

# 悬臂的平行四边形斜加筋板固有频率的计算和试验

力学所十二室振动组

## 一、前言

在航空和导弹工程中，小展弦比翼面已有普遍的应用，从而，关于斜板的固有频率的计算（见文献〔2〕〔4〕〔5〕〔6〕）和试验（见文献〔8〕〔9〕〔10〕）已有不少典型的方法；但是悬臂的斜加筋板的振动分析方面的文章尚不太多。这里把斜加筋板作各向异性板处理，并采用梁函数的方法（见文献〔1〕〔3〕）对悬臂的平行四边形斜加筋板的固有频率作了计算。试验是通过单点激振和单点拾振的强迫振动共振法进行，测量了六种悬臂平行四边形斜加筋板的固有频率及节型。

## 二、记号

$D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{13}$ ,  $D_{23}$ ,  $D_{33}$  为各向异性板之基本参数。

$t$ : 面板（加筋板分为面板和筋条）厚度。

$a$ ,  $b$  分别为板的长度和宽度。

$\theta$ : 板的斜角。

$T$ : 筋的高度。

$d$ : 筋的宽度（沿板之边度量）。

$h$ : 面板中面到筋的中面间的距离。

$w$ : 板的横向挠度。

$E$ : 材料的杨氏模量。

$G$ : 材料的剪切模量。

$\nu$ : 波桑系数。

$\gamma$ : 材料比重。

$\rho$ : 材料质量密度。

$g$ : 重力加速度。

$m$ : 平行于X轴之筋数。

$n$ : 平行于Y轴之筋数。

$X$ ,  $Y$  为斜座标的两轴。

$A$ ,  $V$  分别为板的动能和势能的表达式。

$f_{r,q}$ : 为板的频率

$$\omega = 2\pi f \quad l_1 = \frac{a}{n} \quad l_2 = \frac{b}{m}$$

$$S = \sin\theta$$

$$C = \cos\theta$$

⑥附图表明无水压情况，振型与频率的关系，在轴向半波数  $m=1$  时频率最低，随着  $m$  值增加频率增大。然而随着  $m$  值的增大发生最低频率的环向波数  $n$  值也增加。

## 四、参考文献

- 〔1〕 N. L. Basdekas, Response of oddly-stiffened circular cylindrical shells, Journal of Sound and Vibration (1971), 17 (2), p187
- 〔2〕 G. D. Galletly, On the in-uacuo Vibrations of Simply Supported Ring—Stiffened cylindrical Shells, Proc. of

Second U. S. National Congress of Applied Mechanics p.225

〔3〕 W. Flugge, Stresses in Shell, Springer-Verlag, 1960, p.422

〔4〕 J. D. Frederick, Impact loading of Submarine Hulls, AD-705525.

〔5〕 M. Baruch and J. Singer, Effect of Eccentricity of Stiffeners on the general Instability of stiffened cylindrical Shell under hydrostatic Pressure The Journal of mechanical Engineering science, Vol5, №1, 1963, pp. 23-27

### 三、基本假设

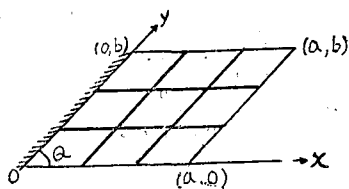


图1 加筋斜板

1. 筋段密, 加筋板可以作为各向异性板处理。
2. 直线假设: 垂直于中面的法线变形后仍垂直于中面, 这假设也适用于筋条。
3. 弯曲时无中面变形和中面力。
4. 加筋板抗弯时和抗扭时, 面板和筋具有相同之曲面即  $w = w(x, y)$ 。
5. 在扭转情况下, 筋与板有同一扭曲率

$$\lambda = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

### 四、基本方程的导出

悬臂斜板的座标如图一所示, 其能量表达式为:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{S}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{33} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 4 \left( D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \rho H \omega^2 w^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $H = t + Td \left( \frac{m}{b} + \frac{n}{a} \right)$  为加筋板之折合厚度。

$$\text{设 } w(x, y) = u(x)u(y) \quad (2)$$

代(2)式到(1)并使  $\delta \Pi = 0$

则有:

