超音速流面理论的一些问题

力学所　五室　黄瑞新

1976年2月

摘　要

本文从基本方程出发，导出两类流面上的主方程，讨论了方程的类型和解法，分析了过去流面主方程类型判据混乱的原因和结果，并对流线曲率法的适用范围进行了初步的探讨。

目　录

一、引　言

目前叶轮机械的工作范围已从亚音速发展到跨、超音速。本文将讨论超音速流面的几个问题，包括流面的主方程，流面流函数法和流线曲率法的适用范围。

二、关于激波问题

根据文献〔1〕，S_2流面正问题中是给定$\frac{W_\theta}{W_z}$的分布，主方程在

$W=\sqrt{W^2_r+W_\theta^2+W^2_z}<a$时是椭园型的。但在反问题中是给定$V_\theta r$的分布，主方程

在$W_c=\sqrt{W_r^2+W_z^2}<a$时是椭园型。目前跨音速压气机中W_c均小于a，而W往往大于a，于是产生了这样一个问题：同一个压气机，按正问题求解，主方程是双曲型，因而有等熵波或激波存在；若按反问题求解，则主方程是椭园型，不允许出现等熵波或激波。随着高压比、高叶尖马赫数压气机的发展，这个矛盾将越来越突出，迫切要求加以解决。

此外，对于S_1流面，文献[1]不区分成正、反问题，认为只要$\sqrt{W_u^2+W_z^2}<a$，主方程就是椭园型的。但是作为一般S_1流面的特例——迴转面流动，主方程在$\sqrt{W_r^2+W_u^2+W_z^2}<a$时是椭园型。显然这两个准则是矛盾的。下面我们就来分析它的原因。

三、超音速流面理论

利用S_1和S_2两类流面的交叉迭代来求解叶轮机械中的三维亚音速流动，过去已经有了不少成功的经验。但是，超音速流动有许多特殊的问题，如间断面的存在，小扰动只能在马赫锥内传播，初值型的边值问题等，因此求解的方法也要有所不同。

§3.1 相对园柱坐标系中的气动力学基本方程

假定观察者在一个相对于惯性坐标系以等角速度ω旋转的园柱坐标系中，则稳定、绝热、无粘性的完全气体的气动力学基本方程为：

i.连续性方程

$$\nabla\cdot\left(\rho\vec{W}\right)=0 \qquad (1)$$

或 $$\rho\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{\partial w_u}{r\partial\varphi}+\frac{\partial w_z}{\partial z}+\frac{w_r}{r}\right)+w_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+w_u\frac{\partial\rho}{r\partial\varphi}+w_z\frac{\partial\rho}{\partial z}=0 \qquad (2)$$

ii.动量方程

$$\left.\begin{aligned}
&w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}+w_u\frac{\partial w_r}{r\partial\varphi}+w_z\frac{\partial w_r}{\partial z}-\frac{w_u^2}{r}-\omega^2r-2\omega w_u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\
&w_r\frac{\partial w_u}{\partial r}+w_u\frac{\partial w_u}{r\partial\varphi}+w_z\frac{\partial w_u}{\partial z}+\frac{w_rw_u}{r}+2\omega w_r=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\varphi}\\
&w_r\frac{\partial w_z}{\partial r}+w_u\frac{\partial w_z}{r\partial\varphi}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

iii.能量方程

$$I=h+\frac{w^2}{2}-\frac{\omega^2r^2}{2}=\text{Const.} \qquad (4)$$

对于定比热气体，上式又可写作

$$\frac{\gamma RT_{转子}}{\gamma-1}=\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{1}{2}(w^2_r+w^2_u+w^2_z-\omega^2 r^2) \qquad (5)$$

其中音速的定义为

$$a^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{s=\mathrm{const.}} \qquad (6)$$

