

高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学研究*

张 伟[†] 姚明辉 张君华 李双宝

北京工业大学机电学院, 北京 100124

摘 要 综述了 Melnikov 方法的发展历史, 从 1963 年苏联学者 Melnikov 提出该方法开始, 一直到目前广义 Melnikov 方法的提出和发展. Melnikov 方法的发展历程可以概括为 3 个阶段, 分别综述了每一个阶段 Melnikov 方法的扩展和应用, 论述了国内外在该方向的研究现状和所获得的主要结果, 指出了各种 Melnikov 方法之间的联系、存在的问题和不足. 为了对比两种研究高维非线性系统多脉冲混沌动力学的理论, 本文综述了另外一种全局摄动理论, 即能量相位法, 总结了该方法十几年来发展历史以及国内外的理论研究成果和工程应用实例, 阐述了能量相位法发展的根源以及与 Melnikov 方法的内在联系, 比较了能量相位法和广义 Melnikov 方法两种理论研究对象的差别, 以及各自所存在的不足和问题. 简要论述了能量相位法和广义 Melnikov 方法的理论体系, 并利用广义 Melnikov 方法分析了四边简支矩形薄板的多脉冲混沌动力学, 数值模拟进一步验证了理论研究的结果. 最后, 详细综述了两种理论的缺点和不足, 说明今后全局摄动理论的发展方向.

关键词 高维非线性系统, 全局分岔, 混沌动力学, 能量相位法, 广义 Melnikov 方法

中图分类号: O322

文献标识码: A

文章编号: DOI:10.6052/1000-0992-12-053

1 引 言

在实际工程系统中, 有许多问题的数学模型和动力学方程都可用高维非线性系统来描述, 例如黏弹性传动带由于在运动过程中可以忽略弯曲刚度, 因此其动力学模型可以简化成为具有黏弹性特性的轴向运动弦线, 内燃机曲轴、机器人柔性机械臂等可以简化成悬臂梁, 还有广泛应用在航空航天工程领域的薄板和薄壳结构, 由流体诱发的输流管的非线性振动问题, 在机械、航空等领域广泛应用的主动电磁轴承等. 如何研究由这些工程实际问题所建立的无限维或高维非线性动力学方程是工程科学领域中非常重要的研究课题. 对于高维非线性动力系统来说, 其研究难度比低维非线性动力系统要大得多, 不仅有理论方法上的困难, 而且还有空间几何描述和数值计算方面的困难. 对于高维非线性系统和无限维非线性系统来说, 从理论上讲都可用中心流形理论和惯性流

形理论对高维非线性系统和无限维非线性系统进行降维处理, 使系统的维数有所降低, 但是降维后系统的维数仍然很高, 并且高维非线性系统中的稳定流形和不稳定流形的空间几何结构难于直观的构造和描述, 其后续研究仍然非常困难. 因此发展能够处理高维非线性动力学系统的理论研究方法是非常重要和迫切的.

高维非线性系统的复杂动力学、全局分岔和混沌动力学, 是目前国际上非线性动力学领域的前沿课题, 受到科学家们的广泛关注. 大部分工程实际问题都可用高维非线性系统来描述, 并且大多数都是高维扰动 Hamilton 系统. 然而目前研究高维非线性系统的复杂动力学、全局分岔和混沌动力学的方法还不是很多, 国际和国内均处于发展阶段. 尽管对于高维非线性系统已有一些理论研究方法和结果, 但由于高维非线性系统的复杂性和多样性, 现有的数学成果还远不能满足工程实际问题的需要, 而且研究高维非线性系统动力

收稿日期: 2012-04-06, 修回日期: 2012-12-14

*国家自然科学基金项目 (11290152, 11072008, 11172009, 10732020, 10872010) 资助

[†] E-mail: sandyzhang0@yahoo.com, ymh@bjut.edu.cn

学的很多数学理论和方法高度抽象,目前阶段尚难于在工程实际问题中进行大规模应用。

因此,结合工程实际中有典型意义的高维非线性动力学模型,在理论方面发展相应的适用研究方法,对于解决工程实际问题来说是至关重要的。目前对于高维非线性系统复杂动力学、全局分岔和多脉冲混沌动力学的研究主要是以理论分析和数值模拟为主,尽管在数值模拟中发现了大量的各种分岔与混沌现象,但对于产生这些复杂现象的非线性本质以及它们的物理意义还缺乏实验方面和工程上的合理解释。尽管研究高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学具有很大的挑战性和困难,但是近几十年来,国内外的学者还是取得了一些研究成果。