$$\begin{aligned} I_1 D_{11} \delta \int_0^a \left[ u''(x) \right]^2 dx + 2I_2 D_{12} \delta \int_0^a u''(x)u(x) dx + I_4 D_{22} \delta \int_0^a u^2(x) dx \\ + 4I_3 D_{33} \delta \int_0^a \left[ u'(x) \right]^2 dx + 4I_5 D_{13} \delta \int_0^a u''(x)u'(x) dx \\ + 4I_6 D_{23} \delta \int_0^a u(x)u'(x) dx - I_1 \rho H \omega^2 \delta \int_0^a u^2(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{其中 } I_1 = \int_0^b v^2(y) dy,$$

$$I_2 = \int_0^b v(y)v''(y) dy,$$

$$I_3 = \int_0^b \left[ v'(y) \right]^2 dy, \quad I_4 = \int_0^b \left[ v''(y) \right]^2 dy, \quad I_5 = \int_0^b v(y)v'(y) dy, \quad I_6 = \int_0^b v''(y)v'(y) dy$$

(3-1)

现以  $r$  表示板上平行  $x$  轴之节线数, 以  $q$  表示板上平行于  $y$  轴之节线数, 则可设定一梁函数  $v(y)$ , 其满足两端自由的均质梁的振动方程。

$$\text{当 } r = 0 \text{ 时 } \quad v(y) = 1$$

$$r = 1 \text{ 时 } \quad v(y) = \sqrt{3} (1 - 2y/b) \quad (4)$$

$$r = 2, 3, 4, \dots \text{ 时 } \quad v(y) = v_1(y) + v_2(y)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中 } v_1(y) &= \cos ky + \mu \sin ky \\ v_2(y) &= \cosh ky + \mu \sinh ky \\ \mu &= (\cos kb - \cosh kb) / (\sinh kb - \sin kb) \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

k 满足方程: (自由-自由梁频率方程)

$$\cos kb \cosh kb = 1 \quad (4-2)$$

由三角函数和双曲函数的特性有:

$$\left. \begin{aligned} v_1''(y) &= -k^2 v_1(y) & v_2''(y) &= k^2 v_2(y) & v_1(0) &= v_2(0) \\ v_1(b) &= v_2(b) & v_1'(0) &= v_2'(0) & v_1'(b) &= v_2'(b) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

令  $\eta_0 = kb$  及  $t_0 = \tan(\eta_0/2)$  并结合方程式 (4-2) 可导出:

$$\left. \begin{aligned} \sin \eta_0 &= \frac{2t_0}{1+t_0^2} & \cos \eta_0 &= \frac{1-t_0^2}{1+t_0^2} \\ \cosh \eta_0 &= \frac{1+t_0^2}{1-t_0^2} & \sinh \eta_0 &= \mp \frac{2t_0}{1-t_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在第四个公式中, 当  $m = 2, 4, 6, \dots$  取上面符号

$m = 3, 5, 7, \dots$  取下面符号

由公式 (4-1), (5), (6) 及 (3-1) 可求出  $I_1$  到  $I_6$  的值

$$I_1 = b$$

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \begin{cases} -\frac{\eta_0}{b} \left( t_0^2 + \frac{2t_0}{\eta_0} \right) & m = 2, 4, 6, \dots \\ -\frac{\eta_0^2}{b} \left( \frac{1}{t_0^2} - \frac{2}{\eta_0 t_0} \right) & m = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \\ I_3 &= \begin{cases} \frac{\eta_0^2}{b} \left( t_0^2 - \frac{6t_0}{\eta_0} \right) & m = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{\eta_0^2}{b} \left( \frac{1}{t_0^2} + \frac{6}{\eta_0 t_0} \right) & m = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \\ I_4 &= \eta_0^4 / b^3 \\ I_5 &= I_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将 (7) 式代入 (3) 式, 并利用  $x = 0$  端之边界条件

$$\left. \begin{aligned} u(x)|_{x=0} &= 0 \\ u'(x)|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

计算各项变分, 整理后得微分方程

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{2}{b^2} (J_2 - 2J_3) \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{b^4} (J_4 - p^4) u = 0 \quad (9)$$

及  $x = a$  端的边界条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{J_2}{b^2} u &= 0 \\ \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{1}{b^2} (J_2 - 4J_3) \frac{du}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

此处:  $J_2 = \frac{J_2 b^2 D_{12}}{I_1 D_{11}}, J_3 = \frac{J_3 b^2 D_{33}}{I_1 D_{11}}, J_4 = \frac{J_4 b^4 D_{22}}{I_1 D_{11}}, p^4 = \frac{\rho H \omega^2 b^4}{D_{11}}$