把（3）式分别乘以w_r、w_u、w_z后相加，再利用（2）式，可得

$$(a^2-w^2_r)\frac{\partial w_r}{\partial r}+(a^2-w^2_u)\frac{\partial w_u}{r\partial\varphi}+(a^2-w^2_z)\frac{\partial w_z}{\partial z}-$$

$$-w_r w_u\left(\frac{\partial w_u}{\partial r}+\frac{\partial w_r}{r\partial\varphi}\right)-w_r w_z\left(\frac{\partial w_z}{\partial r}+\frac{\partial w_r}{\partial z}\right)$$

$$-w_u w_z\left(\frac{\partial w_z}{r\partial\varphi}+\frac{\partial w_u}{\partial z}\right)+\frac{a^2 w_r}{r}+r\omega^2 w_r=0 \qquad (7)$$

iv.无旋方程

为简化计算，一般假定来流绝对旋度为0。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w_r}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial r}=0\\&\frac{1}{r}\frac{\partial(rw_u+r^2\omega)}{\partial r}-\frac{\partial w_r}{r\partial\varphi}=0\\&\frac{1}{r}\frac{\partial w_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial w_u}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

§3.2 S_1流面上的主方程

为了计算S_1流面上的参数，一般可以选择φ，z作为自变量，并且假定

$$\frac{w_r}{w_z}=k(r,\varphi,z) \qquad (9)$$

为已知。换而言之，即知道在S_2流面上流线的斜率。利用（9）式及无旋条件，可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w_r}{r\partial\varphi}=k\frac{\partial w_z}{r\partial\varphi}+w_z\frac{\partial k}{r\partial\varphi}\\&\frac{\partial w_r}{\partial z}=k\frac{\partial w_z}{\partial z}+w_z\frac{\partial k}{\partial z}\\&\frac{\partial w_r}{\partial r}=k^2\frac{\partial w_z}{\partial z}+kw_z\frac{\partial k}{\partial z}+w_z\frac{\partial k}{\partial r}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

利用（7）、（8）、（10）可得

$$(a^2-w_u^2)\frac{\partial w_u}{r\partial\varphi}-2w_u w_z(1+k^2)\frac{\partial w_u}{\partial z}+[a^2-(1+k^2)w^2_z](1+k^2)\frac{\partial w_z}{\partial z}+K=0 \qquad (12)$$

其中

$$K=(a^2-k^2w_z^2)\left(k\frac{\partial k}{\partial z}+\frac{\partial k}{\partial r}\right)w_z-kw_uw_z\left(2w_z\frac{\partial k}{r\partial\varphi}-\frac{w_u}{r}-2\omega\right)$$

$$-2kw_z^3\frac{\partial k}{\partial z}+\frac{a^2k}{r}w_z+r\omega^2kw_z$$

利用无旋条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial w_u}{\partial z}=0$$

可以引入势函数Φ，它满足

$$\Phi_z=w_z$$

$$\Phi_u=\frac{\partial\Phi}{r\partial\varphi}=w_u$$

于是得出S_1流面的主方程为

$$(a^2-w_u^2)\Phi_{uu}-2w_zw_u(1+k^2)\Phi_{uz}+[a^2-(1+k^2)w_z^2](1+k^2)\Phi_{zz}+K=0 \quad (12a)$$

§3.3 S_1流面的另一种形式

对于离心式或混流式叶轮机械，S_1流面宜用r、φ作为独立变量。此时应给定

$$\frac{w_z}{w_r}=e(r,\varphi,z)$$

于是利用上式及无旋条件可得

$$\frac{\partial w_z}{\partial r}=e\frac{\partial w_r}{\partial r}+w_r\frac{\partial e}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w_z}{r\partial\varphi}=e\frac{\partial w_r}{r\partial\varphi}+w_r\frac{\partial e}{r\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial z}=e^2\frac{\partial w_r}{\partial r}+ew_r\frac{\partial e}{\partial r}+w_r\frac{\partial e}{\partial z}$$

利用无旋条件

$$\frac{1}{r}\frac{\partial[r(w_u+\omega r)]}{\partial r}-\frac{\partial w_r}{r\partial\varphi}=0$$