2 Melnikov 方法及全局摄动方法

非线性系统的全局动力学分析一般包括:环面运动和混沌运动存在性的有关判据,全局分岔和奇怪吸引子的刻画等。目前成功地用于全局动力学分析的理论方法还不多,主要有符号动力学理论、Smale 马蹄理论以及两种解析方法,即 Melnikov 方法和 Shilnikov 方法。但是它们在高维非线性系统复杂动力学问题的研究中都遇到很大的困难,因此,对多于两个自由度的非线性动力系统全局分岔和混沌动力学进行分析的研究方法还非常有限。在高维非线性动力学系统的全局分岔和混沌动力学问题中,除了单脉冲同宿分岔和异宿分岔外,还存在多脉冲同宿分岔和异宿分岔,针对多脉冲分岔问题,目前主要有两种解析方法可以进行研究,即广义 Melnikov 方法和能量相位法。

2.1 Melnikov 方法的扩展和全局摄动法

1963年,前苏联学者 Melnikov^[1]在研究保守系统同宿轨线和异宿轨线受扰动后发生断裂时,提出了一种度量断裂后稳定流形与不稳定流形之间距离的方法,后来发展成为一种研究混沌运动的解析方法,称之为 Melnikov 方法。从 Melnikov 方法的扩展到广义 Melnikov 方法的提出,是一个有着三四十年历史发展的过程。继 Melnikov 之后,1964年,Arnold^[2]把 Melnikov 方法推广到两个自由度完全可积的 Hamilton 系统,建立了 Arnold 扩散理论。此后,在十几年的时间里, Melnikov 方法没有得到进一步的发展。直到 1979年, Holmes^[3]用 Melnikov 方法分析了单自由度受迫 Duffing 振子,得到了一些有重要意义的结果。随后,一些学者开

始把 Melnikov 方法与其他摄动方法相结合,从而改进和发展了 Melnikov 方法。

1980年, Holmes^[4]修正了 Melnikov 方法中的时间变量函数,利用 KB 平均法、Poincare 映射和 Melnikov 方法研究了受迫振子同宿运动和异宿运动,给出了研究单自由度非线性系统混沌运动的一种解析方法。1981年, Holmes 和 Marsden^[5]研究了 Banach 空间中周期受迫振动方程存在 Smale 马蹄意义映射的充分条件,初步把 Melnikov 方法推广到无限维系统,利用不变流形理论、非线性半群理论和 Melnikov 方法分析了非线性平面运动屈曲梁的混沌运动。1982年, Holmes 和 Marsden^[6]利用 Melnikov 方法和 KAM 理论研究了具有一个同宿轨道和两类周期轨道的二自由度扰动 Hamilton 系统,发现 Arnold 扩散使系统的稳定流形和不稳定流形横截相交。1983年, Holmes 和 Marsden^[7]在近可积 Hamilton 系统上分析了马蹄映射和 Arnold 扩散的存在性,他们利用了李群理论中的对称群、基空间理论和 Melnikov 方法研究了近可积 Hamilton 系统同宿轨道的扰动。1987年, Salam^[8]利用 Melnikov 方法研究了二维耗散系统的同宿轨道。

1988年, Robinson^[9]利用 Melnikov 方法分析了四维完全可积 Hamilton 系统的同宿轨道,统一了 Melnikov 函数的两种表达形式,提出了向量场 Melnikov 函数的概念。同年, Wiggins^[10]在其专著中,把高维扰动 Hamilton 系统分为 3 类,利用标准的 Melnikov 方法详细研究了这些系统的全局分岔和混沌动力学。在此基础上, Kovacic, Wiggins 和许多学者不断地改进和完善这种分析高维非线性动力系统的全局摄动方法。Feng 等^[11]研究了具有 $Z_2 \oplus Z_2$ 对称性的四维扰动 Hamilton 系统的全局分岔,利用 Melnikov 方法分析了扰动情况下 3 类异宿环断裂后,产生 Smale 马蹄意义下混沌运动的现象。1992年, Kovacic 等^[12]综合了 Melnikov 方法、几何奇异摄动理论和不变流形纤维丛理论,提出了一种研究高维非线性系统全局分岔和混沌动力学的新全局摄动方法,这种全局摄动方法是高维 Melnikov 方法的进一步改进和发展。他们利用这种全局摄动法研究了未扰动系统是完全可积 Hamilton 系统的四维非线性系统的同宿轨道和异宿轨道,分析了有阻尼受迫振动 Nine-Gordon 方程的全局分岔和混沌动力学。同时,根据 Shilnikov 定理,指出如果方程在鞍焦点处存在同宿轨线,那么系统就会产生混沌运动。从动力学和几何学角度来讲,高维非线性系统混沌动力学的机理就是通

