

数值流体动力学*

一、引言

对于种种特殊情形，流体动力学方程组已经有分析解或至少有似近解，这些结果对于了解应力作用下可变形介质的性态很有价值。但是大多数问题还难以用古典方法作有用的分析，而必须用其他方法求解。本文介绍用高速数字计算机求流体动力学方程组数值解的方法。

近年来计算机技术的高速发展，使得在许多领域内能够完成一些值得注意的研究，流体动力学就是其中的一个领域。现今已能详细研究下列这些流体流动：

1. 流星对宇宙飞船或月球表面撞击而产生的洞坑。
2. 水波冲在海滩上的破裂。
3. 柱状炸药的爆震，其邻近介质的变形，以及其他许多类似的复杂事物。

要完成这些研究，需要有两个条件。一是计算机本身的发展。二是把基本微分方程化成便于数值分析形式的数学方法的发展。本文集中谈后一方面。但是，简单地提一提目前使用的计算机的基本特性是有益的。

首先，计算机有一个虽然很大但却有限的存储器。最大的计算机的存储器通常有 100,000 个“字”左右的快速存储，并有几百万个字的慢速存储。每一个字可以容纳一个数（通常具有 8—14 位十进制有效数字以及它的符号和阶码），或者容纳一个表示算术运算或逻辑运算的编码。

其次，计算机能完成一系列存放在它的存储器内的指令。这些指令使计算机完成算术运算，向操作者提供经过挑选的计算结果，甚至在计算过程中根据预定的判别准则修改指令。

第三，计算机能够高速度地进行工作。虽然它只能做到人所能做的，但却可以做到比人快得多，把台式计算机要算一个世纪的计算缩短在一个小时内完成。它可以重复许许多多多次运算，以精确求解有几千个微小流体元的动力学问题，综合这些流体元的运动就得到问题的答案。

* F.H.哈洛和A.A.阿姆斯登于1971年向美国原子能委员会洛斯·阿拉莫斯科学实验室提出了LA-4700号报告《流体动力学》，本文是其中的第Ⅷ章，对有关非定常流体动力学的数值计算作了一个有参考价值的总结。为使译文便于阅读，把文中提到其他各章之处按上下文改写了。——译者

除上述这些特点外, 我们不必多管计算机的其他性质。我们来谈谈一个数值分析工作者想用快速电子设备解他的问题时, 他所面临的一些基本的但是议论纷纭的问题。特别是我们将考虑:

1. 在计算机中应怎样表示流体。
2. 方程组应如何逼近。
3. 可能出现的数值不稳定性。
4. 可以预期得到怎样的精确度。
5. 对于各类流体流动问题什么方法有效。

二、流体的表示法

考虑一个充满气体的圆柱。气体沿圆柱的轴线方向运动。如果在圆柱的表面上开一些窗子, 我们就可以从窗子里看见气体流过。假定沿轴线方向接连分布许多窗子, 令 δx 为相邻二窗子间的等距间隔, x_j 为第 j 个窗子到圆柱顶端的距离。于是质量方程可写成

$$\frac{\rho'_j - \rho_j}{\delta t} = \frac{(\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \quad (1)$$

其中 $(\rho u)_{j+\frac{1}{2}}$ 表示由第 j 个窗子到第 $j+1$ 个窗子之间的质量通量, 右上角的一撇表示 $t+\delta t$ 时刻的量。

这个“有限差分”方程指出, 在计算机中要用什么来表示流体。由于存储器只能存放有限个数, 我们就必须把准确描写连续流体所需要的流场变量的无限多个值, 用存储器容量所能允许的那么多个值来代替。方程(1)表明, 我们需要这有限多个窗子的每个窗子那里密度的大小, 以及每相邻两个窗子之间的通量。此外, 为了包括其余的方程, 还要把每个窗子那里的压力、单位内能以及方程中出现的其他一些流场变量的值都存放在存储器内。这种离散点表示法就象在报纸上复制一张照片一样, 黑白程度的连续变化由一组点子表示, 每个点子都表示它附近的平均黑白程度。不论对报纸上的图片或是对圆柱中的气体来说, 那些离散点子越密, 就越能更好地显示出所关心的细节。

从计算的观点看, 我们把窗子看成计算网格的格子。对于一维问题, 例如一个气体柱, 有限差分网格如图1。对于二维问题, 网格可如图2a, 是一个长方形网格。

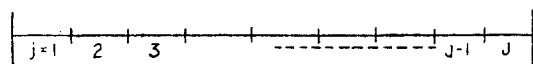


图1 一维网格

这个二维网格上表示出, 计算是怎样解决了水波破裂的横断面形状问题的。对于这种二维例子, 最好是采用一组标记点, 把它们的坐标都存放在存储器内, 用以标明流体在网格中的位置(图2b)。这将使我们能够看到哪些格子代表自由面即计算所必需的特殊边界条件, 也使有旋流体的内部扭曲形状成为清楚可见。下面给出一些计算结果, 作为应用标记点来显示流体几何形态变化的例子。

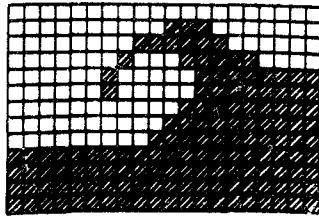


图 2a 用二维长方形网格表示的水波的破裂

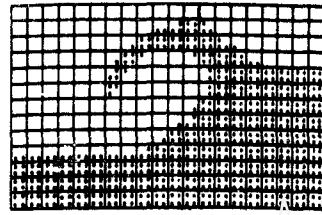


图 2b 加标记点后把流体几何形态表示得更精确

有时候流体是用运动着的网格表示的，每个格子随着一小块流体元运动，如图 3 所示。这种网格叫做拉格朗日网格。网格固定而流体在其中流动时（见图 2a 和 2b），则叫做欧拉网格。拉格朗日网格的优点是能够准确表示自由面的位置，同时在解决一种流体上浮着一薄层另一种流体时特别有用。但是当网格严重变形时，它就不准确了，图 3 的例子中当水波继续破裂而飞溅到流体的其他部分上时是特别不好计算的。欧拉网格则与之相反，变形可以任意大，对于一部分流体飞溅到另一部分上的这类极端情形也没有困难。欧拉网格的主要困难，在于准确解决自由面形状或分界面形状的问题，除非用一组标记点表示其弯曲结构的细节，自由面或分界面通常一定是阶梯形的，如图 2a 所示。

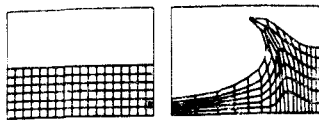


图 3 用拉格朗日网格表示晃动水箱中形成的波的初始及末了的几何形态

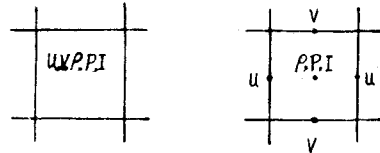


图 4 两种变量在格子中的位置

可见在数值计算中，表示一个已知的流体状态，要有一个离散网格，每个格子要包含密度、速度、压力、单位内能等量的局部平均值。此外，还可能要用标记点来标明流体的准确位置。根据网格内的数据，我们就可以用相邻格子中的量的适当平均值，来计算格子边上的通量。

除了用格子中心的平均值去求格子边上的通量一法而外，我们可以定义某些量就集中在格子边上。图 4 表示了这两种可能性。左边图上表示所有的量都在格子中心，所以边上的通量就要用平均值来求。这可以有几种方法，现以质量通量为例：

中心型：
$$(\rho u)_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_j + \rho_{j+1}}{2} \times \frac{u_j + u_{j+1}}{2} \quad (2)$$

交错型 (Zig-zag type)：

$$(\rho u)_{j+\frac{1}{2}} = \frac{(\rho_j u_{j+1} + \rho_{j+1} u_j)}{2} \quad (3)$$

迎风型¹⁾：

$$(\rho u)_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\rho_j(u_j+u_{j+1})}{2}, & \text{当 } u_j+u_{j+1} > 0 \text{ 时} \\ \frac{\rho_{j+1}(u_j+u_{j+1})}{2}, & \text{当 } u_j+u_{j+1} < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (4)$$

这些方法的一些性质在下面还要讨论。

图4右边图上的格子是常用的交错网格(Staggered-mesh)中心差,即水平速度分量在格子左右两条边上取中心差,垂直速度分量在格子上下两条边上取中心差。这种取法的优点在计算不可压缩流体的流动时特别明显。

还有几种用有限多个数来表示流体的方法,但是只有一种似乎和各种离散的网格和(或)质点的方法同样有前途。这就是截取级数(例如傅立叶级数)的部分和以表示流场变量。级数的系数存放在存储器内,存储的系数越多,所表示的流体的结构就越精确。

三、方程的逼近

由于只用有限多个格子点来表示流体,我们就不能准确地计算空间微商,而必须用有限差分去逼近。这点已在上节就质量方程作了说明。但是幸而对决定动力学起主导作用的不是微分方程而是力学的基本定律,即质量守恒定律、动量守恒定律与能量守恒定律。于是可以从这些定律出发,用网格来表示这些守恒定律,但只是不做推导微分方程那样的令 $\delta t, \delta x \rightarrow 0$ 而取极限这最后的一步。

甚至在以微分方程为出发点去导出有限差分近似时,还是要记住守恒定律,这对精确度来说是必不可少的。例如,我们讨论一维动量方程

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0 \quad (5)$$

的有限差分近似的推导。此微分方程的另一种形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

方程(5)是守恒形式的,这可以在两个固定点 x_1, x_2 之间把它积分来证明:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} (\rho u) dx + (\rho u^2 + p)_{x_2} - (\rho u^2 + p)_{x_1} = 0 \quad (7)$$

