

# 气波机械的相似律与模拟问题

力学所 五室 气波组

1975年12月

## 摘 要

根据量纲分析理论,对于影响气波机械过程及其性能的物理量进行了量纲分析。得出了彼此独立的六个无量纲组合数。利用这些无量纲数保持为常值的要求,来解决气波增压器的模拟问题。

## 目 录

前 言	(1)
(一) 气波增压器中出现的物理量及其代表量	(2)
(二) 基本量	(2)
(三) 无量纲组合数	(3)
(四) 模拟问题	(4)
(五) 应用	(7)
(六) 结论	(9)
符号说明	(9)
参考文献	(10)

## 前 言

气波机械是基于气体的压缩波和膨胀波的作用来交换和传递能量的机械。这类机械有:气波增压器、压强分离器、引射器、制冷器和气波发动机等。本文着眼于气波增压器的相似律和模拟问题的分析。但分析结果也可应用到其他气波机械中去。

## (一) 气波增压器中出现的一些物理量及其代表量

出现的物理量	选取的代表量
(1) $D_m$ 、 $L$ 、 $h$ 、 $b$	$D_m$ : 几何参数
(2) $P_A$ 、 $P_E$ 、 $P_c$ 、 $P$	$P_A$ : 气动参数
(3) $T_A$ 、 $T_E$ 、 $T_c$ 、 $T$	$T_A$ : 气动参数
(4) $W_A$ 、 $W_E$ 、 $W_c$ 、 $W$	$W_A$ : 气动参数
(5) $a^\circ$ 、 $a^\circ_A$	$a^\circ$ : 气动参数
(6) $G_A$ 、 $G_E$ 、 $G_c$	$G_A$ : 气动参数
(7) $R_A$ 、 $R_c$ 、 $C_{PA}$ 、 $C_{Pc}$	$R_A$ : 气体性质参数
(8) $\mu_A$ 、 $\mu_c$	$\mu_A$ : 气体性质参数
(9) $u_m = \frac{\pi n D_m}{60}$	$u_m$ : 运动参数
(10) $t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{30\theta}{\pi n}$	$t$ : 运动参数

这些物理量决定了气波增压器的物理过程和它的气动性能，用式表达之可写为：

$$F(D_m, P_A, T_A, W_A, a^\circ, G_A, \mu_A, R_A, u_m, t, g_0) = 0 \quad (1)$$

上式说明与气波增压器物理过程有关的物理量有11个，其中 $g_0$ 是常数。

## (二) 基本量

在这里，我们选用了四个基本量，即质量— $M$ 、长度— $L$ 、时间— $\tau$ 和温度— $\alpha$ ，也就是说我们选用了习惯量纲制。在这种习惯量纲制中，运动第二定律的表达式为：

$$F = \frac{ma}{g_0}$$

上式中各个量的量纲和单位分别是：

$F$ —— $M$ 、公斤（力）

$m$ —— $M$ 、公斤（质）

$a$ —— $L\tau^{-2}$ 、米/秒<sup>2</sup>

$g_0$ —— $L\tau^{-2}$ 、米/秒<sup>2</sup> 并等于9.80665

基于 $M$ 、 $L$ 、 $\tau$ 和 $\alpha$ 四个基本量可把式（1）中各物理量的量纲关系列如下表：

	$D_m$	$P_A$	$T_A$	$W_A$	$a^\circ$	$G_A$	$R_A$	$\mu_A$	$u_m$	$t$	$g_0$
$M$	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
$L$	1	-2	0	1	1	0	1	-2	1	0	1
$\tau$	0	0	0	-1	-1	-1	0	1	-1	1	-2
$\alpha$	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0

### (三) 无量纲组合数

(1) 通用量: 选用四个含有基本量较多而彼此独立的四个物理量  $P_A$ 、 $G_A$ 、 $\mu_A$  和  $R_A$  作为组成无量纲数的通用量。