过脉冲来连接空间两个相关状态. Kovacic^[13-14] 利用全局摄动法, 分析了两自由度扰动 Hamilton 系统和近可积耗散系统共振情形下的同宿轨道. Kovacic^[15-16] 运用全局摄动法, 分别研究了未扰动系统是完全可以积 Hamilton 系统和近可积耗散系统的全局分岔和混沌动力学, 提出了共振区同宿轨道统一理论, 并且证明了横截同宿轨道的存在性.

Camassa^[17] 研究了 Lorenz 系统的不变流形和双曲结构, 利用系统的反对称性扩展了 Melnikov 方法, 应用扩展后的 Melnikov 方法和奇异摄动理论分析了系统的同宿分岔和混沌动力学. Bountis 等^[18] 引入了 N 维映射推导出了 Melnikov 向量场函数, 研究了四维系统的不变流形横截. Vered 等^[19] 研究了两自由度近可积非解耦 Hamilton 系统的同宿轨道, 他们根据 Melnikov 函数的几何含义, 在角变量坐标上, 定义了同宿轨道破裂后稳定流形和不稳定流形之间的距离, 提出了角变量坐标形式的 Melnikov 函数. Kollmann 等^[20] 利用 Melnikov 向量场函数分析了两模态截断和三模态截断非线性 Schrödinger 方程的孤立波解.

在 Melnikov 方法扩展到高维非线性系统全局分岔和混沌动力学的研究方面, 日本学者 Yagasaki 也作出了重要的贡献. Yagasaki^[21] 利用 Melnikov 方法和平均法研究了四维扰动 Hamilton 系统同宿流形和 3 维共振圆环面的混沌动力学. Yagasaki^[22] 发展了次谐 Melnikov 方法, 给出了周期轨道存在性、稳定性和分岔定理, 改进了两类研究同宿轨道的 Melnikov 方法, 讨论了次谐 Melnikov 方法和同宿轨道 Melnikov 方法之间的联系, 并利用这些理论分析了二自由度受迫弱耦合振子的同宿轨道. Yagasaki^[23] 研究了四自由度非平面运动弯曲梁的非线性振动, 由于未扰动系统是鞍-中心结构, 稳定流形和不稳定流形不重合, 但在低维流形上相交而且不一定完全可积. 所以, 在这种情况下, 改进的 Melnikov 方法不能使用, 为此, Yagasaki 又进一步发展了高维 Melnikov 方法. Yagasaki^[24-25] 利用这种高维 Melnikov 方法分析了两自由度扰动 Hamilton 系统和两自由度不可积系统的 Smale 马蹄意义下的混沌动力学.

还有一些学者也为 Melnikov 方法的发展做出了贡献. Doelman 等^[26] 研究了三维奇扰动系统由于鞍-结分岔产生的同宿轨道, 利用 Melnikov 函数分析了 N 脉冲同宿轨道的稳定流形和不稳定流形的动力学特性. Li^[27-28] 综合利用 Melnikov 向量场函数、Backlund-Darboux 变换、Fenichel 纤维丛

理论研究了四维非线性 Schrödinger 方程的同宿轨道、异宿轨道、余维 2 横截同宿管.

此外, 国内的一些专家和学者也对 Melnikov 方法的扩展做出了重要的贡献. 刘曾荣等^[29] 深入研究了 Melnikov 函数的含义, 发现根据摄动理论中的正交条件可以推导出 Melnikov 函数. 郭友中等^[30] 把 Melnikov 方法推广到高阶情况, 推导了二阶次谐 Melnikov 函数表达式, 并且证明了在一定条件下可以用二阶次谐 Melnikov 函数来判定系统的次谐或超次谐的存在性. 徐振源等^[31] 利用 Kovacic 和 Wiggins 提出的全局摄动方法研究了非线性 Sine-Gordon 方程两阶模态截断系统的同宿轨道. 赵晓华等^[32] 介绍了广义 Hamilton 系统理论的发展历史、基本概念和研究现状, 阐述了 Melnikov 函数与 Hamilton 函数密切相关. 赵晓华等^[33] 深入探讨了有限维 Poisson 流形上定义的 Hamilton 系统的性质, 并利用这些性质研究了高维微分动力系统的定性问题.