可见,在这区间内的总动量的时间变化率是由区间两端的动量通量的差给出的;这里的动量变化没有来自内部的动量贡献。这是和动量守恒定律符合的,所以方程(5)叫做守恒形式。

与此相反,方程(6)不是守恒形式的。这在有限差分方程中更明显:

$$\frac{(\rho u)'_j - (\rho u)_j}{\delta t} + \frac{1}{\delta x} [(\rho u^2 + p)_{j+\frac{1}{2}} - (\rho u^2 + p)_{j-\frac{1}{2}}] = 0 \quad (5')$$

1) 原文为“Donor-cell”。这也是指速度 u 取平均值,而 ρ 取上风处的值。——译者

$$\frac{u'_j - u_j}{\delta t} + \frac{u_j}{\delta x} [u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}] + \frac{1}{\rho_j \delta x} (p_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (6')$$

方程(5')把格子中的动量变化和边上的通量之差联系起来;方程(6')则把格子中的速度变化和不都是格子边上的量相联系。方程(5')可以对许多格子(例如由 $j=j_1$ 到 j_2)求和,得出

$$\frac{1}{\delta t} \left[\sum_{j=j_1}^{j_2} (\rho u)_j - \sum_{j=j_1}^{j_2} (\rho u)_j \right] + \frac{1}{\delta x} [(\rho u^2 + p)_{j_2+\frac{1}{2}} - (\rho u^2 + p)_{j_1-\frac{1}{2}}] = 0$$

在和式内部,通量项都一对对地消去了,因为在第 j 格右边的通量正好就是第 $j+1$ 格左边的通量。

对方程(6')相应地求和则不能一对对地消去,这有两个原因:首先,除非流动是绝热的(p 只是 ρ 的函数),压力项就不能是微分守恒的;一般说来,压力项在任何区间上使 u 实际不守恒。其次,即使流动是绝热的,有限差分通量的任何一部分都不能象微分方程中那样可以在数学上改写成守恒形式。因此,我们可以在微分情形下写

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial x}$$

再改写成

$$\frac{1}{2\partial x} [(u^2)_{j+\frac{1}{2}} - (u^2)_{j-\frac{1}{2}}]$$

而得到守恒形式,但对表达式

$$\frac{u_j}{\delta x} (u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})$$

来说,除非用 $\frac{(u_{j+\frac{1}{2}} + u_{j-\frac{1}{2}})}{2}$ 代替 u_j ,它不能变为守恒形式。实际上,在此式中,第 j 格右边的通量是 $u_j u_{j+\frac{1}{2}}$,而第 $j+1$ 格左边的通量则是 $u_{j+1} u_{j+\frac{1}{2}}$,因而总起来说,在每格的边上损失了一些量,但从微分形式来说(至少对于这一项)它是应该守恒的。

在任何情形中,如果要对任何数值流体动力学方法写出有限差分方程,应该十分重视质量、动量和能量的严格守恒。只有很少的情形中才可以因为其他方面需要的性质而牺牲守恒性,但由此可能产生的灾难性后果决不容许忽视。

有时有限差分方程的守恒性质,就这些方程在计算机上使用的形式来说并不明显,只能用代数方法证明,而这种证明可能是相当冗长和乏味的。有这样一个例子,曾提出一种新的差分方法,虽然表面上能量不守恒,但对精确计算熵的变化很有价值。可是在计算机上一算,却得出能量真是守恒的,最后还是对差分方程用仔细的代数方法证明了。

方程的逼近的另一个方面,已经在上面有限差分的质量和动量方程中提到了。这就是必须用有限的时间间隔从解的已知初始几何形态,去追踪以后各相继时间的解的演变情况。在每一步(即每一个时间循环)的开头,计算机存储器存有确定那一段时间的几何形态时所需的一切信息。这种信息可以是问题的初始数据,也可以是前一循环的计算结果。进行计算后,就得到时间间隔 δt 以后即这一循环末的几何形态。于是, n 个循环之后,问题中的时间就到了 $t=n\delta t$ 。这样继续计算,每一个循环都把描述每个格子中流体的动力学所需的全部运算重复一次。其结果很象电影片子,如果记录下每一循环末的

几何形态图, 编辑成电影片子, 放映出来, 只要 δt 充分小, 银幕上就会显示出一个光滑的随时间演变的过程。

四、数值不稳定性

流体动力学的一个有趣的问题是流体流动中可能出现的不稳定性。例如, 当水流绕过圆柱而流速逐渐增加时, 就会看到这时的流动和低速流动时发生的简单的定常层流有比较明显的不同。这时定常流变成不稳定的而尾流开始振荡。流速再增加, 振荡就变成一系列流入尾流的涡旋, 流速更高时, 尾流变成了湍流。这是真正的流体动力学不稳定性, 我们希望数值计算能如实地把它揭示清楚。

与此相反, 近似方程也可以由于数值不稳定性的为害, 使得本来可以是精确的结果模糊起来, 甚至使结果成为毫无意义。这种不稳定性只要可能就应当避免它, 或者至少要把它控制到最低限度。通常, 数值的不稳定性表现得如此之严重和显然荒谬, 不至于使人把所得结果和所要求的解相混。但是有一些情形, 研究人员会把数值不稳定性误认为是真正的湍流而从其计算得出错误的结论。

为了说明数值不稳定性怎样发生, 考虑一个简单例子。描写粘性对平行流动的影响的微分方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

其中 u 是垂直于 y 方向的速度, $\nu \equiv \mu/\rho$ 是动粘性系数。此微分方程是稳定的, 这点可以证明如下。考虑下列形式的解的性质:

$$u = u_0 + A(t) \cos ky$$

它表示一个均匀流速 u_0 和一个余弦扰动相迭加。如果扰动的振幅 $A(t)$ 随时间减小, 扰动消失, 结果就是完全稳定的。把此试探解代入动力学方程, 得出

$$\frac{dA}{dt} = -\nu k^2 A$$

于是有

$$A = A_0 e^{-\nu k^2 t}$$

由于动粘性系数总是正的, 这就证明了稳定性。

在差分形式, 我们可写

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \frac{\nu}{\delta y^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

其中 n 表示时间循环次数。对应的试探解是

$$u_j^n = u_0 + A^n R [e^{i k j \delta y}]$$

其中 $R[\]$ 表示 $[\]$ 中复数的实部。代入方程得

$$A^{n+1} = A^n \left[1 - \frac{2\nu \delta t}{\delta y^2} (1 - \cos k \delta y) \right]$$

于是扰动的振幅每经过一个时间循环都改变了一个常数因子, 此因子 ≤ 1 。如果此因子在 0 与 1 之间, 扰动就均匀地衰减而解是稳定的。若此因子在 -1 与 0 之间, 扰动就来回摆动地衰减而解也稳定。若此因子 < -1 , 扰动的振幅就不但来回摆动而且越来越

大, 这时解就不稳定了。所以数值稳定性条件是

$$\frac{2\nu\delta t}{\delta y^2}(1 - \cos k\delta y) < 2$$

实际上, 这是对每个循环的时间步长 δt 的一个限制。最严格的情形是扰动的波数碰巧正好使 $\cos k\delta y = -1$, 这对应于波长是两个格子的宽度。于是稳定的必要条件是

$$\frac{\nu\delta t}{\delta y^2} < \frac{1}{2}$$

这是一个重要结果。它在数值流体力学问题的许多情况中出现, 实际上也在介质有某种扩散或传导性质的其他许多类型的数值问题中出现。

这个例子说明了一种特别广泛出现的数值不稳定性, 而且证明了它怎样控制着每个循环的时间步长。下面的例子则指明另一种不稳定性同样广泛出现和同样重要。考查一个速度不变的流场中介质密度的对流方程, 微分方程是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

它的通解为

$$\rho = f(x - u_0 t), \quad f \text{ 是任意函数}$$

这是一个稳定的行波解, 它描写不改变波形的位移。

考查相应的最简单的空间中心差分方程(2):

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\delta t} + \frac{u_0}{\delta x} (\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) = 0$$

试探解是

$$\rho_j^n = \rho_0 + A^n e^{i k j \delta x}$$

代入方程的结果是

$$A^{n+1} = A^n \left(1 - \frac{i u_0 \delta t}{\delta x} \sin k \delta x \right)$$

此时, 增长因子是复数, 所以要考查它的绝对值

$$1 + \left(\frac{u_0 \delta t}{\delta x} \sin k \delta x \right)^2$$

它恒 > 1 , 所以差分方程是绝对不稳定的。因而除非作些修改, 它对计算是无用的。

一种修改是改成迎风型, 即

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\delta t} + \frac{u_0}{\delta x} (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) = 0 \quad \text{当 } u_0 > 0 \text{ 时}$$

或

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\delta t} + \frac{u_0}{\delta x} (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) = 0 \quad \text{当 } u_0 < 0 \text{ 时}$$

看 $u_0 > 0$ 的情形。用试探解代入, 得

$$A^{n+1} = A^n \left[1 - \frac{u_0 \delta t}{\delta x} (1 - e^{-i k \delta x}) \right]$$

增长因子还是复数, 其绝对值是

$$1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2(1 - \lambda)\lambda \cos k \delta x$$

