I积分和弹塑性断裂准则

力学所　十二室断裂力学组

摘　　要

本文提出了一个与路径无关的新积分，这个积分命之为I积分，I积分对任何塑性材料都有明确的定义，并且是一个与积分区域无关的不变积分，它可作为裂纹顶端弹塑性场的平均度量。本文同时证明I积分等于裂纹扩张力。因此，I积分可以作为弹塑性断裂准则。

一、引　　言

1951年在位错理论的研究中 Eshelby〔5〕提出了积分形式的能量动量张量的概念。1968年 Rice〔1〕在研究裂纹顶端的弹塑性应力场的过程中，引入了与能量动量张量静分量形式相同的J积分。Rice论证了J积分的路径无关性，确立了J积分与形变功率之间的关系。由于J积分是裂纹顶端应力场的平均度量，它可以由实验直接测定。因此，七十年代以来，J积分作为一个有吸引力的断裂准则，受到了普遍的重视。

但是J积分的上述特性都是建立在塑性形变理论基础之上的。塑性形变理论本质上是非线性弹性理论，它应用的限制条件之一是不允许卸载。对于实际的塑性材料，塑性应变与加载历史有关，而与应力并没有唯一对应的关系。与此相应的储藏在单位体元内的应变能也与加载历史有关。因此，J积分所包含的应变能密度W的含意并不清楚。

另一方面，塑性变形是不可逆的。因此J积分与形变功率之间的关系，不能应用于裂纹扩展过程。对一个裂纹体加载从而使裂纹在该载荷下扩展，与裂纹先扩展然后再加载，得到的结果是不相同的。因此，J积分不能简单地解释为裂纹扩展力，它可以看作是相同载荷条件下，两个具有相近裂纹尺寸的同一物体总势能的比较。

J积分的这些弱点是众所周知的。Rice等人曾经试图寻找一个适用于塑性流动理论的与路径无关的积分，但是迄今为止，这种努力没有获得成功。

本文提出了一个与路径无关的新积分。这个积分名之为I积分。I积分对任何塑性材料，包括用塑性流动理论描述的真实材料，都有明确的定义，并且是一个与积分区域无关的不变积分，它可以作为裂纹顶端弹塑性场的平均度量。

另一方面I积分与裂纹扩展力之间有着直接关系，因此，I积分可以作为弹塑性断裂准则。从线弹性到全塑性I_{1c}都可作为平面应变条件下裂纹起始扩展的断裂准则。

二、I积分的引入

与J积分类似的，引入积分：

$$L=\int_{\Gamma}\left\{W e d y-\vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} d s\right\} \qquad (1)$$

如图1所示，Γ是环绕裂纹顶端的一条任意回路。

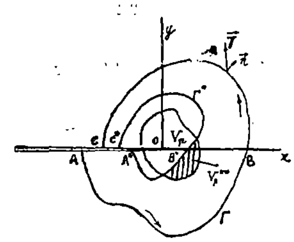

图1　裂纹体

$\vec{n}$是Γ曲线上任意点的外法线，该点的张力矢量为

$\vec{T}$，$T_i=\sigma_{ij}n_j$。$\vec{u}$是位移矢量。S为Γ曲线上的弧长。与J积分不同的是We与应力σ_{ij}唯一对应的弹性应变能密度。

$$We=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\cdot\varepsilon_x^e+\sigma_y\cdot\varepsilon_y^e+\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy}^e\right)$$

$$=\frac{(1+\nu)}{2E}\left\{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2-\nu(\sigma_x+\sigma_y)^2+2\tau_{xy}{}^2\right\},\tag{2}$$

弹性应变$\varepsilon_x{}^e$，$\varepsilon_y{}^e$，$\gamma_{xy}{}^e$与σ_x，σ_y，τ_{xy}之间的关系可用虎克定律表示：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x{}^e&=\frac{\partial W_e}{\partial\sigma_x},\\ \varepsilon_y{}^e&=\frac{\partial W_e}{\partial\sigma_y},\\ \gamma_{xy}{}^e&=\frac{\partial W_e}{\partial\tau_{xy}},\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