上述关于 Melnikov 方法的研究主要都集中在四维非线性系统上, 1997 年, Li 等^[34-35] 开始提出 $2(M+1)$ 维 Melnikov 理论, 把 Melnikov 方法从理论上推广到高于四维的任意偶数维高维非线性系统中, 他们仔细推导了高维 Melnikov 函数的表达式. 以前的 Melnikov 函数只是度量同维数稳定流形和不稳定流形之间的距离, 而在高维非线性系统中存在各种不同维数的不变子流形, 每一个不变子流形都有相应的稳定流形和不稳定流形, 在扰动相空间中, 这些不同维数的稳定流形和不稳定流形横截相交, 那么如何度量不同维数的不变流形之间的距离成为 $2(M+1)$ 维 Melnikov 理论的难点和创新点. Li 等通过二次度量解决了这个问题, 同时, 他们把四维符号动力学理论拓展到 $2(M+1)$ 维, 定义了 $2(M+1)$ 维 Shilnikov 型同宿轨道, 从而论证了系统存在 Smale 马蹄意义下的混沌动力学. 由于 Li 等的研究成果可以拓展到任意高维非线性系统, 因此这种研究思路和方法可以推广应用到偏微分方程.

Melnikov 方法从 1963 年开始提出直到今天, 虽然主要的发展方向是在常微分方程领域, 但实际上这种方法在分析和解决偏微分方程的同宿轨道、异宿轨道、不变流形、刻画混沌运动存在性等方面也取得了一些研究成果. Calini 等^[36] 利用数值方法研究了非线性偏微分方程的同宿相交、产生同宿相交的时间尺度、同宿相交这种动力学行为的持续性问题, 受有限维 Melnikov 函数几何

含义的启发,他们利用 Melnikov 方法的分析思想解释了持续性同宿轨道的结构,从几何结构上阐述了混沌运动的稳定特性. Shatah 等^[37]利用 Melnikov 方法研究了扰动 Sine-Gordon 偏微分方程的同宿轨道存在性. Zeng^[38]综合利用不变流形理论、拓扑学中的叶状结构理论、以及 Melnikov 方法证明了扰动非线性 Schrödinger 偏微分方程中存在同宿轨道. Li^[39]利用 $2(M+1)$ 维 Melnikov 理论研究了非线性 Schrödinger 偏微分方程同宿轨道的存在性和持续性. Li^[40]研究了奇异摄动 Davey-Stewartson 偏微分方程同宿轨道的存在性,他利用了 $2(M+1)$ 维 Melnikov 理论中的度量准则,计算了鞍点三维不稳定流形与余维 2 局部不变中心稳定流形之间的距离. 以往的 Melnikov 函数定义稳定流形和不稳定流形之间的距离是 ε 一阶项的距离,讨论的问题主要是低阶扰动流形与未扰动流形之间的关系,2006 年, Li^[41]进一步扩展了 Melnikov 函数,使它可以计算 ε 高阶项距离,并利用此函数研究了非线性 Sine-Gordon 偏微分方程异宿管的存在性及混沌动力学.

2.2 用高维 Melnikov 方法研究非线性系统的单脉冲混沌动力学

Melnikov 方法在理论上的不断扩展,也促进了它在工程科学问题中的应用,它的研究对象也逐渐地从完全可积 Hamilton 系统、近可积 Hamilton 系统、非线性 Schrödinger 方程、非线性 Sine-Gordon 方程转变为有实际工程背景的非线性动力学模型、高维非线性方程,一些学者开始利用高维 Melnikov 方法研究具有工程背景的非线性系统单脉冲混沌动力学.