其中 $\lambda \equiv u_0 \delta t / \delta x$. 当 $\lambda < 1$ 时, 增长因子的绝对值在 $\cos k \delta x = 1$ 时达到最大且正好是

1, 扰动不增也不减, 计算给出有用的结果。反之, 当 $\lambda > 1$ 时, 增长因子的绝对值在 $\cos k\delta x = -1$ 时达到最大, 此时其值为 $(2\lambda - 1)^2$ 。由于 $\lambda > 1$, 所以这因子大于 1, 扰动增大。所以迎风型差分的对流项是条件稳定的, 其稳定性条件就是著名的库朗 (Courant) 条件

$$\frac{u_0 \delta t}{\delta x} < 1$$

上面举了两个例子, 它们都指出形成流体动力学的计算方法时考虑数值稳定性的重要性。它们也指出选择流体流动过程的差分格式有很大的任意性。即使守恒定律和稳定性条件都满足了, 也还可以有许多不同的表达方法。它的选择要根据以下一些原则:

1. 在计算机上要容易求解。有些差分格式有很好的性质, 但是求解时遇到的代数上的困难是难以克服的。

2. 应用范围。一个特定的格式可以用于高速流动, 用于不可压缩流动, 或者用于其他若干特殊目的。

3. 精确度。下一节要讲精确度同选择差分格式有怎样的关系。

上面只是最简单地说明一下数值不稳定性这个课题。用数值方法从事流体动力学计算的研究人员应该非常细致地考察这个课题, 可集中在以下一些题目上:

1. 隐式格式, 它改进稳定性, 但几乎老是使代数求解变复杂。

2. 粘性项和对流项对整个流体动力学方程组的稳定性的联合影响。

3. 变系数 (或非线性项) 对一些类型数值不稳定性的重要影响。

最后这个项目的特殊重要性, 在于它把不可压缩流动问题的计算限制于雷诺数相当低的例子。

在这些课题中, 有一些已经在许多有关数值流体动力学的著作中讨论了, 另一些则还不清楚, 需要深入研究。

五、数值解的精确度

数值计算能够把真实的流体流动表达达到怎样的精确度? 为了回答这个问题, 要对许多因问题而异的多种因素进行全面的估量。一般说来, 下面这些因素和精确度直接有关:

1. 基本微分方程本身的根据怎样? 换言之, 描写流体流动过程的物理模型的真实性的如何? 要回答这个问题, 我们回顾一下方程的物理基础。理想流体微分方程假定了流体是连续的而且互不渗透。相对于平均流动的随机分子运动效应, 近似地用添加表示粘性、热传导及溶质扩散的诸项来描写。质量、动量、能量诸守恒定律是在大尺度意义下被满足的。在这些方面, 方程朝着描写物理实际的方向迈出了一大步。但是忽略准确的分子运动的细节, 有可能损害精确度, 特别是在研究稀薄气体时。所以用这些方程作为强非平衡过程 (例如激波结构) 的数值研究的基础, 即使数值近似不带来不精确性, 仍会为这些不确定性所困扰。有些研究人员也怀疑用连续流体诸方程表示湍流的细节的可靠性, 但这似乎并未引起重视。无论怎样, 不到计算机更大更快得多时, 这种不确定性问题还是不能解决的。

2.用差分网格计算流体的几何形态能达到多精细?粗糙的计算不可能作细节的研究,但是如果数值计算严格表示流体流动的基本守恒定律,则有时仍可得到有用的结果。一个有关的问题是时间步长的大小。 δt 的大小往往受稳定性条件的限制,即使不受这限制,每一循环的时间增量仍旧不能太大。经验表明,每一循环中每个格子里的任何量的值的变化,通常必须比格子里的量值要小。此外,流体每一循环顶多走一格的一部分。如果把每一循环末了的几何形态记录在胶片上,依次把它们象电影那样放映出来,就应该是光滑地变化而不应是一跳一跳的。

对许多有兴趣的问题,现有的计算机都对空间和时间加了严重的限制。例如,虽然已有许多有效的数值方法可用于完全的三维问题,但由于计算机还太小太慢,所以这方面的研究试做得不多。到现在为止,主要的研究还只是那些有一个或两个对称坐标的三维问题。这个限制阻碍了细致地研究湍流这个当前很感兴趣的课题。

3.有限差分近似有多精确?这问题的答案一般是用截断项的阶来说明。虽然这有时是说明精确度的一个有用的指标,但它也会使人发生误解。这些概念最好用一个例子的几个方面来说明。选取速度为正常数的质量对流微分方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

为例,我们曾考察过这方程的两种差分近似,即

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\delta t} + \frac{u_0}{2\delta x} (\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) = 0$$

及

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\delta t} + \frac{u_0}{\delta x} (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) = 0$$

前一种是绝对不稳定的,而后者当 $u_0 \delta t / \delta x < 1$ 时稳定。现在都把它们在空间一时间点 j, n 展成泰勒级数,得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \dots + u_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + \dots \right) = 0$$

和

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \dots + u_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\delta x^2}{6} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + \dots \right) = 0$$

其中略去的项是高阶项。两个差分方程都和原来的微分方程差一项 $O(\delta t)$,而前一个差分方程的空间误差项是 $O(\delta x^2)$,后一个的则是 $O(\delta x)$ 。这样我们也许会说用前者来代表微分方程比用后者要好些,因而要更精确些。其实,由稳定性分析知道,前者一点也不可能精确,因为它不稳定;后者却是条件稳定,所以在一定条件下,能用来进行计算并至少具有一定的精确度。假定两个差分格式都稳定,则哪个的余项的阶高哪个就可能更精确,然而甚至这点也不是一般都成立的。

可见,仅仅考查截断项的阶并不能揭示数值近似的全部性质。然而从方程的展开式可以推断一些很有价值的东西。它们允许从多少有点不同的方面来分析不稳定性这个课题,这样既可看出此现象的前因后果,也允许研究非线性不稳定性。现在用上面的例子来说明希尔特(Hirt)方法。把含 δt 的项改写成

$$\begin{aligned} \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} &= \frac{\delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{\delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \dots \right) \\ &= -\frac{u_0 \delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dots = +\frac{u_0^2 \delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dots \end{aligned}$$

于是只写出最低阶的项，上面的两个差分方程可分别写成：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{u_0^2 \delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dots \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{u_0 \delta x}{2} \left(1 - \frac{u_0 \delta t}{\delta x} \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dots \end{aligned}$$

留下最低阶的项时，第一个方程的扩散系数是负的，所以它总是不稳定的。第二个方程当 $u_0 \delta t / \delta x < 1$ 时扩散系数是正的，所以当这条件满足时此方程是稳定的。

这个和线性稳定性分析一致的结果，证明了一个重要的看法，即一个差分方程的不稳定性往往直接和负的扩散系数有关。而且还能看出可以怎样添加一个正的扩散效应，例如添加粘性项，来对采用这种截断展开式时可以预料到的不稳定性作一点补救工作。此外，它还使我们能对变系数方程作稳定性分析：若上例中 u_0 是 x 的函数，则类似的展开式会指出，在扩散项的系数中将出现与 $du_0(x)/dx$ 成比例的项，从而得到用线性分析的方法所不能发现的稳定性条件。

展开有限差分方程以估计精确度，有关这种手段的用处的意见众说纷纭。有许多证据表明，截断项为 0 的阶较高，并不见得会增加精确度。另一方面，很明显，0 阶截断项是不行的，因为它们甚至不让 $\delta t, \delta x \rightarrow 0$ 时的极限方程趋于微分表达式。同时，有时候用于计算的形如 $O(1/\delta t)$ 的截断项也是麻烦的。为了看看这种截断项是怎样出现的，考虑匀速度质量对流方程的下列差分格式：

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\rho_j^n + \rho_{j-1}^n)}{\delta t} + \frac{u_0}{2\delta x}(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) = 0$$

展开后得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\delta x^2}{2\delta t} \left(1 - \frac{u_0^2 \delta t^2}{\delta x^2} \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dots$$

为了得到稳定性，和以前一样要使 $u_0 \delta t / \delta x < 1$ ，但是当 $\delta t \rightarrow 0$ 时，扩散系数无限增大，因而其抹平细节的作用完全使所要的结果变成模糊不清了。可是应注意，把这结果和迎风型的结果相比较，当 $u_0 \delta t / \delta x$ 接近 1 时，二者的扩散系数差不多是一样的。这就是说，用稳定性所能允许的几乎是最大的 δt 来计算，结果可能是不错的。可是这种判别方法虽然对简单例子来说容易应用，但要用到一般情形就很困难，因而至少在流场的某些部分可能过多地抹去了细节。

4. 不稳定的差分方程能不能作有用的计算？和本文在这之前一直讲过的相反，也还有一些重要情形能用不稳定的差分方程来得到精确的结果。有两种情形值得一提。一种是缓慢增长的不稳定性，在这类不稳定性例子中，如果问题延续时间短，则可以得到有用的和精确的结果。第二种是各种有界的不稳定性，它们可以急剧地增长，但只是短暂的，且由于非线性影响，在它们变成非常大以前其振幅是有界的。

六、现代数值方法的能力

还没有任何一种方法可以通用于一切类型的流体流动。一切目前能用的方法都有这样或那样的限制。下面是有关的几类限制，以及相应于每类限制的各种有用的数值方法。本文后面的参考文献已对这里提到的许多方法作了充分的叙述。