可引入势函数Φ,满足

$$\Phi_r=V_r=w_r$$

$$\Phi_u=V_u=w_u+\omega r$$

则利用同样的步骤可得

$$(1+e^2)[a^2-(1+e^2)w_r^2]\Phi_{rr}-2w_rw_u(1+e^2)\Phi_{ur}+(a^2-w_u^2)\Phi_{uu}+E=0 \quad (13)$$

其中

$$E=(a^2-e^2w_r^2)\left(ew_r\frac{\partial e}{\partial r}+w_r\frac{\partial e}{\partial z}\right)-\frac{w_rw_u^2}{r}-2\omega w_rw_u$$

$$-2ew_r^3\frac{\partial e}{\partial r}-2ew_r^2w_u\frac{\partial e}{r\partial\varphi}+\frac{a^2w_r}{r}+r\omega^2w_r$$

§ 3.4 S_2流面的主方程

S_2流面上一般以r、z作自变量，此时应假定

$$\frac{w_u}{w_z}=g(r、\varphi、z)$$

为已知，按前述办法可得

$$\frac{\partial w_u}{\partial r}=g\ \frac{\partial w_z}{\partial r}+w_z\frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w_u}{r\partial\varphi}=g^2\frac{\partial w_z}{\partial z}+\ g w_z\frac{\partial g}{\partial z}+w_z\ \frac{\partial g}{r\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial w_u}{\partial z}=g\ \frac{\partial w_z}{\partial z}+w_z\frac{\partial g}{\partial z}$$

利用无旋条件

$$\frac{\partial w_r}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial r}=0$$

可引入势函数Φ，满足

$$\Phi_r=w_r$$

$$\Phi_z=w_z$$

于是S_2流面主方程为

$$(a^2-w^2_r)\Phi_{rr}-2w_rw_z(1+g^2)\Phi_{rz}+(1+g^2)[a^2-(1+g^2)w^2_z]\Phi_{zz}+G=0 \tag{14}$$

其中

$$G=(a^2-g^2w^2_z)\ \left(g w_z\frac{\partial g}{\partial z}+w_z\frac{\partial g}{r\partial\varphi}\right)-2w_rw^2_z\frac{\partial g}{\partial r}-2g w^3_z\frac{\partial g}{\partial z}$$
$$-\frac{g^2}{r}w_rw^2_z-2\omega g w_rw_z+\frac{a^2w_r}{r}+r\omega^2w_r$$

§ 3.5 流面主方程的特征线和相容性条件

由二阶偏微分方程的一般理论可知，上述三个流面的主方程在

$w=\sqrt{w^2_r+w^2_u+w^2_z}<a$时均为双曲型，且对应的特征线和相容性条件为：

1.S_1流面，以φ、z为自变量

$$\left(\frac{rd\varphi}{dz}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}}=\frac{w_uw_z\pm a\cdot\sqrt{w^2-a^2}\Big/\sqrt{1+k^2}}{a^2-(1+k^2)w^2_z} \tag{15}$$

$$\left(\frac{dw_u}{dw_z}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}}=\frac{w_uw_z(1+k^2)\pm a\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{w^2-a^2}}{a^2-w^2_u}$$
$$-\frac{K}{a^2-w^2_u}\left(\frac{rd\varphi}{dw_z}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}} \tag{16}$$

2.S_1流面，以r、φ为自变量

$$\left(\frac{rd\varphi}{dr}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}}=\frac{w_r w_u \pm a\cdot\sqrt{w^2-a^2}\Big/\sqrt{1+e^2}}{a^2-(1+e^2)w_r^2} \tag{17}$$

$$\left(\frac{dw_u}{dw_r}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}}=\frac{w_r w_u(1+e^2)\pm a\cdot\sqrt{1+e^2}\cdot\sqrt{w^2-a^2}}{a^2-w_u^2}$$

$$-\frac{E}{a^2-w_u^2}\left(\frac{rd\varphi}{dw_r}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}} \tag{18}$$

