一般的非线性本构关系,这是任何一种变形体力学理论的核心而困难的问题。西尼奥里尼说这是真正数学物理的最困难问题。一般之所以认为理性力学从1945年获得了新生,正是在这个问题上打开了一个突破口。达朗贝尔所提到的“正确的公理”并不是可有可无的东西,也不是象牙塔尖。公理系统只不过是建立理论所应遵循的原则罢了。只要涉及模型和理论,人们总是应用这样或那样的公理,只是自觉的程度不同而已。公理就是自然规律从感性阶段经过思维上升到理性认识的“自觉性”的表现。从正确的公理系统出发,遵循着严格的逻辑推理,就保证有可能建立站得住脚且能反映客观现象矛盾的主要方面的模型和理论。

马克思说过:“科学仅当它成功地利用数学时才达到完善的程度”。理性力学的每一项研究,从建立模型和理论,存在唯一定理的考验,到解决实际问题的解析的或数值的方法,都牵涉到数学的应用问题。诚然,有些理性力学的工作可能稍微过于形式化,但理性力学的近代发展是和数学的新概念和新成果的应用分不开的。用数学不是理性力学的目的,数学是理性力学借以更深刻,更确切地描述自然,了解自然和征服自然的必备工具。

至此,我们可以对近代理性力学作一概括的描述:理性力学是一个具有横贯性的力学学科。它用数学的基本概念和严格的逻辑推理,一方面对各传统变形体力学分支用统一的观点进行综合性的,更深一层的基本规律的探索,另一方面根据生产斗争和科学实验的需要,对古典理论无法解决或解决不好的问题,力图从物体原型出发,经过综合过程,由感性认识上升到理性认识,建立和发展新的力学模型和理论。理性力学研究的一个重要特点是力图建立各种理论的公理体系,而对自然现象间的辩证联系和一般本构关系的研究则给予相当的注意。因此,理性力学的研究对象是力学的理论基础部分,是各分支的共性部分。理性力学并不代替各传统分支。

就上面谈及的各个方面,理性力学离开发展到完善的地步尚甚远,它还要准备随时迎接建立新模型和新理论的任务。

理性力学的参考文献是浩瀚的,大部分工作发表在J.Rat.Mech.Anal., Arch. Rat. Mech. Anal.和Int. J.Engng.Sci.等刊物上。下面列举若干代表性著作(其中都有详尽文献索引)以供

参考。

- [1] Truesdell, C., The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics, *J.Rat.Mech.Anal.*, 1 (1952), 125—300.
- [2] —, Toupin, R.A., The Classical Field Theories, *Handbuch der Physik*, Bd. III/1, Springer (1960) .
- [3] Eringen, A.C., *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill (1962).
- [4] Truesdell, C., Noll, W., The Non-linear Field Theories of Mechanics, *Handbuch der Physik*, Bd. III/3, Springer (1965) .
- [5] —, *The Elements of Continuum Mechanics*, Springer (1966) .
- [6] —, *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*, Springer (1966) .
- [7] —, *Essays in the History of Mechanics*, Springer (1968) .
- [8] Eringen, A.C., *Continuum Physics*, Vol. I-IV, Academic (1971—75) .
- [9] Oden, J. T., *Finite Elements of Non-linear Continua*, McGraw-Hill (1972) .
- [10] Truesdell, C., ed., *Mechanics of Solids II*, *Handbuch der Physik*, Bd. VIa/2, Springer (1972) .
- [11] Wang, C.-C., Truesdell, C., *Introduction to Rational Elasticity*, Noordhoff (1973) .
- [12] Noll, W., *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*, Springer (1974) .
- [13] Oden, J.T., Reddy, J.N., *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer (1976) .
- [14] 德冈辰雄, 有理连续体力学入门, *机械の研究*, 28, 1—12 (1976); 29, 1—6 (1977) .
- [15] Truesdell, C., *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Vol. I, Academic (1977) .

本报告是在和中国科学院力学研究所段祝平,谈庆明,王克仁,武汉数学计算技术研究所吴学谋,西南交通大学戴天民等同志共同讨论的基础上写成的。