满足 (8)、(9) 二式的解可写为:

$$u = A \left[ \cosh(\alpha x/b) - \cos(\beta x/b) \right] + B \left[ \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha x/b) - \frac{1}{\beta} \sin(\beta x/b) \right] \quad (11)$$

其中,

$$\alpha = \left\{ \left[ p^4 - J_4 + (2J_3 - J_2)^2 \right]^{1/2} + (2J_3 - J_2) \right\}^{1/2}$$

$$\beta = \left\{ \left[ p^4 - J_4 + (2J_3 - J_2)^2 \right]^{1/2} - (2J_3 - J_2) \right\}^{1/2} \quad (12)$$

将 (11) 式代入 (10) 式, 则得出以 A、B 为未知数的一组齐次方程, 使齐次方程的系数行列式为零, 则可得出如下之频率方程式:

$$p^4 - J_4 + J_2 (J_2 - 4J_3) + \left[ p^4 - J_4 + J_2 (J_2 - 4J_3) + 8J_2^2 \right] \cosh(\alpha a/b) \cos(\beta a/b)$$

$$+ \left[ 2J_3 (p^4 - J_4)^{1/2} + J_2 (p^4 - J_4)^{1/2} + J_2 (J_2^2 - 2J_2 J_3) / (p^4 - J_4)^{1/2} \right] \sinh(\alpha a/b) \sin(\beta a/b) = 0 \quad (13)$$

其中

$$p^4 = \frac{4\pi^2 \gamma H b^4}{g D_{11}} \omega^2$$

$$J_2 = \begin{cases} (-1)^r \eta_0^2 \left( t_0^2 + \frac{2t_0}{\eta_0} \right) \frac{D_{12}}{D_{11}} & r = 2, 4, 6, \dots \\ (-1)^r \eta_0^2 \left( \frac{1}{t_0^2} - \frac{2}{\eta_0 t_0} \right) \frac{D_{12}}{D_{11}} & r = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

$$J_3 = \begin{cases} \eta_0^2 \left( t_0^2 - \frac{6t_0}{\eta_0} \right) \frac{D_{33}}{D_{11}} & r = 2, 4, 6, \dots \\ \eta_0^2 \left( \frac{1}{t_0^2} + \frac{6}{\eta_0 t_0} \right) \frac{D_{33}}{D_{11}} & r = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

$$J_4 = \frac{D_{22}}{D_{11}} \eta_0^4 \quad \text{其中 } \eta_0 \text{ 为}$$

$$\cos \eta_0 \cosh \eta_0 = 1$$

之根, 其各阶之值如表 I 所示, 其中刚度参数  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{33}$  之表达式如下:

$$D_{11} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)S^3} + \frac{ESd}{I_2} \left( h^2 T + \frac{T^3}{12} \right), \quad D_{12} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)S^3} (S^2 \nu + C^2),$$

$$D_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)S^3} + \frac{ESd}{I_1} \left( h^2 T + \frac{T^3}{12} \right),$$

$$D_{33} = \frac{(C^2 + 1 - S^2 \nu) Et^3}{24(1-\nu^2)S^3} + \frac{EJ_K}{8S^2(1+\nu)} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right)$$

式中  $J_K = \alpha_0 T^4$  当  $\frac{d \cdot s}{T} = 1.5$  时  $\alpha_0 = 0.294$  (见文献 [7])

表 1

r	0	1	2	3
$\eta_0$	—	—	4.730	7.853
$t_0$	—	—	-0.9827	+1
$J_2$	0	0	$-12.31 \frac{D_{12}}{D_{11}}$	$-45.96 \frac{D_{12}}{D_{11}}$
$J_3$	0	$\frac{12 D_{33}}{D_{11}}$	$49.50 \frac{D_{33}}{D_{11}}$	$108.8 \frac{D_{33}}{D_{11}}$
$J_4$	0	0	$500.5 \frac{D_{22}}{D_{11}}$	$3803 \frac{D_{22}}{D_{11}}$

由表中可知, 当  $r = 0$  时  $J_2 = J_3 = J_4 = 0$  以  $f_q$  表示各阶频率由 (12)、(13) 式可导出 (使  $P_{qs}/b = L_q$ )

$$f_{q,q} = \frac{L_q^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D_{11}g}{\gamma H}} \quad (14)$$