(2) 根据量纲分析理论<sup>[1]</sup> 独立的无量纲组合数应为:

$$n_{\pi+1} = 11 - 4 = 7$$

由于采用了常数  $g_0$ , 所以实际有用的无量纲组合数应为:

$$n_{\pi} = 7 - 1 = 6 \quad (2)$$

(3) 7 个无量纲组合数的表达式可写为:

$$\pi_1 = P_A^{x_1} G_A^{y_1} \mu_A^{z_1} R_A^{w_1} D_n \quad (3a)$$

$$\pi_2 = P_A^{x_2} G_A^{y_2} \mu_A^{z_2} R_A^{w_2} T_A \quad (3b)$$

$$\pi_3 = P_A^{x_3} G_A^{y_3} \mu_A^{z_3} R_A^{w_3} W_A \quad (3c)$$

$$\pi_4 = P_A^{x_4} G_A^{y_4} \mu_A^{z_4} R_A^{w_4} a^{\circ} \quad (3d)$$

$$\pi_5 = P_A^{x_5} G_A^{y_5} \mu_A^{z_5} R_A^{w_5} u_n \quad (3e)$$

$$\pi_6 = P_A^{x_6} G_A^{y_6} \mu_A^{z_6} R_A^{w_6} t \quad (3f)$$

$$\pi_7 = P_A^{x_7} G_A^{y_7} \mu_A^{z_7} R_A^{w_7} g_0 \quad (3g)$$

(4)  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  等的求解: 将  $P_A$ 、 $G_A$ 、 $\mu_A$ 、 $R_A$  和  $D_n$  的量纲 (从上表中来) 代入式 (3a), 就有:

$$(ML^{-2})^{x_1} (M\tau^{-1})^{y_1} (ML^{-2}\tau)^{z_1} (L\alpha^{-1})^{w_1} (L)_1 = 0$$

从而得出:

$$M: x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

$$L: -2x_1 - 2z_1 + w_1 + 1 = 0$$

$$\tau: -y_1 + z_1 = 0$$

$$\alpha: -w_1 = 0$$

求出:  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $z_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $w_1 = 0$  最后得出  $\pi_1$  的表达式为:

$$\pi_1 = \frac{P_A D_n}{G_A^{\frac{1}{2}} \mu_A^{\frac{1}{2}}} \quad (4a)$$

同理求得  $\pi_2$ 、 $\pi_3$ ……等无量纲组合数的表达式如下:

$$\pi_2 = \frac{P_A R_A T_A}{G_A^{\frac{1}{2}} \mu_A^{\frac{1}{2}}} \quad (4b)$$

$$\pi_3 = \frac{W_A \mu_A^{\frac{1}{2}}}{G_A^{\frac{1}{2}}} \quad (4c)$$

$$\pi_4 = \frac{a^{\circ} \mu_A^{\frac{1}{2}}}{G_A^{\frac{1}{2}}} \quad (4d) \quad \pi_5 = \frac{u_m \mu_A^{\frac{1}{2}}}{G_A^{\frac{1}{2}}} \quad (4e)$$

$$\pi_6 = \frac{\rho_A t}{\mu_A} \quad (4f) \quad \pi_7 = \frac{g_0 \mu_A^{3/2}}{\rho_A G_A^{\frac{1}{2}}} \quad (4g)$$

(5) 适用的无量纲组合数: 将上面求得的 7 个无量纲组合数, 重新组合, 以求出能够表达气波增压器物理过程和特性的适用的新的无量纲组合数。

$$\frac{\pi_3}{\pi_4} = \frac{W_A}{a^{\circ}} = \overline{W_A} = \pi_{(1)} \quad (5)$$

$$\frac{\pi_5}{\pi_4} = \frac{u_m}{a^{\circ}} = \overline{u_m} = \pi_{(2)} \quad (6)$$

$$\frac{\pi_2}{\pi_1^2 \pi_3} = \frac{R_A T_A G_A}{\rho_A W_A D_m^2} = \frac{G_A}{\rho_A W_A D_m^2} = \overline{G_A} = \pi_{(3)} \quad (7)$$