公式（2）适用于线弹性及普朗特—瑞斯塑性流动理论所描述的材料，对非线性弹性材料，

$$We=\int_0^{\varepsilon^e_{ij}}\sigma_{ij}d\varepsilon^e_{ij},\tag{4}$$

为了研究L积分的性质，研究一个不包含奇点的封闭回路C，沿着封闭回路C，有：

$$Lc=\int_C\left\{Wedy-\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right\}ds$$

$$=\iint_V\left\{\frac{\partial We}{\partial x}-\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}\right\}dxdy\tag{5}$$

这里σ_{ij}表示应力张量，

ε_{ij}表示应变张量；

$\sigma_{11}=\sigma_x$，$\sigma_{12}=\tau_{xy}$，$\sigma_{22}=\sigma_y$，

$\varepsilon_{11}=\varepsilon_x$，$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$，$\varepsilon_{22}=\varepsilon_y$；

推导公式（5）时，利用了格林公式、平衡方程及下述虚功原理：

$$\int_C\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds=\iint_V\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}dxdy,\tag{6}$$

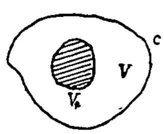

图 2

利用虎克定律（3）、（4）及复合函数的微分公式得到：

$$Lc=\iint_{(V)}\left\{\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^e}{\partial x}-\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}\right\}dxdy$$

$$=-\iint_V\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^p}{\partial x}dxdy=-\iint_{V_p}\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^p}{\partial x}dxdy\tag{7}$$

V_p是封闭回路C所包围的塑性区，$\varepsilon_{ij}{}^p$是塑性应变张量，根据公式（1）与（7）引入一个新的积分：

$$I=\int_\Gamma\left\{Wedy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right\}$$

$$+\iint_{(V_p)}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^p}{\partial x}\right)dxdy\tag{8}$$

这里V_p是Γ所包含的塑性区。

为了证明I积分与选择的路径无关，研究另外的回路Γ^*，假设$V_p{}^{**}$是回路Γ及回路Γ^*之间的塑性区，对于封闭回路$\overline{A^*ABCC^*B^*A^*}$，运用公式（7）得：

$$L_{\overline{A^*ABCC^*B^*A^*}}=\int Wedy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds$$

$$=-\iint_{V_p{}^{**}}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^p}{\partial x}dV\tag{9}$$

封闭回路$\overline{A^*ABCC^*B^*A^*}=\Gamma-\Gamma^*+\overline{AA^*}+\overline{CC^*}$

在线段$\overline{A^*A}$，$\overline{CC^*}$上，应力张量$\vec{T}$为零，dy也等于零，由公式（9）得：

$$\int_\Gamma\left(Wedy-\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right)$$

$$-\int_{\Gamma^*}\left(We-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right)$$

$$=-\iint_{V_p{}^{**}}\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^p}{\partial x}dV\tag{10}$$

进而得到：

$$\int_\Gamma \left(Wdy-\vec{T}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right)$$

$$+\iint_{V_p^{**}}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dV+\iint_{V_p^{*}}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dV$$

$$=\int_{\Gamma^*}\left(Wdy-\vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right)+\iint_{V_p^{*}}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dV$$

注意到$V_p=V_p^*+V_p^{**}$，上式变为：

$$\int_\Gamma \left(Wdy-\vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right)$$

$$+\int_{V_p}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\right)dV$$

$$=\int_{\Gamma^*}\left(Wdy-\vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right)$$

$$+\int_{V_p^*}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\right)dV. \qquad (12)$$

公式（12）就表示I积分的数值与选择的路径无关。

三、I积分与裂纹扩张力

考察带细长深切口的物体，当切口宽度趋于零时就得到极限情况的裂纹体。

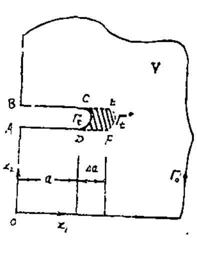

图 3

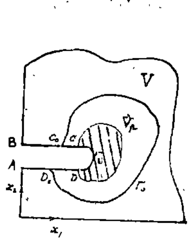

图 4

如图3所示，带细长深切口的物体占有面积V，切口的长度为a，切口的端部为半圆，切口的宽度等于半圆的直径。

该物体承受外载的边界为S_T，其余的边界Su上的位移$\vec{u}$予先给定，设想切口的长度由a扩展至$a+\Delta a$，此时外载所作的功为：

$$\Delta A_T=\int_{S_T}T_i(u_i^*-u_i)\,ds \qquad (13)$$

这里u_i^*是切口扩展后的位移分量。

内力所作的功由两部分组成，一部分是带阴影部分CEFD区域中内力所作的功，由于弧线CEFD是开裂纹，作用在它上面的张力卸载至零，造成该区域微元完全卸载，因此内力所作的功，等于卸载所释放的弹性应变能：