1. 坐标的限制。坐标的限制有几种。已经提到过拉格朗日观点和欧拉观点，并讨论了它们的相对的优点。对于高速流动，这两种坐标都已广泛地应用。对于低速（不可压缩）流动，现有的计算方法差不多都用欧拉坐标，只有一种新的方法（即拉格朗日不可压缩方法，简称LINC方法）是用拉格朗日坐标的。其原因是，当格子的顶点随流体向任意的方向运动时，要完全保持每个格子的体积不变是困难的。相反，欧拉格子把体积守恒直接与速度值联系起来，而且不论用引进流函数的方法（流函数与涡量方法），或是用修正过程的办法（压力与速度方法），都能够保证严格的不可压缩性。在几种计算机程序中，有的是混合使用拉格朗日坐标和欧拉坐标（例如格子中质点的方法，简称PIC方法），有的则用结合两种观点的优点的其他类似的方案。在拉格朗日方法的计算中周期地重分网格，就引进了欧拉方法的性质；另一种方法则是在某些区域用欧拉方法，而在另一些区域用拉格朗日方法（欧拉方法与拉格朗日方法相结合的方法，简称CEL方法）。

有一种不同的限制只用于笛卡儿坐标。在许多情形中往往可以推广到对称于经度的柱坐标，但是现有的计算机程序没有多少能在使用坐标系方面具有较大的适应性。特殊目的的程序也曾利用诸如椭圆—双曲那样的坐标系，但其应用范围往往有限。目前已试着编制对任何正交坐标系都适用的程序，目的是要计算复杂形状刚体附近流体的流动。除非坐标线按物体的形状来取，这种流动都不容易计算得精确，因而在这方面简单的笛卡儿长方形网格就受到了限制。

2. 速度的限制。直到目前为止，所有的计算机程序都只局限于用在低速（不可压缩）流动，或者用在高速（声速或超声速）流动。这有几个理由。首先，对于高速流动，在每一点处发生的变化只是局部影响的结果，而低速流动的计算则必须每一循环都考虑超距影响。其次，对于高速流动，当流速减小时，数值稳定性的限制往往变得异常严格。第三，低速流动不需要状态方程，所以当流速增加时，体现不了可压缩性效应。最近发明一个同时能进行两种极端情况的密度计算的隐式处理法，它已被编成了所谓隐式连续流体的欧拉方法（简称ICE方法）。

3. 介质性质的限制。介质性质的限制包括具有不同严格程度的各种例子。计算机程序处理的最简单的流体流动，是把流体看作具有各向同性热力学应力的理想流体。有关这方面的一些推广是：

a. 具有简单标量系数的纯粘性效应，往往容易编入几乎一切类型的基本流体流动计算方法中。

b. 塑性流动往往能用直接推广粘性方法的办法去研究。

c. 弹性介质动力学一般只能用拉格朗日坐标计算，因为应力的确定要求局部变形的

详细信息，这用欧拉坐标计算是办不到的。

d. 对介质的各种非牛顿性态也可以算，但是对多维、瞬态流动的计算并不多。还要作许多发展工作才能试着去解一些更奇特的问题。

e. 有化学反应或核反应的介质的动力学已用拉格朗日与欧拉程序研究。例如，对爆震过程的详细了解已取得很大进展。一个有关的研究是有限松弛率过程介质的动力学问题，例如离解气体在低压下的流动，其中平均离解时间和问题的特征时间（经过反应区的时间）可相比拟。

4. 多种介质的限制。拉格朗日计算特别适于研究具有相互作用的多种不同介质区域的流动。可以用标记点、分界面线段、或通量限度（Flux limiter）把欧拉计算修改成适合于研究这类问题。所谓通量限度是说，除非按照相邻计算格子中同一格子的介质或混合格子的介质的性质使介质的通量达到适当的份量，介质的通量都不许穿过格子的边界。唯一一个在多介质区域情形中可能出现的较大困难，是对不可压缩流动用流函数与涡量作变量。对这个特殊情况来说，问题是如何正确地表示分界面的应力条件。

5. 维数的限制。虽然真实世界是三维的，却有许多种流体流动的几何形态是不依赖于一个或两个空间变量的。这些叫做一维或二维流动，对它们的数值研究比三个维度都有变化的情形具有很大的简化。虽然大多数数值方法已易于推广到三维情形，但妨碍这样做的主要因素，是今天的计算机本身的限制，就是它们还不够快，以致不能在经济合理的时间内处理要解决的动力学问题。但三维计算中还有另一种困难，即如何有效地显示其计算结果而为研究人员所能利用。这种计算中有大量的数据，需要更大的才能去把它们概括成紧凑而完整的形式。

6. 微观结构的限制。湍流，单个分子的涨落，这是两类难于求解的微观结构。但已有一些流体流动计算方法来处理这两类问题。对于湍流，已有一些输运方程方法可用于研究任意几何形态下暂态问题的雷诺应力分量及其效应。对于分子动力学，已有一些程序可用于追踪指定的一小团分子彼此间以及与容器壁相互作用时所经过的轨迹；对于这种情形，必须限制其应用范围于只占几个平均自由程大小的区域内，但是这对研究强非平衡输运过程以及研究连续流体在刚壁附近的输运系数时特别有用。

7. 局部力的限制。在大多数流体中，应力只作用于直接相邻的流体元之间。不可压缩流体好象有超距作用，这只是由于声音的速度相对说来较大所致，特别的数值方法可以十分精确地计及这一点。但是在某些类型问题中确实有超距作用，处理这种作用时必须进行的数值修正可能很复杂。流体元之间的引力就是最简单的一种超距作用，相对地说它是较易处理的。现在感兴趣但更为复杂的问题，是在等离子体这种特殊类型的流体中遇到的电磁力。作用于远处流体元上的这类力既有静应力又有动应力，而这些应力反过来又常常和外围仪器所给的外电磁场耦合。由于发展受控热核反应的刺激，近年来已有一些研究这种流动的数值方法，但是这些方法在使用上仍有限制，并且还有许多工作要做。

七、数值计算举例

本节讲几个例子，它们都利用了洛斯·阿拉莫斯科学实验室发展的几种数值解法。计

计算机产生的这些图片，是同它们在计算过程中被录下来的完全一样的，是用Stromberg-Carlson公司S-C4020微型胶卷记录机得到的。

这些例子使用了四种方法，两种适用于高速流动（FLIC 和 PIC），两种适用于低速流动（MAC和LINC）。这里对这些方法只作简单的描述，因为对这些方法和其他方法的详细描述，在本文的基本参考文献中都可以找到。

对于每一种基本方法，通常都有一些不同的计算机程序，而每种程序总是编制成适用于这种方法整个领域内的某一类特殊问题。这些方法的许多版本风行于我们这里以及全世界的其他计算装置上。

1. FLIC “格子中流体”方法（简称 FLIC 法）是计算多维空间中连续可压缩流的欧拉方法，特别适用于只有一种流体介质但流体变形大的问题。它能给出复杂流动问题的精确解，所用的机器时间相对来说是中等的。

在 FLIC 法中，每个格子中的密度、速度及单位内能的初值，或者由初始条件提供，或者由前一计算循环所得的结果提供。简要地讲，每个计算循环分两步：第 1 步，从状态方程算出压力，并注意压力梯度引起的加速度效应，根据压力求得速度和单位内能的中间值。第 2 步，计算输运效应：首先，用第 1 步中求得的速度确定时间步长 δt 内通过格子边界的质量流。其次，用质量守恒定律计算新的密度。第三，假定通过格子边界的质量所带去的动量和能量分别对应于第 1 步中的速度和单位内能值，算出动量和能量的输运。最后得出循环未了的速度和单位内能值。

图 5 是一个 FLIC 计算的例子，计算的是绕过半顶角为 30° 的锥体的一个无穷大强度平面激波。这里沿锥体表面使用了“半拉格子”。为了不致有体积小的

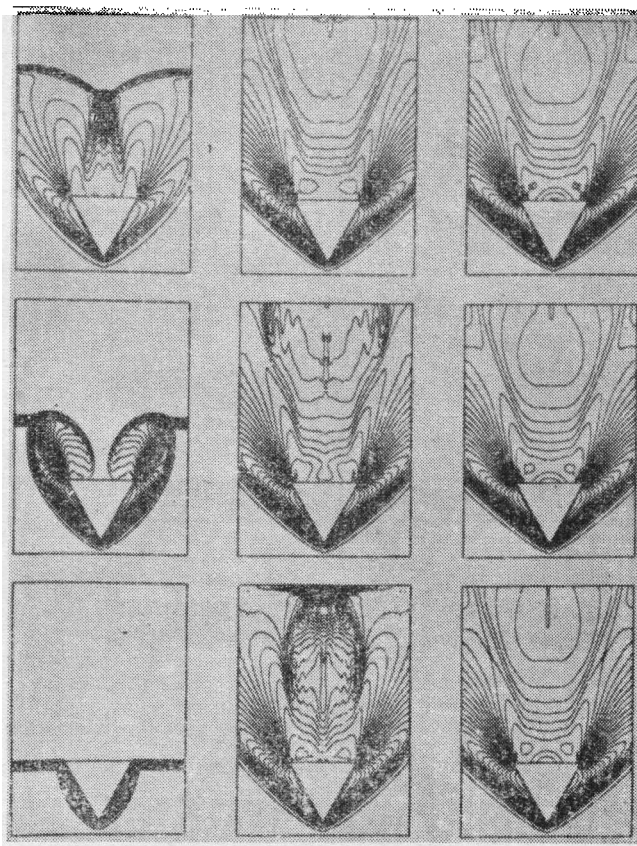


图 5 强度无限的平面激波绕过锥体，用 FLIC 方法计算

半拉格子，格子的边长比 $\frac{\delta z}{\delta r}$ 和

位于网格中的锥体应选得使锥面和格子的对角线重合。

图 5 中有 9 幅等压线的图，它们给出了数值解随时间演变的过程。相邻两图的时间间隔是平面激波向前移动一个物体长度所经历的时间。第一图，激波已在锥面上形成。

到第二图时，反射激波已径向膨胀到形成了一个与锥顶相接的弓形驻波，入射激波则已绕射到锥底面且向轴上收敛。到第三图时，绕射激波已收敛到轴上，形成一个高压区域而使第三激波从轴上发散。在这三个图形以后，流场仍继续缓慢地变化很长时间，直到最后一图时达到定常状态。