3.S_2流面，以r、z为自变量

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}}=\frac{w_r w_z \pm a\cdot\sqrt{w^2-a^2}\Big/\sqrt{1+g^2}}{a^2-(1+g^2)w_z^2} \tag{19}$$

$$\left(\frac{dw_r}{dw_z}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}}=\frac{w_r w_z(1+g^2)\pm a\cdot\sqrt{1+g^2}\cdot\sqrt{w^2-a^2}}{a^2-w_r^2}$$

$$-\frac{G}{a^2-w_r^2}\left(\frac{dr}{dw_z}\right)_{\mathrm{I}、\mathrm{II}} \tag{20}$$

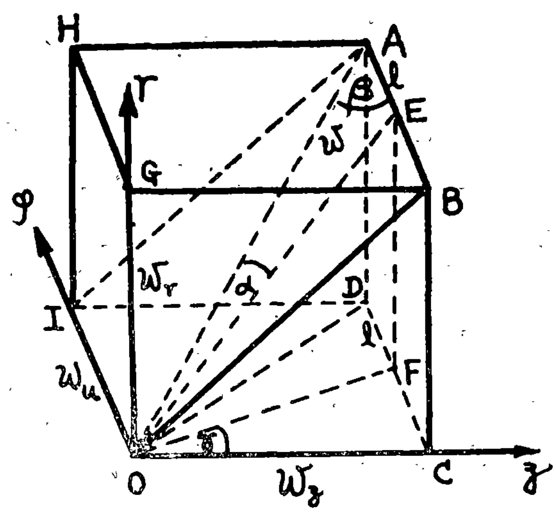

图 1

特征线的物理意义是：

在平面流动中，数学上的特征线代表着物理上的马赫波，即流场中小扰动的传播线。

在三维流动中，数学上的特征基元是特征锥，它同样是反映了流场中的小扰动以马赫锥的形式向下游方向传播。

下面我们要证明，上述流面主方程的特征线正是马赫锥在坐标平面上的投影线。

上图表示三维空间中的超音速流动。

$\overline{OA}=w=\sqrt{w_r^2+w_u^2+w_z^2}$

$\overline{OC}=w_z$

$\overline{OI}=w_u$

$\overline{OG}=w_r$

由三维流动的理论可知，O点发出的马赫锥的半锥角为

$\alpha = \angle AOE = \sin^{-1}\dfrac{a}{w}$

该马赫锥在OBAI平面上表现为两条截线，其中一条OE等价于平面流动中的右行特征线。今求OE线在（φ、z）平面上的投影线OF的斜率：

$$tg\gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{OC}} = \frac{w_\varphi - \overline{FD}}{w_z} \qquad (21)$$

记 $\angle EAO = \beta$

则 $\overline{FD} = \overline{EA} = w \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

由图中的几何关系可知

$$\sin\alpha = \frac{a}{w}$$

$$\cos\beta = \frac{w_\varphi}{w}$$

故 $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{w^2 - a^2}}{w}$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{w_r^2 + w_z^2}}{w} = \frac{w_z \cdot \sqrt{1+k^2}}{w}$$

把上述关系式代入（21）中可得：

$$tg\gamma = \frac{w_\varphi w_z - a \cdot \sqrt{w^2 - a^2} \Big/ \sqrt{1+k^2}}{a^2 - (1+k^2) w_z^2}$$

上式正好对应于（15）式中右行特征线的斜率，对于其它特征线亦可作出类似的推论。由此可见上述流面主方程和物理现象是一致的。

§3.6 流面主方程的解法

在亚音速时，主方程是椭园型的，可以用有限元法或有限差分法求解。利用这种型式的主方程可以避免计算 $\vec{F}$ 力的麻烦，直接一次得到平均 S_2 流面的解。

在超音速时，可以用特征线法求解主方程，从平均 S_2 流面的计算出发，利用 S_1 和 S_2 流面的交叉计算确定整个流场，例如文献〔2〕。

目前存在二个主要问题，首先是跨音速压气机中，S_2 流面上相对来流一部份是超音速，另一部份是亚音速。即使在无激波的等熵流动时，它也是一个混合型方程，目前尚未有十分成熟的统一解法。一个办法是先假定一条划分超音速区和亚音速区的曲线，在两个区中分别进行计算，检验这一条假定的界线是否符合，修改，迭代至收敛。另一个办法是把超音速区的流场用复特征线开拓到亚音速区，此法主要用于解反问题，可参见文献〔7〕。