$$\Delta A'_\sigma=-\iint_{\Delta V}We\,(\sigma_{ij})\,dV \qquad (14)$$

另一部分是区域$V-\Delta V$中，内力所作的功

$$\Delta A''_\sigma=\iint_{V-\Delta V}\sigma_{ij}\,(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij})\,dV, \qquad (15)$$

ε_{ij}^*是切口端部扩展后的应变。

裂纹扩展力$\widetilde{G}$可以由下式确定：

$$\widetilde{G}\cdot\Delta\alpha=\Delta A_T-(\Delta A'_\sigma+\Delta A''_\sigma) \qquad (16)$$

$$\widetilde{G}=\int_{S_T}T_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial\alpha}ds-\int_V\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\alpha}dV$$

$$+\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\iint_{\Delta V}WedV \qquad (17)$$

在圆弧$\widehat{DC}$上，$T_i=0$；又在S_u上位移予先给定，因此：

$$\frac{\partial u_i}{\partial a}=0,\ 在Su上$$

依照虚功原理：

$$\int_V\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial a}dV=\int_s T_i\frac{\partial u_i}{\partial a}ds=\int_{S_T}T_i\frac{\partial u_i}{\partial a}ds$$

$$+\int_{\widehat{DC}}T_i\frac{\partial u_i}{\partial a}ds+\int_{Su}T_i\frac{\partial u_i}{\partial a}ds$$

$$+\int_{\overline{DA}+\overline{BC}}T_i\frac{\partial u_i}{\partial a}ds+\int_{S_T}T_i\frac{\partial u_i}{\partial a}ds \qquad (18)$$

将（18）代入（17）得：

$$\widetilde{G}=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{\Delta V}We\,(\sigma_{ij})\,dV$$

$$=\int_{\Gamma_i}Wedy \qquad (19)$$

考察任意一条包围切口端部的回路Γ_0，Γ_0与Γt及线段CC_0，D_0D组成一个封闭回路C，应用公式（7）得：

$$
Lc=\int_C\left\{Wedy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right\}
$$

$$
=-\iint\limits_{V_p}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^{p}}{\partial x}dV,
$$

在半圆Γ_t上$\vec{T}$等于零；在切口自由表面CC_0及D_0D上$\vec{T}$也等于零，dy等于零，由此：

$$
\int_{\Gamma_0}\left\{Wedy-\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right\}
$$

$$
+\int_{V_p}\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^{p}}{\partial x}dV=\int_{\Gamma_t}Wedy \qquad (20)
$$

（20）式左边表示一个$\widetilde{I}$积分，由（19）、（20）得：

$$
\widetilde{G}=\widetilde{I} \qquad (21)
$$

$\widetilde{I}$积分与裂纹扩张力$\widetilde{G}$，字母上的符号"～"表示对细长深切口而言的，让切口宽度趋于零即得：

$$
G=I \qquad (22)
$$

公式（22）表明I积分等于裂纹扩张力。

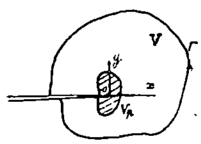

图5

四、I积分与J积分

对于理想的弹性材料（线性的或非线性的）卸载时所释放的弹性应变能We与加载时储存的弹性应变能相等。因此有$We\equiv W$

另一方面有$\varepsilon_{ij}{}^{p}\equiv 0$，这样就得到：

$$
I=\int_{\Gamma}\left(Wedy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right)
$$

$$
+\int_{V_p}\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^{p}}{\partial x}dxdy
$$

$$
=\int_{\Gamma}\left(Wdy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right)=J \qquad (23)
$$