$$\frac{\pi_4 \pi_6}{\pi_1} = \frac{a^{\circ} t}{D_m} \quad (8a)$$

$$\frac{\pi_1 \pi_3}{\pi_2 \pi_7} = \frac{\rho_A W_A D_m}{g_0 \mu_A R_A T_A} = \frac{\rho_A W_A D_m}{g_0 \mu_A} \quad (8f)$$

$$\frac{\pi_2 \pi_7}{\pi_4^2} = \frac{g_0 R_A T_A}{(a^{\circ})^2} \quad (8c)$$

在上面求得的新的无量纲组合数中,  $\pi_{(1)}$ 、 $\pi_{(2)}$ 和 $\pi_{(3)}$ 意义明显, 可以在模拟过程中直接使用。其余 3 个无量纲组合数, 还须根据模拟理论进一步演变, 才便于使用。下面我们就来进行这种推演。

#### (四) 模拟问题

设在实验室内已获得一个性能满意的样机或模型, 现在要把它的尺寸改变一下, 以改变一下它的流量, 或者改变一下它的气动参数以适应生产上的不同需要, 而改变后仍能具有良好的性能。这样就出现了“模拟问题”。基于模拟理论, 新设计的产品(其参数用下标“s”表达之)与样机(其参数用下标“m”表达之)间应遵从以下一些相似准则:

##### (1) 几何相似

$$\left(\frac{D_m}{L}\right)_s = \left(\frac{D_m}{L}\right)_m \quad (9a)$$

$$\left(\frac{h}{D_m}\right)_s = \left(\frac{h}{D_m}\right)_m \quad (9b)$$

$$\left(\frac{S_m}{L}\right)_s = \left(\frac{S_m}{L}\right)_m \quad (9c)$$

(2) 空气增压比和扫气比相等

$$\left(\frac{P_E}{P_s}\right)_s = \left(\frac{P_E}{P_s}\right)_m \quad (10a)$$

$$\left(\frac{P_E}{P_A}\right)_s = \left(\frac{P_E}{P_A}\right)_m \quad (10b)$$

$$(P_A/P_s)_s = (P_A/P_s)_m \quad (10c)$$

(3) 温度比相等

$$\left(\frac{T_A}{T_s}\right)_s = \left(\frac{T_A}{T_s}\right)_m \quad (11a)$$

$$\left(\frac{T_E}{T_s}\right)_s = \left(\frac{T_E}{T_s}\right)_m \quad (11b)$$

在模拟过程中,为了使新产品和样机两者的过程相似以及两者的性能相等,除去要保持式(9)、(10)和(11)的无量纲比值相等之外,还要保持 $\pi_{(1)}$ 、 $\pi_{(2)}$ 、 $\pi_{(3)}$ 等值,在两种情况下也为常值。基于式(9a)和(9b),可把式(8a)和(8b)进一步演变为:

$$\frac{a^{\circ} t}{D_m} \cdot \frac{D_m}{L} = \frac{a^{\circ} t}{L} = \bar{t} = \pi_{(4)} \quad (12)$$

$$\frac{\rho_A W_A D_m}{g_0 \mu_A} \cdot \frac{h}{D_m} = \frac{\rho_A W_A h}{g_0 \mu_A} = (R_s)_A = \pi_{(5)} \quad (13)$$

气体的比热比 $\gamma$ 本身是个无量纲数,因之可用 $\gamma$ 和已有的无量纲数组成新的适用的无量纲数。用 $\gamma_A$ 乘式(8c)就得到:

$$\frac{g_0 \gamma_A R_A T_A}{(a^{\circ})^2} = \left(\frac{a_A}{a^{\circ}}\right)^2 = (\bar{a}_A)^2$$