2. PIC “格子中质点”方法（简称PIC法）是另一种计算多维可压缩流的方法。和 FLIC 法一样，此法也用长方形网格，格子是固定的欧拉格子而流体在其中流过。但是 PIC 法表示的不是连续流体，而是几种不同的介质，每种介质都用一组离散的拉格朗日质点表示。每个质点带着该介质的一定量质量，并且标明它代表着哪种介质。每个格子的质量就是格子内各质点的质量的总和。照样，质量、动量和能量守恒诸微分方程支配着这种方法，虽然质量守恒由于质点的模型已自然而然地满足。它的计算循环和 FLIC 的在一些方面是一样的。同样，在第 1 步中计算速度和能量时丢掉输运项，而在第 2 步中，当每个质点带着其质量、动量和能量根据一个速度加权过程运动时，就纠正了第 1

步中对输运项的忽略。如果质点越过格子的边界，则其质量、动量和能量就从旧格子搬到新格子里。全部质点都输运完后，此循环的速度和单位内能的终值就由新的格子总质量、动量和能量算出。

PIC 的这种双重网格系统，要求的计算机存储量和计算时间比 FLIC 多，但是，即使有大的变形，PIC 法也可以同时追踪多种不同介质分界面的历史情况。

图 6 是 PIC 计算的例子，其中一球以约 5 毫米/微秒的速度撞击到有同一种物质的浅池内。在计算中，球和靶都用 $\gamma = \frac{5}{3}$ 的多方气体表出。在所给速度下，就连金属在碰撞时都要气化而且其性质很象气体。

注意最初并不溅起来。球和池内都产生激波，但在表面上发生的膨胀很小，因为侧激波的传播相当慢。当激波到达球的顶部时发生强膨胀，把介质猛烈地吹回球撞入的方向，使其速度和初始撞击速度很相近。

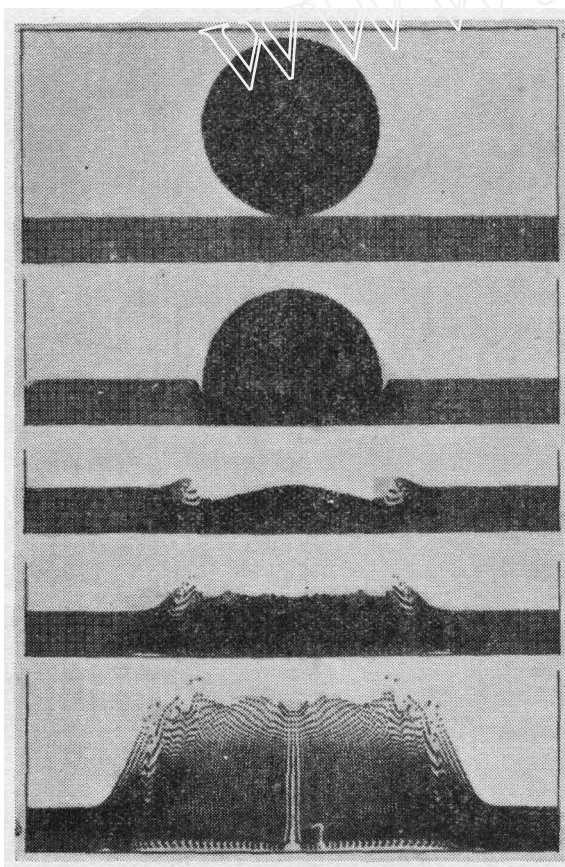


图 6 一个球向浅池超高速碰撞，用 PIC 方法计算

3. MAC 下面 9 个例子都是“标记点和格子”方法（简称 MAC 法）的计算结果。此法可用于粘性不可压缩（低速）流动问题。它以完全的纳维—斯托克斯方程的有限差

分近似为基础，以固定的欧拉网格作参考，用压力和速度分量为主要变量。这比用流函数和涡量作变量的方法有更大的适应性，特别是应用于应力为0的或预先给定了正应力的自由面边界条件时是如此。也使用了一组随流体一起运动的标记点。但和PIC的质点不一样，这些标记点不带有质量，它们参与计算只是因为要用它们标明哪些格子里有流体，特别是指明哪些格子在自由面上。

下面把流体几何形态从一个时间循环进到下一个时间循环的过程作一个简略的叙述。

1. 由前一循环或初始值提供整个速度场和标记点坐标。

2. 用和普阿松方程等价的有限差分方程求解新的压力场，使在本循环末尾的速度散度处处为0，也就是所得到的压力必须使新的速度继续满足不可压缩条件。求压力时用松弛法，或用其他合适的允许信号以在这种计算中出现的巨大声速通过流体传播的方法。

3. 用新的压力场和动量方程一起把改变了一个循环时间 δt 时的速度场求出。

4. 标记点按它附近速度分量的加权平均值运动。假如标记点穿过格子边界，则当运动使流体流入一个原来是空的格子或者使原来有流体的格子变空了时，就有必要调整速度。

图7是一滴水溅落到浅池中的MAC计算。当水滴半径 R 和池深 D 差不多时，溅落的性质随 R/D 迅速变化。本例中 $R=10$ ， $R/D=1$ ，水滴速度是1单位。重力被忽略。经过一段初始调整阶段以后，侧面溅出的薄片以均匀速度升高并增大半径。注意使碰撞区域变空的倾向是很明显的。计算结果和实验数据符合甚好，只是计算忽略掉了在溅起的薄片的边缘上将要形成的小水滴。这是由于在计算中忽略了表面张力以及由于把运动限于轴对称而略去了三维效应所致。

这个例子可以和图6的高速碰撞相比较而看出不可压缩流动和可压缩流动的一些深刻的区别。

图8是用MAC法算出的

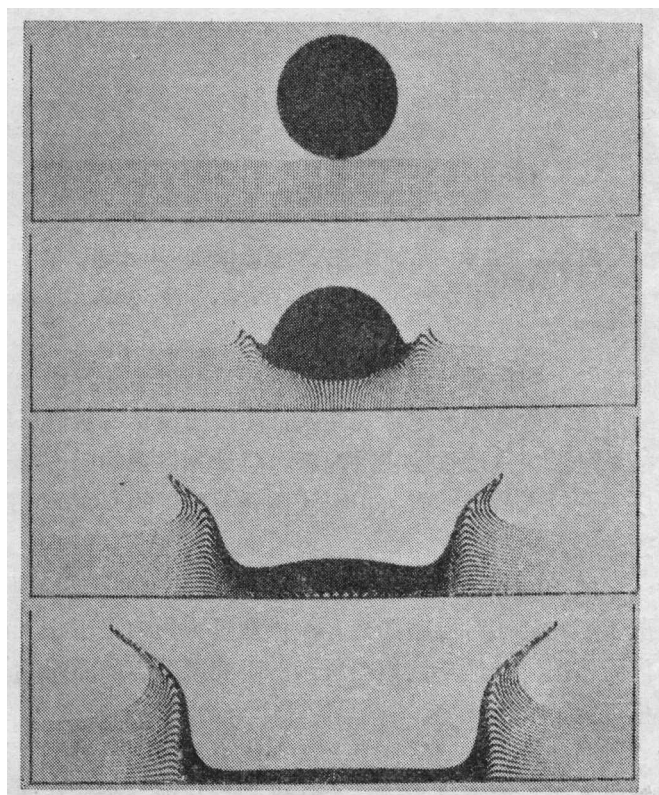


图7 半径为10.0的水滴溅落到浅池中，撞击速度1.0， $R/D=1.0$ ，用MAC方法计算。由上而下各图的时间是0，10，30，50

打开水闸后水的一个涌波流入静止水塘时水波向后破裂的过程。图的次序是由上而下再由左而右看。左上方是初始图形，闸门刚刚迅速打开，水还是静止的。作用于水库的力有重力和表面压力。本例的尺寸取得使水的密度为1单位，重力加速度为1单位向下。水库的初始深度为2.9单位，水库所受表面压力为2.5，动粘性系数为0.01。