另一个问题是激波的处理。由于叶片通道形状复杂，激波位置很难预测，给计算带来很大困难。对于带激波的跨音速流动，目前时间相关法和跨音速松弛法等方法正在迅速发展中。

附带指出，上述流面主方程是基于无旋假定。当激波不太强时，波后仍可用上述方程来计算，而不致引入过大的误差。否则应当采用有旋流动的相应方程，以考虑熵梯度的影响。

四、关于流面反问题

从上述分析可知S_1和S_2流面主方程在$w>a$时都是双曲型的，这和实际的物理现象也是符合的。但是为什么在S_2流面反问题中会出现激波疑难？根据文献〔1〕S_2流面反问题的主方程为

$$\left(1-\frac{w_r^2}{a^2}\right)\frac{\delta^2\psi}{\delta r^2}-2\frac{w_r w_z}{a^2}\frac{\delta^2\psi}{\delta r\delta z}+\left(1-\frac{w_z^2}{a^2}\right)\frac{\delta^2\psi}{\delta z^2}$$

$$+N\frac{\delta\psi}{\delta r}+M\frac{\delta\psi}{\delta z}=0 \qquad (22)$$

其中：
$$M=-\frac{\delta \ln B}{\delta z}+\frac{\delta S^*}{\delta z}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\delta I}{\delta z}-w_u\frac{\delta w_u}{\delta z}\right)$$

$$N=-\frac{1}{r}-\frac{\delta \ln B}{\delta r}+\frac{\delta S^*}{\delta r}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\delta I}{\delta r}-w_u\frac{\delta w_u}{\delta r}+\omega^2 r\right)$$
$$+\frac{a^2-(w_r^2+w_z^2)}{a^2 w_z^2}\left[-\frac{\delta I}{\delta r}+T\frac{\delta s}{\delta r}+F_r+\frac{w_u}{r}\frac{\delta(V_u r)}{\delta r}\right]$$

$$F_r=-\frac{Nr}{N_u\cdot r}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}$$

表面上看来，在反问题中是给定（$V_u r$）的分布，来反求流面形状，未尝不可。但仔细一分析，方程（22）的系数中有$\frac{\delta \ln B}{\delta z}$，$\frac{\delta \ln B}{\delta r}$，$F_r$等项，这些项不能由（$V_u r$）的分布直接求出，而是通过反复的迭代来确定。即第一次先略去F_r，并假定一个$\ln B$的分布，求解出一个近似的S_2流面解，然后利用它算出$\ln B$和Fr的分布，再代入（22）式中算出下一个迭代循环（事实上，目前的不少设计还只停留在第一步的水平上，即尚未计入Fr项。）

由此可见$\frac{\partial \ln B}{\partial z}$，$\frac{\partial \ln B}{\partial r}$，$Fr$诸项实质上是隐含着二阶导数$\frac{\delta^2\psi}{\delta r^2}$，$\frac{\delta^2\psi}{\delta z^2}$的，故简单地套用准线性二阶偏微分方程的类型判别准则是不合理的。

这种迭代求解的办法使我们联想到平面亚音速流动时的源函数法，即把原来的非线性方程

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\Phi_{xx}-\frac{2uv}{a^2}\Phi_{xy}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\Phi_{yy}=0$$

写成源函数的形式

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=S(x、y、u、v)$$

其中$S=\frac{1}{a^2}(u^2\Phi_{xx}+2uv\Phi_{xy}+v^2\Phi_{yy})$

利用下述迭代格式

$$\Phi^{(n+1)}{}_{xx}+\Phi^{(n+1)}{}_{yy}=S(x、y、u^{(n)}、v^{(n)}),$$

在亚音速范围内可以求出流场的真解。或者更一般地说，对于椭园型方程，我们可以比较自由地把某些项移到方程右边，采用迭代法求解，而且在大多数场合，迭代解都收敛于真解，只是收敛速度快慢有所不同。