或者, 
$$\pi_{(6)} = \bar{a}_A = \frac{a_A}{a^{\circ}} \quad (14)$$

这样就得到我们所需要的6个无量纲组合数: $\pi_{(1)}$ 、 $\pi_{(2)}$ 、 $\pi_{(3)}$ 、 $\pi_{(4)}$ 、 $\pi_{(5)}$ 和 $\pi_{(6)}$ 。根据量纲分析理论,这6个 $\pi$ 值是彼此独立的,可用以表达气波增压器的物理过程及其特性。

把这6个无量纲组合数写在一起,列如下表:

下表列出的6个无量纲数是基于“燃气”特性而确定的。同理,如果基于“空气”特性进行分析,分析结果也可得出类似的无量纲数。这些相类似的无量纲数将为:

$$\bar{W}_r = \frac{W_r}{a^{\circ}} \quad (15a)$$

$$\bar{G}_r = \frac{G_r}{\rho_r W_r D_m^2} = \frac{G_r R_r T_r}{P_r W_r D_m^2} \quad (15b)$$

名称	符号	表达式	另一种表达式
速度无量纲数	$\pi_{(1)} = \overline{w_A}$ 式 (5)	$w_A/a^\circ$	
转速无量纲数	$\pi_{(2)} = \overline{u_m}$ 式 (6)	$u_m/a^\circ$	$\frac{nD_m}{a^\circ}$
流量无量纲数	$\pi_{(3)} = \overline{G_A}$ 式 (7)	$\frac{R_A T_A G_A}{P_A W_A D_m^2}$	$\frac{G_A}{\rho_A W_A D_m^2}$
时间无量纲数	$\pi_{(4)} = \overline{t}$ 式 (12)	$\frac{a^\circ t}{L}$	
粘性力无量纲数 (雷诺数)	$\pi_{(5)} = (R_o)_A$ 式 (13)	$\frac{\rho_A w_A h}{g_o \mu_A}$	$\frac{\rho_A W_A D_m}{g_o \mu_A}$
声速无量纲数	$\pi_{(6)} = \overline{a_A}$ 式 (14)	$a_A/a^\circ$	

$$(R_o)_E = \frac{\rho_E W_E h}{g_o \mu_E} \quad (15c)$$

$$\overline{a_E} = \frac{a_E}{a^\circ} = \frac{(g_o \gamma_E R_E T_E)^{\frac{1}{2}}}{a^\circ} = \left( \frac{T_E}{T^\circ} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (15d)$$

在模拟过程中，一方面应能满足几何相似、压比相等、温度比相等的要求，一方面要求上述各无量纲数保持不变。根据这些比值保持不变的条件，可以推导出来以下一些比值在模拟过程中也将保持不变。

$$\frac{\rho_E}{\rho_A} = \left( \frac{P_E}{P_A} \right) \left( \frac{R_A}{R_E} \right) \left( \frac{T_A}{T_E} \right) = \text{常值} \quad (16)$$

$$\frac{G_E}{G_A} = \left( \frac{\overline{G_E}}{\overline{G_A}} \right) \left( \frac{\rho_E}{\rho_A} \right) \left( \frac{W_E}{W_A} \right) = \text{常值} \quad (17)$$

以及容积流量无量纲数，也将保持不变。

$$\overline{Q_E} = \frac{Q_E}{nD_m^3} = \frac{G_E}{\rho_E n D_m^3} = \text{常值} \quad (18)$$

$$\overline{Q_A} = \frac{Q_A}{nD_m^3} = \frac{G_A}{\rho_A n D_m^3} = \text{常数} \quad (19)$$

上面表列的6个无量纲组合数中， $\pi_{(4)}$ 的 $\left( \frac{a^\circ t}{L} \right)$ 以及转子轴向长度无量纲数 $(X/L)$ 是气波增压器图解法中的两个坐标量<sup>(2)</sup>，也就是说可以认为它们是表达“气波过程”的基本的特征量。 $\pi_{(6)}$ 是气体雷诺数。现在来看一下它的数值大小。对于一个典型的气波增压器中的空气流动而言有：

$$(R.)_s = \frac{\rho \cdot W \cdot h}{g \cdot \mu}$$

取  $\rho = 1.2$  公斤/米<sup>3</sup>,  $W = 50$  米/秒,

$h = 0.04$  米,  $\mu = 0.21 \times 10^{-5}$  公斤-米/秒<sup>2</sup>

$$\therefore (R.)_s = \frac{(1.2)(50)(.04)}{(9.81)(0.21 \times 10^{-5})} = 1.17 \times 10^6$$