$q = 0, 1, 2, \dots$

其中  $L_0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4$

1.875 4.694 7.855 10.995 14.137

公式 (14) 类似于悬臂梁的振动频率表达式。

### 五、计算实例及讨论

以 D16-A T 铝材通过化学铣切办法制成的整体加筋悬臂板为例进行了计算。材料杨氏模数为  $E = 7.2 \times 10^5$  千克重/厘米<sup>2</sup>, 波桑系数  $\nu = 0.32$ , 材料比重为  $\gamma = 2.85$  克重/厘米<sup>3</sup>, 板的板厚均为  $t = 2 \times 10^{-1}$  厘米, 筋高均为  $T = 4 \times 10^{-1}$  厘米, 筋宽均为  $d = \frac{12}{\sqrt{2}} \times 10^{-1}$  厘米, 斜角均为  $\theta = 45$ 。我们采用了尺寸不同的六种板作了计算, 并与试验值作了比较, 结果列于表 II。

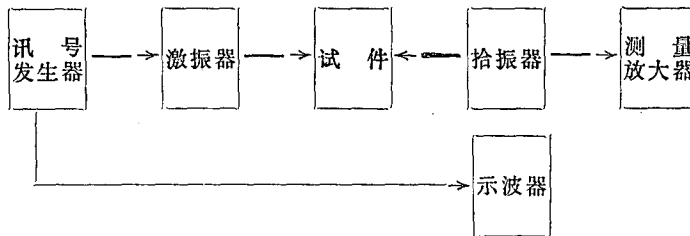


图 2 试验方框图

试验中所用仪器型号如下:

讯号发生器	XD1型信号发生器	激振器	小型电磁式激振器
拾振器	PR9262电磁式振动传感器	示波器	571型示波器

由表 II 所示之各板的计算结果及实验结果可以看出:

(一) 在低阶次 ( $f_{00}, f_{10}, f_{01}$ ) 的情况下, 计算值与试验值的一致性满意的, 因而方法是可行的。

(二) 由 (1-1-1) 及 (1-2-1) 板的各阶频率值的比较可看出, 加筋之疏密程度对频率是有影响的, 但并不明显。

(三) 从频率  $f_{11}$  的计算值和试验值的比较可以看出, 计算值对试验值的百分误差 (绝对值) 随展弦比 ( $a/b$ ) 的增加而增高, 这种现象可作如下解释: 由表 IV a (1-1-1)、(1-2-1) 板之试验节线图可知, 随着振动阶次的增加, 节线向后掠方向推移, 且节线方向改变。而  $w = u(x)v(y)$  的梁函数法是不能确切反映上述变异的, 因而造成计算值与试验值的偏离。这种节线走向改变的现象, 当展弦比较大时尤为严重 (比较 1-1-1 板和 3-2-1 板的  $f_{11}$  阶振型节线), 故计算误差也相对增高。

(四) 由  $f_{11}$  的计算值和试验值的比较还可看出, 计算值比试验值偏低, 这主要是由于在计算中忽略了某些刚度的作用而造成的。由公式 (7) 可知,  $I_6 = I_8 = 0$ , 反映在能量表达式 (公式 3) 中即是使弯扭耦合刚度  $D_{13}, D_{23}$  失去作用, 于是对于既有弯又有扭的  $f_{11}$  阶的计算值就因所失刚度的影响而下降。这是梁函数法的根本弱点。

(五) 为了得到更为精确的结果, 需使用有限单元法进行计算。

### 六、试验方法及试件

我们只对六种不同的斜加筋板进行了试验, 其平面形状及板号详见表 III。

试件水平地固定在夹具中, 在固定端以二个  $1.5 \times 40 \times 300$  毫米的钢块为压板, 夹具用 M10 的螺栓 (间距为 50 毫米) 与和地面相连接的大钢块联接, 板的插

入长度为40毫米。

通过使用几种方法作了比较之后得知，在加筋板自身刚度较大的情况下，采用接触式激励器（即不考虑附加质量和附加刚度的影响）试验结果还是令人满

意的，故采用单点激振、单点拾振的强迫振动共振试验来确定斜加筋悬臂板的固有频率和节型，用“撒砂法”测出固有振型的节线分布。但对第一阶固有频率仍以自由振动法进行测定。