但是在跨、超音速情况下套用源函数法就可能出现迭代解发散，或者虽然表面上收敛，但实际上并非收敛到真解。因为双曲型方程有比较顽强的个性，如特征线和信号法则，若把双曲型方程当作椭园型来处理，显然是不合理的。典型的例子是采用差分法解一维不定常问题时，若$\Delta t>c\Delta x$，则差分方程的解不收敛于真解。可见即使是双曲型方程本身直接离散化也要受到严格的约束，更不用说用一个椭园型方程来迭代解一个双曲型方程了。

另一方面，可以认为完全给定了w_θ的分布，流场中只有w_r、w_z两个自由变动量，也是造成方程表面上退化为椭园型的原因。

综上所述可知，在亚音速时反问题的提法是合理的，解是收敛于真解的。但在超音速时反问题的提法是不合理的，因为它要求假定$V_\theta r$的分布，而用一个椭园型方程的迭代解法来处理波动现象，因此解出的结果并不代表真实的流动。假如说过去在叶尖马赫数较低时，对于工程中的设计问题这样做可以得到一个近似解，那么现在叶尖马赫数已经较高的情况下，这样做就可能带来较大的误差。特别是叶尖区加功量大，压缩效应强烈，如果沿用这种解法就可能把沿叶高的气流参数拉平。实践是检验理论的唯一准则。数学模型不符合所描述的物理现象，我们就要加以改造或抛弃。至于设计问题，建议今后用正问题的解法来逐次迫近。

值得注意的是，目前S_2流面正问题的一种解法就是用反问题的迭代来求解正问题，这同样是不合理的。

对于S_1流面，文献[1]的主方程实际上是采用了反问题的形式，在主方程的系数中M、N均含有$\frac{\delta w_r}{\delta z}$，$\frac{\delta w_r}{\delta \varphi}$，$\frac{\delta \ln b}{\delta z}$，$f_n$等项。因此求解时要求已知流面的几何参数，并已知$w_r$的分布，可见无论解$S_1$流面的正反问题，这种假定同样是不合理的。在亚音速情况下作为一种迭代的手法是许可的，在超音速情况下就会出现前述的错误。因为方程的类型判别对于流动的堵塞现象十分重要，而现代压气机中锥角较大，如忽略w_r对于堵塞的影响则将造成较大的偏差。对于径流式叶轮机械的S_1流面主方程，同样

应注意用全速度作超音速的判据。

五、流线曲率法

先以平面不可压流动为例，简要地分析流线曲率法的实质。由动量方程可得

$$\frac{\partial V}{\partial n}=-\frac{V}{R}$$

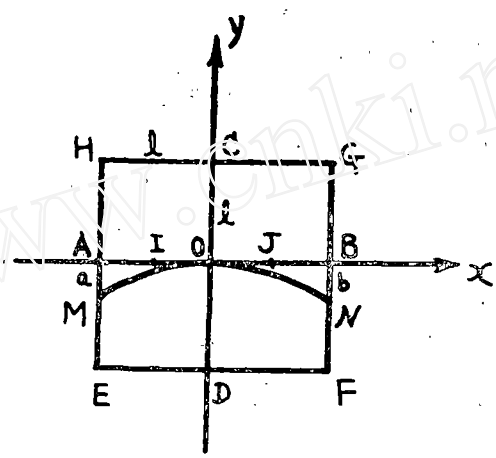

图 2

设在右图的xoy直角坐标系中x轴的正向与o点处流速方向重合，把流场按等步长L划分为正方网格，则

$$a=\overline{AM}\doteq\frac{\psi(A)-\psi(o)}{\psi_y(A)}\doteq-\frac{\psi_x(I)}{\psi_y(A)}\cdot L$$

$$b\doteq\frac{\psi_x(J)}{\psi_y(B)}\cdot L$$

通过M、O、N三点的流线方程为

$$y=\frac{x(x-L)}{2L^2}a+\frac{x(x+L)}{2L^2}b$$

$$\therefore y''=\frac{a+b}{L^2}$$

故流线的曲率为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\doteq 1/y''=\frac{L^2}{a+b}$$