得出的  $(R.)_s$  值在一般管道流动的临界值以上, 故在模拟过程中, 暂可忽略之。

### (五) 应 用

设在实验室内已得出一性能良好的模型气波增压器(即样机)。其几何尺寸为  $(D_m)_m$  及  $L_m$ 、燃气进口温度为  $(T_A)_m$ 、压缩空气重量流量为  $(G_E)_m$ 、空气增压比为  $(\pi_E)_m$ 、转子转速为  $n_m$ 。现在要设计一个新的气波增压器, 要求  $T_A$ 、 $\pi_E$  以及  $P_s$ 、 $T^{\circ}$  (即  $a^{\circ}$ ) 等值保持不变。但是压缩空气重量流量有所改变。试求新机器的几何尺寸以及相应的转速。

几何尺寸

从式 (155) 有,

$$\left( \frac{G_E R_E T_E}{P_E W_E D_m^2} \right)_s = \left( \frac{G_E R_E T_E}{P_E W_E D_m^2} \right)_m$$

由于  $R_E$ 、 $T_E$ 、 $P_E$  以及  $W_E$  等值在两个机器中保持不变, 则在利用式 (9) 之后, 就从上式得到

$$\frac{(D_m)_s^2}{(D_m)_m^2} = \frac{L_s^2}{L_m^2} = \frac{(G_E)_s}{(G_E)_m} = \beta$$

故有转子直径比:

$$\frac{(D_m)_s}{(D_m)_m} = \frac{L_s}{L_m} = \sqrt{\frac{(G_E)_s}{(G_E)_m}} = \sqrt{\beta} \quad (20)$$

以及槽道高度比:

$$\frac{h_s}{h_m} = \frac{L_s}{L_m} = \sqrt{\beta} \quad (21)$$

转速

根据式 (16) 有

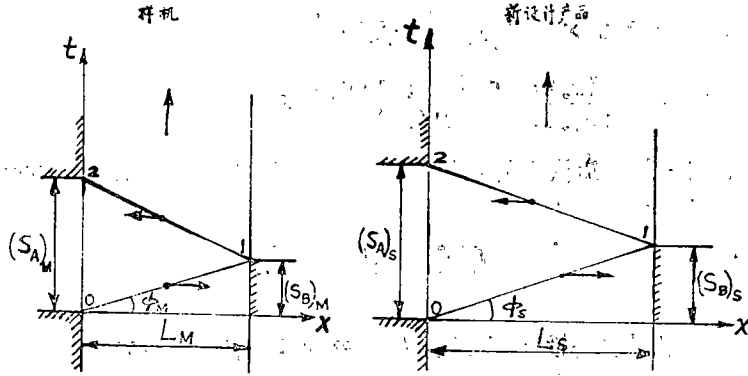
$$\left( \frac{n D_m}{a^{\circ}} \right)_s = \left( \frac{n D_m}{a^{\circ}} \right)_m = \left( \frac{n D_m}{a^{\circ}} \right)_m$$

由于  $a^{\circ}$  (即  $T^{\circ}$ ) 保持不变, 故从上式得出

$$\frac{n_s}{n_m} = \frac{(D_m)_m}{(D_m)_s} = \sqrt{\frac{(G_E)_m}{(G_E)_s}} = \sqrt{\frac{1}{\beta}} \quad (22)$$

验算

转子平均半径处展开平面 (L-t 平面) 的波系图如下,



在保持几何相似的要求下应有:

$$\left(\frac{S_B}{S_A}\right)_s = \left(\frac{S_B}{S_A}\right)_M \quad \left(\frac{\theta_B}{\theta_A}\right)_s = \left(\frac{\theta_B}{\theta_A}\right)_M$$