表 II 不同尺寸的悬臂平行四边形斜加筋板的固有频率的计算值与试验值，误差值为计算值相对于试验值的百分误差

板号	a	b	m	n	$f_{r,q}$ 赫兹	计算值	试验值	误差%
1   1   1	45厘米	29.8厘米	2	4	$f_{00}$	16.77	16.5	+1.6
					$f_{10}$	61.10	61.0	+0.16
					$f_{01}$	105.1	113.5	-7.4
					$f_{11}$	205.2	729	-26
1   2   1	45厘米	29.5厘米	3	5	$f_{00}$	17.92	18.0	-0.5
					$f_{10}$	61.86	63.4	-2.4
					$f_{01}$	112.3	120	-6.4
					$f_{11}$	209.4	303	-30
2   1   1	30厘米	30厘米	2	2	$f_{00}$	38.27	37.5	+0.2
					$f_{10}$	100.5	96	+4.6
					$f_{01}$	239.8	225	+6.5
					$f_{11}$	362.5	406	-10.7
2   8   1	30.5厘米	30.5厘米	5	4	$f_{00}$	42.90	41.5	+3.2
					$f_{10}$	98.80	96	+2.9
					$f_{01}$	268.8	270	-0.4
					$f_{11}$	371.5	432	-14
3   2   1	21厘米	29.8厘米	3	2	$f_{00}$	82.91	81.5	+1.7
					$f_{10}$	161.7	156	+3.6
					$f_{01}$	519.5	505	+2.8
					$f_{11}$	651.1	652	-0.1
3   3   1	21厘米	3.04厘米	5	3	$f_{00}$	89.97	78.6	+14
					$f_{10}$	162.2	153	+6
					$f_{01}$	563.7	560	+0.6
					$f_{11}$	678.5	710	-4.4

## 七、自然频率与节线

分别对六块斜加筋板测得 1—5 阶自然频率及相应自然节型（节线），其结果示于表 IV a, 表 IV b, IV c。

试件尺寸表 表 III

试件号	1-1-1	1-2-1
板及筋尺寸		
试件号	2-1-1	2-3-1
板及筋尺寸		
试件号	3-2-1	3-3-1
板及筋尺寸		
板厚 $\delta=2$ 毫米 筋高 $h=4$ 毫米		

试件节线 表 IV a

试件号	1-1-1	1-2-1
16.5 周/秒		
61		
113.5		
168		
279		

试件节线 表 IV b

试件号	2-1-1	2-3-1
37.5 周/秒		
96		
225		
406		
432		

试件节线 表 IV c

试件号	3-2-1	3-3-1
81.5 周/秒		
156		
356		
505		
652		

下转 100 页

110部队, 1970。

- [6] Jour. Acoust Soc Amer (31), №7, 1959, p53.
- [7] Jour. Acoust Soc Amer (34), №8, 1962, p.1082.
- [8] N. A. S. A. CR—742.
- [9] N. A. S. A. CR—1269.
- [10] Jour. Acoust. Soc. Amer (34), №4, 1962, p469.
- [11] Structural Damping, A. S. M. E., 1959.
- [12] Jour. Acoust. Soc. Amer. (47), 1970, p.220.

- [13] Shock & Vibration Handbook, Vol I, P65, 1961.
- [14] Jour. Engng. for Industry, Trans. A. S. M. E., (89) №4, 1967.
- [15] Product Engng. (31), Jan. 1960, p57—62.
- [16] Jour. of Engng. for Industry, Trans. A. S. M. E. (83), Nov. 1961, p403.
- [17] Environmental Engng., May №38, 1969, p7—13.
- [18] Jour. Acoust. Soc. Amer., (48) №1, July 1970.

上接93页

### 参 考 文 献

- [1] Dana Young, Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method, J. A. M., vol17, 1950, P448.
- [2] Barton. M. V., Vibration of Rectangular and Skew Plates, J. A. M., vol 18, 1951, P129.
- [3] Martin A. I., On the Vibration of a Cantilever Plates, O. J. M. M., vol9, 1956, P94.
- [4] Andersen. B. w., Vibration of triangular Cantilever plates by the Ritz Method, JAM., Vol 21, 1954, P365.
- [5] 林道垣, 关于悬臂的梯形薄板的振动, 高等学

校自然科学学报, 数学力学天文学版试刊, 第三期, 1964.

- [6] Vibration and Buckling of orthotropic Skew Plates, Journal of the indian institute of Science, Vol 53, number 3, July, 1971.
- [7] 别辽耶夫著, 材料力学。
- [8] 悬臂薄板固有频率和节型的实验研究, 南京航空学院307教研室。
- [9] 悬臂薄板自然频率与振型的实验报告(一), 西北工业大学科研资料, 尤文洁 郑长卿。
- [10] Perry. W. Hanson and W. J. Juovila., Experimentally determined natural Vibration modls of some cantilever owing elutter modes by using an acceleration method, NACA TN4010, 1957.4.