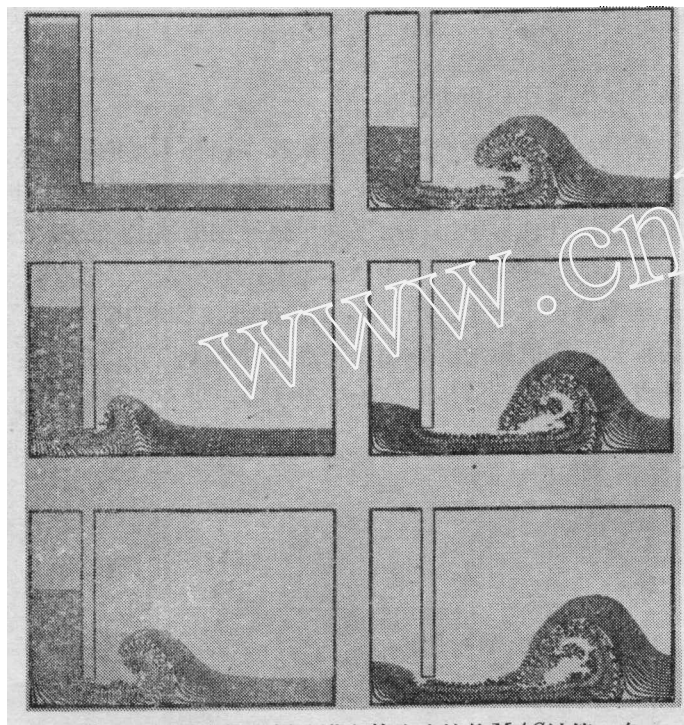


图8 打开水闸后涌波进入静止水塘的MAC计算。各图的时间分别为0, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 2.73

效应”，即慢慢倒出的粘性流体要象淌口水那样往后滴。在这个计算中，在顶部有事先给定的流体（和标记点）注入。注入的流体沿着倾斜的刚壁流动并遇到一个尖角。计算结果显示流体严重地往后偏斜。将计算得到的压力分布图加以研究，我们就能把这种效应完全解释清楚。有关用于流体开关装置的 Coanda 效应，也曾用类似的 MAC 计算研究过。

图10中的 MAC 计算，显示水流从破坏了的水坝流出后撞到下游的障碍物上的情况。坝在 $t=0$ 时已破坏光，流体在重力影响之下往下流，流体跟障碍物碰撞和溅过其顶部的情况，如最后两幅图所示。研究所算出的障碍物上压力的历史，就可以根据计算预报可能造成的损害。

图11是用 MAC 计算水波在倾斜海滩上的破裂。这种流动问题直到现在在理论上还解决不了。图形表示出一个波破裂后从前一个波往回流的水流的情况。第二个较小的破裂波形成着，由最后一幅图可看到它正在落向无水的海滩上。

图12是用 MAC 研究粗大的粘性流体瀑布。流体用泵压到右上方，在重力作用下落

计算这种波是典型的 MAC 方法。它要用1,600个欧拉格子，273个时间间隔（即循环）来使解从第1图演变为第6图。从下列事实可以对现代计算机的计算速度有一些体会：此计算要做80多亿个运算，但只用了几分钟机器时间。

这种计算表明，可以从计算得到的流动的各种情况，至少和实验能够测量到的一样精确。曾继续作了类似的计算直到水塘已经适应涌波而实际重新归于平静，只是这里没有把它们都画出来。依次和实验的侧影照片相比较，显示出其间显著的相象。

图9画出一个差不多人人都经验过的一种讨厌的现象。MAC 计算显示了所谓“茶壶

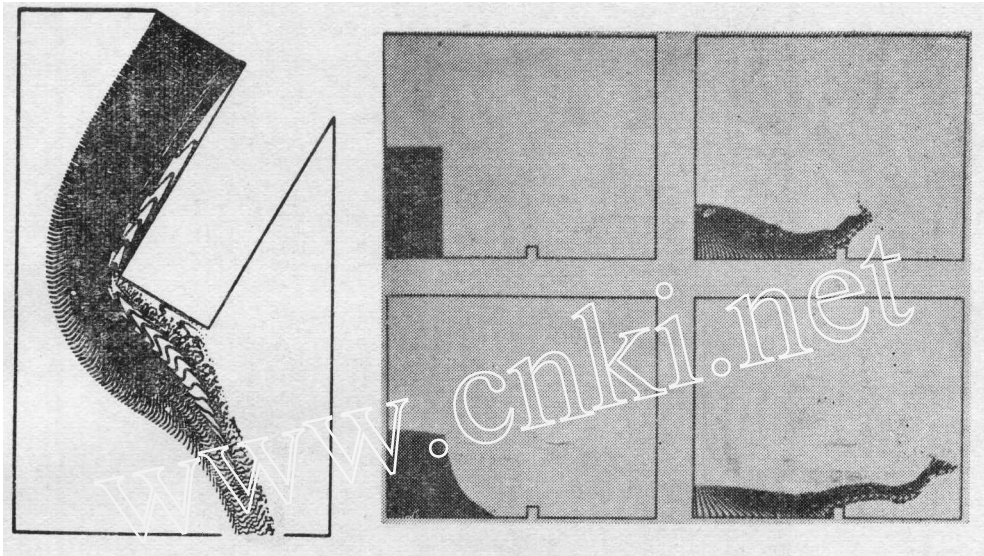


图 9 粘性流体缓慢倒出时向后
 淌的现象，用MAC方法计算

图 10 水坝倒塌后水流冲撞下游障碍物

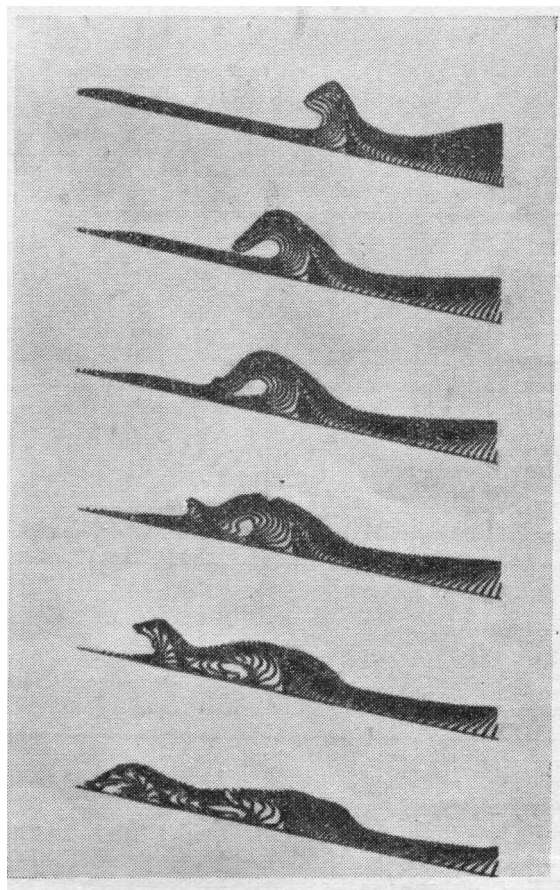


图 11 水波冲到倾斜海滩上破裂的MAC计算

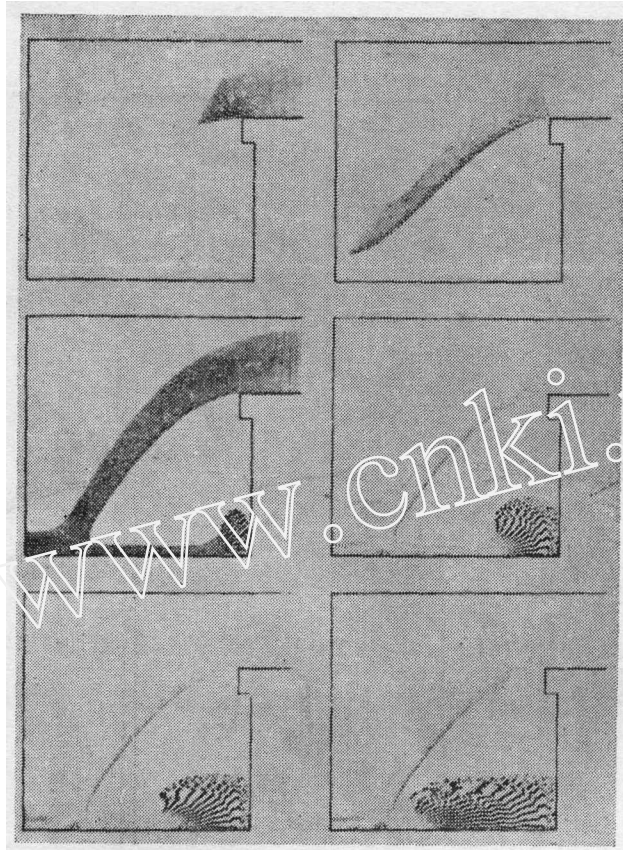


图 12 瀑布的 MAC 计算

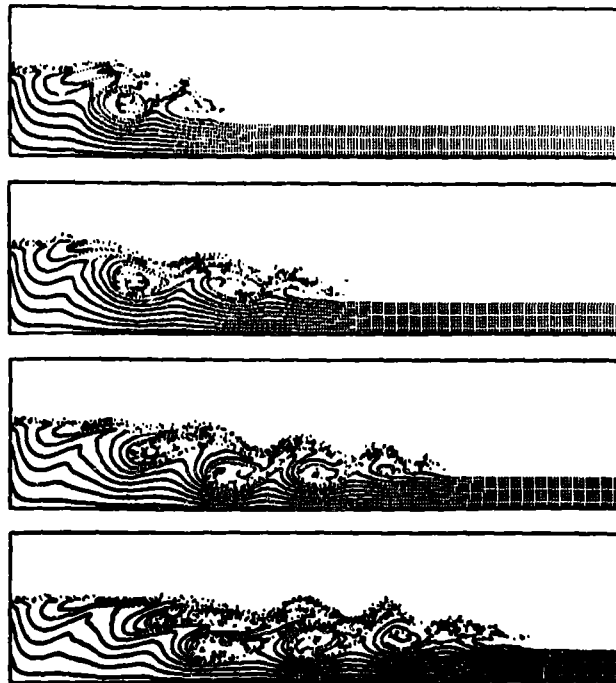


图 13 涌波或水跃的 MAC 计算

到刚性平面上而分开流走。一部分流体往后溅并堆积在容器内，往前溅的那部分则容许自由离开计算区域，好象容器是往左边向边界外延伸一样¹⁾。

当水流遇到刚性障碍物时就形成波面高而陡的波，这类流动叫做涌波或水跃。图13是 *MAC* 计算的一系列图形，水不断从右边泵送进来。上面那幅图表示水刚冲击到左边刚墙上不久时的溅开情况。随后涌波迎着来流方向前进。注意左边墙根处水深不变²⁾。往前运动的涌波立即引起巨大的内涡旋并发展着，显示出动能转变为湍能的初期阶段。