以及,  $\left(\frac{\theta_B}{180^\circ}\right)_s = \left(\frac{\theta_B}{180^\circ}\right)_M \quad \therefore (\theta_B)_s = (\theta_B)_M$

从而有:

$$\Phi_M = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{S_B}{L}\right)_M = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{\theta_B D_m}{2L}\right)_M$$

由于  $(\theta_B)_M = (\theta_B)_S$

$$\left(\frac{D_m}{L}\right)_M = \left(\frac{D_m}{L}\right)_S$$

故上式可改写为:

$$\Phi_M = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{\theta_B D_m}{2L}\right)_S = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{S_B}{L}\right)_S$$

得出:

$$\Phi_M = \Phi_S \quad (23)$$

式 (23) 说明自 0 点出发的 '01' 波在两个机器中都是正点的落在阀口 '1' 点上。

高压燃气进气阀口开启时间—— $t_A$

$$(t_A)_M = \left(\frac{30\theta_A}{\pi\Omega}\right)_M = \frac{30(\theta_A)_S}{\pi\Omega_S} \cdot \frac{(D_m)_M}{(D_m)_L} = \left(\frac{30\theta_A}{\pi\Omega}\right)_S \cdot \frac{L_M}{L_S}$$

$$\therefore \frac{(t_A)_M}{(t_A)_S} = \frac{L_M}{L_S} \quad (24)$$

根据  $\pi(\theta_A)$  保持为常值的要求将有:

$$\left(\frac{a^\circ \cdot t_A}{L}\right)_S = \left(\frac{a^\circ \cdot t_A}{L}\right)_M$$

由于  $(a^{\circ})_s = (a^{\circ})_m$ , 上式简化成与式 (24) 完全相同的结果:

$$\frac{(t_A)_m}{(t_A)_s} = \frac{L_m}{L_s}$$

上式说明在模拟过程中, 保持了流场相似的条件。

## (六) 结 论

(1) 基于量纲分析理论, 对于影响气波机械过程及其性能的物理量, 进行了量纲分析。得出了彼此独立的 6 个无量纲组合数  $\pi_{(1)}$ 、 $\pi_{(2)}$ 、 $\pi_{(3)}$ 、 $\pi_{(4)}$ 、 $\pi_{(5)}$  和  $\pi_{(6)}$ 。

(2) 在模拟过程中, 在满足几何相似、压比相等和温度比相等的同时, 再保持上述 6 个无量纲组合数相等, 就可解决气波增压器和其他气波机械的模拟问题。

### 符号说明:

a	声速
b	转子槽道宽度
$C_p$	比热比值
D	直径
$D_h$	水力直径
G	气体重量流量
g	地心加速度
h	转子槽道高度
L	转子长度
M	质量
n	转子转速
	无量纲组合数数目
P	气体压强
Q	气体容积流量
R	气体常数
Re	雷诺数
S	弧长: $S = \frac{\theta D}{2}$
T	气体绝对温度
t	时间
u	圆周速度
w	气体相对速度
x	转子轴向距离
$\alpha$	温度 (量纲基本量之一)
$\beta$	重量流量比值

$\theta$	角度
$\mu$	气体动力粘性系数
$\pi$	无量纲组合数
	压强比值
$\rho$	气体密度
$\tau$	时间 (量纲基本量之一)
$\Phi$	角度
$\omega$	角速度

上标:

- ( ) 无量纲数  
 ° 滞止值

下标:

$A$	高压进口燃气
$B$	低压排出燃气
$C$	压缩空气
$D$	低压进口空气
$M$	样机或模型
$R$	平均半径
$S$	新设计产品

### 参考文献

- [1] "On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations", Buckingham, E. Phys Rev., 1914年, V. 4, no. 345.
- [2] "气波机一维非定常定熵流动图解法", 中国科学院北京力学研究所一室气波组, 力学情报, 1973年第6期。