也就是对理想弹性材料，I积分与J积分相等，众所周知，J积分的几个基本性质都是在形变理论范围内得到了证实，J积分本身包含有应变能密度W，这意味着J积分只对线弹性材料及亨基（Hencky）材料有明确的意义，塑性理论已经证明亨基材料本质上是非线性弹性材料。因此，J积分实质上是理想弹性材料的I积分。

对于真实材料，裂纹顶端必然有塑性区，如果塑性区V_P限制在很小的区域内，那么可以认为当线积分路径离裂纹顶端充分远时，I积分的线积分部分与J积分相等。因为在积分路径上，应力应变处于弹性状态，并且应力应变的数值不受塑性区V_P的影响，因此，对小范围屈服的有：

$$
I=J-\iint\limits_{V_p}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^{p}}{\partial x}dxdy \qquad (24)
$$

这里特别强调J积分的路径必须包围裂纹顶端的整个塑性区，不许通过塑性区；

公式（24）表示了对真实塑性材料，I积分与J积分之间的互相关系，对这种关系，我们可以提出一种新的物理解释，这种新的解释如果被实验证明为正确的话，那将给I积分作为弹塑性断裂准则提供依据。

由于I积分考虑了真实塑性材料的裂纹扩展过程，因此从宏观的连续介质力学观点出发，I积分描述了宏观的裂纹扩张力，当I积分的线积分路径包围了整个塑性区时，I积分可表示为裂纹扩张的弹性驱动力与裂纹扩张塑性阻力之差，令：

$$
Ge=\int_{\Gamma}Wedy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds, \qquad (25)
$$

$$
R_P=-\iint\limits_{(V_P)}\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^{p}}{\partial x}dxdy, \qquad (26)
$$

则：

$$
I=Ge-R_P, \qquad (27)
$$

不难证明对任何包含裂纹尖端整个塑性区V_p的回路Γ（由裂纹自由面任一点开始，逆时针包围裂纹尖端整个塑性区，而终止于裂纹另一个自由面的任意回路），Ge是个不变量，它等于回路Γ上的J积分，它表征了裂纹扩展的弹性驱动力，R_P只是取决于裂纹尖端塑性区的应力及塑性应变特性，它表征了裂纹

扩展的塑性阻力，另一方面，从微度观角考虑，裂纹扩展单位面积时，在开裂面两侧必须提供表面张力2T，作为裂纹起始扩展的条件有：

$$I_{1e}=2T=(G_{1e}-R_{1p})_{cr} \qquad (28)$$

从公式（28）看出，当裂纹扩展的弹性驱动力G_1e等于塑性阻力R_1p与两倍表面张力2T之和时，裂纹起始扩展。

对脆性材料，线弹性断裂准则给出：

$$G_1e=G_1c, \qquad (29)$$

从（28）得出：

$$(R_{1p})_{cr}=G_1c-2T \qquad (30)$$

对大多数金属而言，G_1c通常比表面张力大三个数量级，因此，从（30）得

$$(R_1p)_{cr}\doteq G_1c \qquad (31)$$

公式（31）对脆性材料的断裂准则给出了另一种物理解释，也就是说对脆性材料而言，裂纹扩展的塑性阻力R_1p随着载荷的增加趋向于临界值，该临界值是个材料常数。

I积分适用于裂纹扩展过程，因此，它不仅能予示裂纹的起始扩展，而且能予示裂纹的亚临界扩展和失稳扩展的整个过程，对脆性材料而言，裂纹扩展的塑性阻力R_1p，随着裂纹的亚临界扩展迅速趋于饱和，该饱和值与临界值差别很小，都可看作材料常数。

参考资料

（1）Rice, J. R., Journal of Applied Mechanics, Transactions of the American society of Mechanical Engineers, Jure 1968, pp.379—386.

（2）Rice, J. R., ASTM, STP., 415, 1966, pp.247—311.

（3）Irwin, G. R., ASME, J. Appl. Mech., 29, Series E, 1962, pp651—654.

（4）Broeh, D., "Elementary engineering fracture mechanics", Noozdhoff International publishing, Leydon, 1974.

（5）Eshelby, J. D., in《Solid state physics》, vol. 3, Academic prese, 1956, p.100.