图14示出一种奇特的流体流动过程即冯·卡门涡街的发展状况。只要空气或水缓慢流过一个物体，一般都要出现这种流动过程，但因流体是透明的，所以很少看见它。任何人都听到过它在风中的效应，或者听到过旋转一条绳子时发出的呜呜声。涡街是真正的流体动力学不稳定性。设计师和工程师对它不是不感兴趣的，因为它能引起破坏事故，例如华盛顿 Tacoma Narrows 桥的倒塌。



图 14 冯·卡门涡街的 *MAC* 计算

一系列计算表明，除上述 7 种自由面流动例子外，*MAC* 也同样可计算限制性流动。这里是物体后面流动图案的发展情况，流体从左边进来从右边出去。每三个图是一组，上面是流线图，下面是轨迹图。流线表明坐标系里的流动方向，通过其他静止流体把物体拖动。轨迹图形由通常的标记点给出，这和实验中把一丝丝的烟引入气体或把颜色水线引入流体所形成的图形一样。

这些图形显示出流场早期的发展情况，正象流体动力学不稳定性使流动离开均匀层流，一直发展成涡旋从物体的每个角上交替脱落出来的后期规则图形。

基本的 *MAC* 方法已经通过对它们所作的种种修改而证明了它的适应性。我们举了几何形状为平面和柱状的例子，也举了自由面流动和限制性流动的例子。下一个例子是推广到两种流体，并包含了表面张力效应的情形。

图15由两种质点的两排图片构成。显示了表面张力影响分界面不稳定性非线性增长状态的效应，这是对两种流体混合过程的一个重要贡献。在每排图片的计算中，重流体在上面，它的标记点用小点子表示，轻流体则用大点子表示。为了计算表面张力，采用了样条曲线拟合 (Spline-fitting) 方法来估计一组表面标记点的表面曲率。每一排图片都是从分界面上加一个小扰动开始，由于瑞利-泰勒不稳定性的作用，在分界面上有一块象铁路道钉形状的重液体落到下面的液体中。这块道钉状液体的形状主要取决于表面张力的强度。上面那排图片是有表面张力时的计算结果，下面这排则没有表面张力，并且其动粘性系数仅为上面那排的一半。表面张力和粘性都倾向于减小不稳定性增长

1) 复制图12时未能把原图全部细节清晰印出。——编者
2) 原书第VIII章E给出了水深及涌波传播速度的理论解。——译者

率而增加开尔文-赫姆霍茨不稳定性的波长，这种不稳定性是在道钉状液体的尖部附近发展着。这点由下面一排图片中的侧面涡旋证实了。下面这排的计算时间约为上面那排2/3的（但相应的作图时间并不一样）。

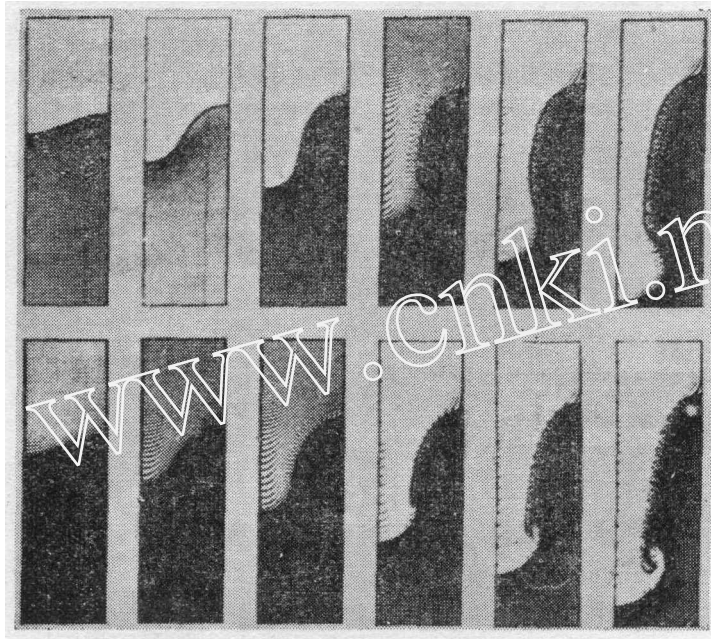


图 15 瑞利-泰勒不稳定性

4. LINC 最后要说明的计算方法用的是拉格朗日坐标，这和前面三种方法都用欧拉表示法不一样。拉格朗日不可压缩流动方法（简称LINC法）是为计算有自由面的粘性不可压缩流体的暂态动力学而设计的。在这方法中，流体区域用格子顶点和流体一起运动的网格覆盖，因而一个格子中的流体总是留在这格子里面，流体的边界则和格子的边界一起运动。一般说来，LINC对于没有大变形的问題是最有用的，但需要精确知道自由面及介质分界面的情况。大的变形把LINC的格子歪曲成不可接受的形状，而这种大变形问題如用MAC这样的欧拉方法却是不成问題的。但另一方面，用拉格朗日方法却非常容易把表面张力效应考虑进去。

二维LINC计算过程基于下列各量：每个顶点的坐标和速度分量，每个格子的体积和压力。这些量和通常一样按一小段一小段时间向前演变。每个循环的各步骤是首先定出每格中的压力，让每个格子的体积在这步以前和这步以后相同，这是由于在不可压缩流体中每个拉格朗日格子的体积应为常数。从新的压力梯度算出新的速度，从而又确定各顶点的新坐标。

图16的一组6张图片是流体在长方形箱子内晃动的LINC计算。在这例子中，最初流体在 $t=0$ 时是静止的，而在第一个计算循环时把一个余弦压力脉冲突然加到自由面上而引起振荡。拉格朗日网格在 x 方向有40格， y 方向15格，计算网格的左边、右边及底边箱壁算成刚性自由滑动的反射平面。相邻两张图片之间的时间间隔接近于振荡的理论

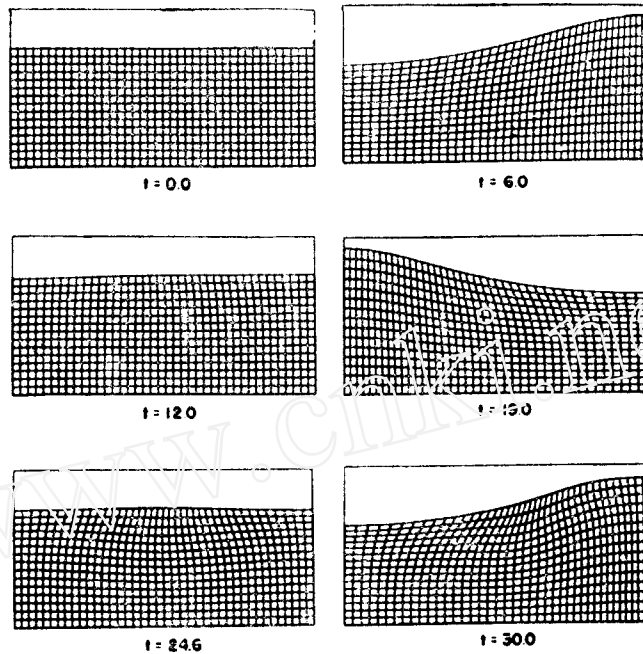


图 16 晃动水箱时水波的计算

周期的 $\frac{1}{4}$ 。但是，非线性效应引进波长为 $\frac{\lambda}{2}$ 的扰动，其结果是第2张和最后一张图片之间（代表一个完整的振荡周期）的网格的几何形状的变化。得到这一组图片以后计算停止了，因为格子的变形增大，以致当第二次向左晃动时，表面就卷起来了。这个限制，在一个新的任意结合的拉格朗日—欧拉方法（简称ALE法）中取消了，在这种方法中，其欧拉性质克服了如图16中所示的那种不想要的格子边线的运动。在ALE中，格子的顶点可以象一般的拉格朗日方式那样跟流体一起运动而在欧拉计算中则是固定的，或者以预先任意指定的方式运动而给出一种连续地重分网格的能力。此方法是研究复杂流动时的有前途的工具，对这些复杂流动，纯粹的欧拉方法或纯粹的拉格朗日方法往往都不能用。此外，它还可以和前面说过的ICE方法结合，从而有可能适用于一切流速范围。

参 考 文 献

A. 基 本 文 献¹⁾

- [1] 流体力学论文集, 卷1—6(内部资料).
- [2] Alder, B., Fernbach, S. and Rotenberg, M., Eds., *Method in Computational Physics*, Vol. III, Academic Press, New York (1964).
- [3] Richtmyer, R. D. and Morton, W., *Difference Methods for Initial-Value-Problems*, 第二版(1967).
- [4] Proc. of the Intern. Symp. on High-Speed Computing in Fluid Dynamics, *The Physics of Fluids*, Supp. II (Dec. 1969).
- [5] Proc. of the 2nd Intern. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Univ. of California, Berkeley, California, Sept.15—19, 1970.
- [6] *Journal of Computational Physics*.