Feng 等^[42]利用 Kovacic 和 Wiggins 提出的全局摄动方法分析了参数激励作用下两自由度非线性机械系统混沌运动的存在性,证明了鞍焦点处 Shilnikov 型同宿轨道的存在性. Feng 等^[43]利用 Kovacic 和 Wiggins 提出的全局摄动方法研究了参数激励作用下薄板同宿轨道的存在性. Tien 等^[44-45]利用平均法、Melnikov 方法以及全局摄动方法研究了简谐激励作用下薄弓结构,在 1:1 内共振和 1:2 内共振情形下的混沌动力学. Kovacic 等^[46]利用 Melnikov 方法分析了双摆系统的同宿轨道、异宿轨道以及同宿横截面. Malhotra 等^[47]利用规范形理论和全局摄动法研究了自由度参数激励非线性可逆系统,分析了在非半单 1:1 内共振情形下的全局动力学. Malhotra 等^[48]还利

用高维 Melnikov 方法研究了薄弓在主亚谱共振和 1:2 内共振情形下的全局动力学,在薄弓结构上作用的载荷是随时间和空间同时变化的激励. 研究结果表明当系统没有耗散项时,正规双曲不变圆环面上的异宿轨道会使系统产生 Smale 马蹄意义下的混沌,数值计算也进一步验证了理论分析的结果. 随后, Malhotra 等^[49]又研究了 1:1 内共振情形下,含有耗散项薄弓的全局动力学. 他们利用 Kovacic 和 Wiggins 提出的全局摄动方法分析了扰动系统鞍-焦点的 Shilnikov 同宿轨道的存在性和混沌动力学. Feng 和 Liew^[50]研究了两自由度机械系统在两模态 0:1 内共振情形下平均方程的 Shilnikov 同宿轨道的存在性,两个模态一个是快变模态,另外一个慢变模态,当快变模态的振动幅值达到临界值时,慢变模态和快变模态耦合在一起,因此,慢变模态的奇点就失去了稳定性,然后利用 Melnikov 函数来度量快变模态共振区环面上的稳定流形和不稳定流形之间的距离,从而确定存在 Shilnikov 同宿轨道的物理参数的范围. Lee 等^[51-52]综合利用 Galerkin 方法、多尺度法和 Melnikov 理论研究了有缺陷圆板 1:1 内共振情形下的全局分岔、Shilnikov 型同宿轨道,以及非共振情形下的异宿轨道. Vakakis^[53]分别利用次谐 Melnikov 方法和同宿 Melnikov 方法研究了强非线性耦合机械振子的复杂动力学.

国内的专家和学者对 Melnikov 方法的发展和应用也做出了重要贡献,取得了一些研究成果. Xu 等^[54]利用指数二分性理论、Melnikov 方法和几何奇异摄动理论研究了耦合 Duffing 方程的 Shilnikov 型同宿轨道. Zhang^[55]研究了参数激励作用下四边简支矩形薄板的全局分岔和混沌动力学,根据 von Karman 大变形理论建立薄板的运动控制方程,综合利用 Galerkin 方法和多尺度方法得到平均方程. 利用规范形理论化简,得到具有双零特征值和一对纯虚特征值时最简规范形,然后利用 Kovacic 和 Wiggins 提出的全局摄动方法分析了薄板的异宿分岔和混沌动力学. Zhang 等^[56]利用 Kovacic 和 Wiggins 提出的全局摄动方法研究了悬浮弹性索的全局分岔和混沌动力学,并用数值方法计算了参数激励和外激励联合作用下弹性索的混沌动力学. Zhang 等^[57]研究了轴向和横向载荷联合作用下非线性非平面运动悬臂梁的全局分岔和混沌动力学,用全局摄动方法分析了主参数共振 -1/2 亚谱共振 -2:1 内共振情形下的异宿分岔和单脉冲 Shilnikov 轨道. Hu 等^[58]利用 Melnikov 方法研

究了 Schrödinger-Boussinesq 耦合方程的同宿轨道. Guo 等^[59]利用 Melnikov 方法和几何奇异摄动理论研究了含有三次非线性项的六维 Schrödinger 方程. Du 等^[60]利用 Melnikov 方法研究了冲击力作用下单摆系统的同宿分岔,把光滑系统的 Melnikov 方法推广到了非光滑系统. Zhang 等^[61-62]利用 Kovacic 和 Wiggins 提出的全局摄动方法研究了弦-梁耦合系统、变刚度主动电磁轴承的全局分岔与混沌动力学. Chen 等^[63]利用全局摄动方法研究了斜拉索的 Shilnikov 型同宿轨道. Zhang 等^[64]综合利用指数二分性理论、Melnikov 方法和平均法研究了外激励和参数激励联合作用下四边简支矩形屈曲薄板的混沌动力学. Yu 等^[65]利用全局摄动方法研究了横向激励作用下简支矩形金属薄板 1:1 内共振情形下的 Shilnikov 型同宿轨道和混沌动力学. Deng 等^[66]利用向量场 Melnikov 函数研究了近可积非线性 Schrödinger 方程的同宿轨道和混沌动力学.