(流线上其它点对R的贡献只是高阶项)

$$V_x=\psi_y$$

$$\psi_y(B)=\psi_y(A)+\text{高阶项}$$

$$\therefore -\frac{V_s}{R} = -\frac{a+b}{L^2}\psi_y \doteq -\frac{\psi_s(J)-\psi_s(I)}{\psi_y}\cdot\frac{\psi_y}{L} \doteq -\psi_{xx}$$

$$又\frac{\partial V_s}{\partial n} = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \psi_{yy}$$

故流线曲率法等价于

$$\psi_{yy} = -\psi_{xx}$$

这正是不可压流动的流函数方程，对可压流动，只是形式上复杂化一点。由此可见流线曲率法等价于一阶精度的流函数差分格式。它的特点是直接采用一阶偏微分方程组，类似于“打靶法”的方法（参考文献〔3、4〕）来迭代求解。即实质上是把五点差分格式

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{4}(\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1})$$

改写成推进型的格式（注意此格式是不稳定的）

$$\psi_{i,j+1} = 4\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j-1}$$

然后在底线上假定ψ的偏导数后层层递推，通过修正的假定值使迭代收敛。

除了流线曲率法外，还有其他利用一阶偏微分方程组来直接迭代速度或压力的方法。但就其本质而言，是因为亚音速情况下，解是解析函数，在一段曲线上给定流动参数后，就可以用幂级数（如中心流线法）或方程的直接数值积分的办法开拓到整个流场，并通过反复迭代求解。但在超音速情况下，解不必是全空间的解析函数，流场中有弱间断或强间断。因此开拓时应慎重，特别是不能越出“决定区”。虽然文献〔5、6〕等作者认为只要采用向后差分格式，就可以把流线曲率法应用于超音速流场，但没有作严格的分析。用向后差分格式，在垂直于流速的方向上推算流场，是越出了“决定区”开拓流场，因而违反双曲型方程的特点。作者所举的例子是出口均匀的对称喷管，只是特殊情况，一般情况下还缺少例证。

一般来说，超音速时开拓流场用特征线法比较稳妥。目前在S_1流面和S_2流面（或完全径向平衡方程）的求解中经常采用流线曲率法或其它类似的方法来处理跨、超音速流动。实际上是没有充分注意双曲型方程的特点而套用椭园型方程的迭代法。因此形式上得到的解不一定代表真正的流动情况，而且往往可能把某些压缩效应较强的区域（如叶尖区或S_1流面的波系区）的参数通过流道内满足流量积分条件而拉平，从而掩盖了某些高负荷区的矛盾，阻碍设计计算水平的发展提高。

六、结　　语

从上述讨论可知流面主方程在总的相对速度为超音速时是双曲型的，应当采用双曲型方程特有的解法来处理。如简单地把亚音速情况下沿用的流面流函数法或流线曲率法套用于超音速情况就可能造成种种不合理的现象。当前最迫切的问题是寻求一种简便而又准确的求解叶轮机械三维混合流动的方法。

以上几点肤浅的看法很不成熟，更缺乏算例，只是抛砖引玉，如有错误请同志们指正。

参 考 文 献

1. Wu, Chung—Hua, A General Theory Of Three—Dimensional Flow in Sub—sonic and Supersonic Turbomachines of Axial—, Radial—, and Mixed—Flow Types, NACA TN 2604, 1952.
2. Simon, H., A Contribution to the Theoretical & Experimental Examination of the Flow Through Plane Supersonic Deceleration Cascades & Supersonic Compressor, Trans.of ASME, J.of Eng.for Power, 1973.
3. Roache, J., Computational Fluid Dynamics.
4. Robents, S.M.& Shipman, J.S., Two—point Boundary Value Problems: Shooting Methods.
5. Bindon, J.P.et al, Streamline Curvature Analysis of Compressible & High Mach Number Cascade Flows, J.Mech.Eng.Scien, 1971.
6. Stow, P., The Solution of Insentropic Transonic Flow, J.of Inst.Math. App.1972.
7. Bauer, F.et al, A Theory of Supercritical Wing Sections.