B. 拉格朗日数值方法

- [7] 1955—Kolsky, H. G., A method for the numerical solution of transient hydrodynamic shock problems in two space dimensions, LA—1867.
- [8] 1963—Mader, C. L., Stretch SIN-A code for computing one-dimensional reactive hydrodynamic problems, LA-DC—5795.
- [9] 1965—Browne, P. L. and Hoyt, Martha S., HASTI—A numerical calculation of two-dimensional Lagrangian hydrodynamics utilizing the concept of space-dependent time steps, LA-3324-MS.
- [10] 1965—Browne, P. L., REZONE, A proposal for accomplishing rezoning in two-dimensional Lagrangian hydrodynamics problems, LA—3455—MS.
- [11] 1966—Mader, C. L., The two-dimensional hydrodynamic hot spot, LA—3450.
- [12] 1968—Browne, P.L. and Wallick, K. B., A brief discussion of a method for automatic rezoning in the numerical calculation of two-dimensional Lagrangian hydrodynamics, Proc. of the IFIP (International Federation of Information Processing) Congress, 1968, Edinburgh, Scotland. Booklet I, p. 131.

C. 欧拉数值方法

- [13] 1963—Harlow, F. H., The Particle-in-Cell method for numerical solution of problems in fluid dynamics, *Proc. of Symposia in Applied Mathematics*, 15, 269.
- [14] 1964—Harlow, F. H., The Particle-in-Cell computing method for fluid dynamics, See [2].
- [15] 1965—Amsden, A. A. and Harlow, F. H., Numerical calculation of supersonic wake flow, *AIAA Journal*, 3, 2081. Also republished in the AIAA series of selected reprint, Vol. 4, "Computational Fluid Dynamics", C. K. Chu, Ed.
- [16] 1965—Gage, W. R. and Mader, C. L., Three dimensional Cartesian Particle-in-Cell calculations, LA—3422.
- [17] 1965—Bulter, T. D., Numerical calculation of the transient loading of blunt obstacles by shocks in air, *AIAA Journal*, 4, 460.
- [18] 1966—Amsden, A. A., The Particle-in-Cell method for calculation of the dynamics of compressible fluids, LA—3466.
- [19] 1966—Harlow, F. H. and Pracht, W. E., Formation and penetration of high speed collapse jets, *Phys. Fluids*, 9, 1951.

1) 原作者给出的是有关流体力学的基本文献, 现经我们改为有关流体力学数值计算方法的一些文献。
——译者

- [20] 1966—Mader, C. L., Taylor, R. W., Venable, D. and Travis, J. R., Theoretical and experimental two-dimensional interactions of shocks with density discontinuities, LA-3614.
- [21] 1966—Gentry, R. A., Martin, R. E. and Daly, B. J., An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems, *J. Computational Phys.*, **1**, 87.
- [22] 1966—Mader, C.L. and Gage, W.R., 2DE—A two dimensional Eulerian hydrodynamic code for computing one component reactive hydrodynamic problems, LA-3629-MS.
- [23] 1967—Butler, T. D., Numerical solutions of the hypersonic sharp-leading-edge problem, *Phys. Fluids*, **10**, 1205.
- [24] 1971—Harlow, F. H. and Amsden, A. A., A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds, *J. Comp. Physics*, accepted for publication.

D. 不可压缩流动的数值方法

- [25] 1963—Fromm, J. E., A method for computing nonsteady, incompressible, viscous fluid flows, LA-2910.
- [26] 1963—Fromm, J. E., The time dependent flow of an incompressible viscous fluid, See [2].
- [27] 1963—Fromm, J. E. and Harlow, F. H., Numerical solution of the problem of vortex street development, *Phys. Fluids*, **6**, 975. Also republished in the AIAA series of selected reprints, Vol. 4, "Computational Fluid Dynamics", C. K. Chu, Ed.
- [28] 1964—Harlow, F. H. and Fromm, J. E., Dynamics and heat transfer in the von Kármán wake of rectangular cylinder, *Phys. Fluids*, **7**, 1147.
- [29] 1965—Fromm, J. E., Numerical solutions of the nonlinear equations of a heated fluid layer, *Phys. Fluids*, **8**, 1757.
- [30] 1965—Harlow, F. H. and Fromm, J. E., Computer experiments in fluid dynamics, *Scientific American*, **212**, №3, 104 (March 1965).
- [31] 1965—Harlow, F. H., Shannon, J. P. and Welch, J. E., Liquid waves by computer, *Science*, **149**, 1092.
- [32] 1965—Harlow, F. H., Welch, J. E., Shannon, J. P. and Daly, B. J., The MAC method, LA-3425.
- [33] 1965—Harlow, F. H. and Welch, J. E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow, *Phys. Fluids*, **8**, 2182.
- [34] 1965—Harlow, F. H. and Welch, J. E., Numerical study of large amplitude free surface motions, *Phys. Fluids*, **9**, 842.
- [35] 1967—Daly, B. J., A numerical study of two-fluid Rayleigh-Taylor instability, *Phys. Fluids*, **10**, 297.
- [36] 1967—Harlow, F. H. and Shannon, J. P., The splash of a liquid drop, *J. of Appl. Phys.*, **38**, 3855.
- [37] 1967—Harlow, F. H. and Shannon, J. P., Distortion of a splashing drop, *Science*, **157**, 547.
- [38] 1967—Daly, B. J. and Pracht, W. E., A numerical study of density current surges, *Phys. Fluids*, **11**, 15.
- [39] 1967—Hirt, C. W. and Shannon, J.P., Free surface stress conditions for incompressible flow calculations, *J. Computational Phys.*, **2**, 403.
- [40] 1970—Hirt, C. W., Cook, J. L. and Butler, T.D., A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface, *J. Computational Phys.*, **5**, 103.
- [41] 1970—Amsden, A. A. and Harlow, F. H., The SMAC method—A numerical technique for calculating incompressible fluid flows, LA-4370.
- [42] 1970—Hirt, C.W., An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing technique, See [5].
- [43] 1970—Nakayama, P. I. and Romero, N. C., Numerical method for almost three-dimensional incompressible fluid flow and a simple internal obstacle treatment, *J. Comp. Physics*, accepted for publication.

- [44] 1970—Nichols, B. D., Recent extensions to the Marker-and-Cell method for incompressible fluids flows, See [5].
- [45] 1970—Pracht, W.E., Implicit solution of creeping flows, with application to continental drift, See [5].
- [46] 1971—Pracht, W. E., A numerical method for calculating transient creep flows, *J. Comp. Physics*, **7**, 46.

E. 其 他

- [47] 1965—Welch, J. Eddie, Moving picture computer output, *Comput. Rev.*, **7**, 355.
- [48] 1966—Welch, J. E., Computer simulation of water waves, *Datamation*, **12**, №11, 41.
- [49] 1967—Hirt, C. W. and Harlow, F. H., A general corrective procedure for the numerical solution of initial-value problems, *J. Computational Phys.*, **2**, 114.
- [50] 1967—Harlow, F. H. and Nakayama, P. I., Turbulence transport equations, *Phys. Fluids*, **10**, 2323.
- [51] 1968—Hirt, C. W., Heuristic stability theory for finite difference equations, *J. Computational Phys.*, **2**, 339.
- [52] 1968—Harlow, F. H. and Amsden, A. A., Numerical calculation of almost incompressible flow, *J. Computational Phys.*, **3**, 80.
- [53] 1968—Computer Fluid Dynamics, Los Alamos Scientific Laboratory Motion Picture Number Y-204.
- [54] 1968—Harlow, F. H. and Nakayama, P. I., Transport of turbulence decay rate, LA-3854.
- [55] 1968—Amsden, A. A. and Harlow, F. H., Transport of turbulence in numerical fluid dynamics, *J. Computational Phys.*, **3**, 94.
- [56] 1968—Harlow, F. H., Transport of anisotropic or low-intensity turbulence, LA-3947.
- [57] 1968—Hirt, C. W., Computer studies of time-dependent turbulent flows, Proc. of the IUTAM Intern. Symp. on High-Speed Computing in Fluid Dynamics, Monterey, California, Aug. 1968.
- [58] 1969—Harlow, F. H. and Hirt, C. W., Generalized transport theory of anisotropic turbulence, LA-4086.
- [59] 1970—Daly, B. J. and Harlow, F. H., Inclusion of turbulence effects in numerical fluid dynamics, See [5].
- [60] 1970—Daly, B. J. and Harlow, F. H., Transport equations in turbulence, *Phys. Fluids*, **13**, 2634.
- [61] 1969—Harlow, F. H., Numerical methods for fluid dynamics—An annotated bibliography, LA-4281.
- [62] 1970—Harlow, F. H., Computer solutions in continuum dynamics, in "Computer and their Role in Science", A. H. Taub and S. Fernbach, eds., Gordon and Breach, Science Publisher Ltd., London. LA-DC-9996.
- [63] 1971—Harlow, F. H., Contour dynamics for numerical fluid flow calculations, *J. Comp. Physics*, accepted for publication.

译自: Francis H. Harlow and Anthony A. Amsden, Fluid Dynamics, **K**. Numerical Fluid Dynamics, Los Alamos Scientific Laboratory report LA-4700 (June 1971).

(胡祖熾 譯)