2.3 用广义 Melnikov 方法研究非线性系统的多脉冲混沌动力学

高维 Melnikov 方法经过上述改进和发展,在分析高维非线性系统单脉冲 Shilnikov 型同宿和异宿轨道以及混沌动力学方面逐步完善起来,但是仍然不能用来研究高维非线性系统的多脉冲混沌动力学.在工程科学问题中,导致高维系统出现混沌动力学的原因往往是多脉冲轨道而不是单脉冲轨道,因此, Kovacic 等又进一步推进了高维 Melnikov 理论的发展,提出了广义 Melnikov 方法,这种方法可以确定完全可积 Hamilton 系统和近可积 Hamilton 系统的多脉冲同宿轨道和多脉冲异宿轨道. 1996 年, Kaper 等^[67]基于 Fenichel 几何奇异摄动理论、Poincare-Arnold-Melnikov 理论,提出了广义 Melnikov 方法,他们研究了一类完全可积 Hamilton 系统受到小幅扰动或者耗散扰动后,产生多脉冲 Shilnikov 型同宿轨道的机理,建立了多脉冲奇异横截面的几何结构,研究结果表明每一个脉冲都是从共振区快速跳起,在共振区的流形上遍布着许多脉冲轨道,证明了共振区 Shilnikov 型同宿轨道的存在性. 1998 年, Camassa 等^[68]完善了广义 Melnikov 方法并给出了严谨的数学证明,他们通过度量流形上切空间之间的距离来定义多脉冲轨道上稳定流形与不稳定流形之间的距离,并且证明了多脉冲同宿轨道的存在性,以及多脉冲同宿轨道需要满足的横截条件和开折条件,

从而说明利用广义 Melnikov 方法可以判定高维非线性动力系统是否存在 Smale 马蹄意义下的混沌运动.

从理论上讲,广义 Melnikov 方法在判定高维非线性动力学系统产生混沌运动方面是一种完整严谨的理论体系,但是对于工程科学研究人员来说,由于广义 Melnikov 方法在理解、计算和开折条件的证明上,存在着很大的难度.因此,2000 年以前一直没有被推广到实际工程中分析一些具体的科学问题,目前也很少有学者利用广义 Melnikov 方法研究高维非线性系统的混沌动力学特性.尽管如此,在这方面还是取得了一些研究进展,2008 年, Zhang 等^[69-70]利用广义 Melnikov 方法分别研究了非线性非平面运动悬臂梁的多脉冲同宿轨道、多脉冲异宿轨道以及 Shilnikov 型混沌动力学,对比分析了研究高维非线性系统多脉冲混沌动力学的两种理论,即能量相位法和广义 Melnikov 方法,说明了所存在的问题和不足.最近, Zhang 等^[71-73]又把广义 Melnikov 方法从高维自治非线性系统推广到高维非自治非线性系统,并利用推广的方法研究了参数激励后屈曲薄板、压电复合材料层合矩形薄板的混沌动力学.

2.4 Melnikov 理论发展和现状小结

Melnikov 方法从 20 世纪 60 年代初被提出,发展到今天,经历了近半个世纪的时间,从最开始仅限于研究保守系统稳定流形与不稳定流形之间的距离,到如今成为研究高维非线性系统混沌动力学的一种判定准则.从研究高维非线性系统单脉冲混沌动力学,到研究高维非线性系统多脉冲混沌动力学,从研究完全可积 Hamilton 系统、非完全可积 Hamilton 系统、典型非线性常微分方程的混沌动力学,到研究实际工程科学问题中的复杂高维非线性系统、偏微分方程的混沌动力学,其大致经历了 3 个发展阶段.第一个发展阶段,是从 20 世纪 60 年代初到 20 世纪 80 年代中后期,这个阶段是 Melnikov 方法的原创期,受前苏联学者 Melnikov^[1]度量稳定流形和与不稳定流形之间距离的思想启发,研究人员开始把 Melnikov 方法引入到非线性动力学系统.随后,一些学者围绕着 Melnikov 方法,建立了许多重要的理论,并把 Melnikov 方法与其他理论不断地结合,这些理论包括 Arnold 扩散理论^[2]、Poincare 映射理论、KAM 理论、KB 平均法等,他们初步建立了研究不同系统的 Melnikov 方法理论框架.在此期间, Melnikov 方法的研究对

象主要是低维非线性系统, 这一阶段的代表性人物有 Melnikov, Arnold, Holmes 等学者.

Melnikov 方法发展的第二个阶段是从 20 世纪 80 年代中后期到 90 年代中期, 这个阶段是 Melnikov 理论发展的飞跃期, Melnikov 理论的研究对象开始从低维非线性系统转向高维非线性系统, 以 Wiggins, Kovacic 为代表的一些专家和学者, 把拓扑学中的不变纤维丛理论以及几何奇异摄动理论引入 Melnikov 方法, 提出并建立了高维 Melnikov 方法, 即全局摄动方法^[12-16]. 以后发展的许多 Melnikov 理论都是基于或者借鉴了全局摄动方法的思想, 例如次谐 Melnikov 方法^[21-25]、向量场 Melnikov 方法、指数二分性 Melnikov 方法等等. 由于实际工程科学问题几乎都可用高维非线性系统来描述, 以前的 Melnikov 方法由于受到维数的限制, 没有被推广到一些有工程背景的高维非线性动力学系统中. 正是由于研究对象维数的提高, Melnikov 方法的研究对象开始从低维非线性系统的理论研究转变到工程科学问题中高维非线性系统复杂动力学的研究. 为了定性研究高维非线性系统的混沌动力学, 研究人员开始把数学变换理论、规范形理论与 Melnikov 方法结合起来.

Melnikov 理论发展的第 3 个阶段是从 20 世纪 90 年代中期到现在, 这个阶段是高维非线性系统 Melnikov 理论发展时期. 针对不同的研究对象, Melnikov 理论的发展变得越来越深入、越来越细化, 出现了多种扩展的高维非线性系统 Melnikov 理论. 广义 Melnikov 方法^[67-68]是用来研究快变流形上多脉冲轨道的一种理论, $2(M+1)$ 维 Melnikov 理论^[34-35]是用来判定高于四维的任意偶数维高维非线性系统混沌动力学的一种理论. 研究人员建立了用于研究非线性偏微分方程全局动力学的 Melnikov 理论, 开始用 Melnikov 方法研究非线性偏微分方程的混沌动力学, 结合拓扑学中的叶状结构理论进一步发展了研究非线性偏微分方程的 Melnikov 理论^[38-39]等等. 根据工程科学问题建立的动力学模型, 往往是复杂的非线性偏微分方程或者维数高于四维的更高维非线性系统, 引发高维非线性系统产生 Smale 马蹄意义下混沌运动的轨道往往是多脉冲轨道. 因此, 这一阶段发展的高维非线性系统 Melnikov 理论, 从研究内容和研究对象上来看, 越来越接近工程科学问题. 但是, 对于工程科学研究人员来说, 由于这些理论内容更多偏重于数学研究, 难于理解和分析, 求解和证明开折条件比较困难. 而在非线性偏微分方程

领域发展起来的 Melnikov 理论, 其研究对象大多数集中于 Schrödinger 方程、Sine-Gordon 方程等经典偏微分方程, 所以, 从国际期刊公开发表的论文来看, 这些理论被用来研究工程科学问题的报道较少. 2008 年以后, Zhang 等^[69-73]开始利用广义 Melnikov 方法分别研究了一些具有实际工程背景的高维非线性动力学系统. 因此, 目前亟需简化这些复杂的理论体系和开折条件, 建立一套适用于研究工程科学问题的 Melnikov 方法, 并且能够利用这种理论解释实际高维非线性动力学系统产生混沌运动的机理, 能够利用 Melnikov 理论中的几何流形结构解释实验中新的动力学现象.

3 能量相位方法

在 Melnikov 理论不断向前发展的过程中, 产生了研究高维非线性系统多脉冲混沌动力学的广义 Melnikov 方法, 与此同时, 另外一种分析高维非线性系统多脉冲混沌动力学的全局摄动方法, 即能量相位法, 也应运而生. 能量相位法的提出和发展与 Melnikov 理论的扩展密不可分, 它是基于 Melnikov 理论发展起来的一种全局摄动方法.

3.1 能量相位方法的发展和推广

基于 Kovacic 和 Wiggins^[12]提出的高维 Melnikov 方法 - 全局摄动法, 1993 年, Haller 和 Wiggins^[74]在研究两个自由度完全可积 Hamilton 系统共振区的同宿轨道和异宿轨道时, 综合利用了几何奇异摄动理论、Fenichel 纤维丛理论、高维 Melnikov 方法和横截理论, 建立了共振区同宿轨道的能量相位准则, 在二维双曲不变流形上, 定义了同宿轨道的轨道函数, 证明了共振区同宿轨道和异宿轨道的存在性, 并利用这种方法分析了两模态截断非线性 Schrödinger 方程双曲周期轨道的同宿轨道. 1995 年, Haller^[75]利用 Fenichel 几何奇异摄动理论、Arnold 扩散理论和规范形理论研究了近可积 Hamilton 系统两个共振区的几何结构和动力学, 他通过定义能量面来描述强弱共振区的动力学, 研究结果说明穿越弱共振区的动力学行为是发生在弱双曲不变流形上, 针对这种穿越共振区的动力学扩散行为, Haller 给出了穿越时间的数量级 $O(1/\sqrt{\epsilon})$. 在前面研究成果的基础之上, Haller 等^[76]建立了能量相位法完整的理论体系, 能量相位理论不仅包括完全可积 Hamilton 系统的能量相位法还包括耗散扰动系统的能量相位法. 该理论的关键思想是把流形当成坐标系, 利用对

称性引入了作动变量和角变量, 经过数学变换以后, 共振区相空间中的相位角就变成了慢变变量, 局部慢流形就成为了双曲流形, 在这种双曲局部慢变的不变流形结构上利用能量相位准则, 他们研究了两自由度完全可积 Hamilton 系统和近可积 Hamilton 系统的多脉冲同宿轨道. Haller 和 Wiggins^[77] 利用能量相位法研究了两模态截断非线性 Schrödinger 方程的多脉冲同宿轨道, 分析了阻尼对系统的影响, 发现无阻尼时, 多脉冲跳跃轨道会产生 Smale 意义的混沌, 他们利用同宿分岔树来刻画多脉冲分岔现象.

1996 年, Haller 和 Wiggins^[78] 研究了三自由度 Hamilton 系统的多脉冲同宿轨道和异宿轨道, 他们首先利用三阶正规形可积几何结构确定了两类三维圆环面, 然后分析四维同宿流形上的三维不变球体. 他们发现受高阶非线性项的影响, 三维球体上的参数周期轨道发生破坏, 在四维不变流形上会产生新的二维不变圆环面, 同宿轨道和异宿轨道连接着这些圆环面, 利用能量-相位法来研究连接二维圆环面的多脉冲同宿轨道和异宿轨道. 1997 年, Haller^[79] 研究了 n 自由度近可积 Hamilton 系统强弱共振相互作用的非线性动力学, 利用 $n(n \geq 2)$ 自由度正规形理论、扩散理论、能量相位法分析了沿着强共振区穿越弱共振区的同宿轨道, 这种穿越弱共振区的动力学行为形成了多脉冲同宿跳跃轨道. 同时, Haller 利用上述理论研究成果分析了三自由度旋转圆盘系统的同宿分岔树. 1998 年, Haller^[80] 综合利用能量相位法、正规双曲不变流形摄动理论、拓扑学中的叶状结构理论、Fenichel 正规形理论以及 Li 等^[34-35] 提出的 $2(M+1)$ 维 Melnikov 理论, 构造了多模态截断非线性 Schrödinger 方程的多脉冲解, 证明了多脉冲同宿轨道、多脉冲异宿轨道都是 Shilnikov 型多脉冲轨道. 此外, Haller 还把能量相位法推广到任意高维非线性系统中, 并且利用推广后的能量相位法来研究偏微分方程的多脉冲混沌动力学. 1999 年, Haller^[81] 综合了无穷维 Fenichel 几何奇异摄动理论和无穷维 Poincaré 映射, 改进了能量相位法的能量准则, 修正了能量函数, 使其可以估计多脉冲跳跃轨道长时间的能量变化, 并用该方法研究了周期激励作用下有阻尼的非线性 Schrödinger 方程多脉冲 Shilnikov 型轨道. 同年, Haller 等^[82] 利用能量相位法研究了周期激励作用下两个耦合非线性 Schrödinger 方程的 Shilnikov 型多脉冲轨道. Haller^[83] 总结了有关能量相位法方面的研究

成果, 撰写了关于能量相位法的专著, 系统证明和阐述了用于研究高维和无限维非线性系统多脉冲混沌动力学的能量相位法.

与广义 Melnikov 方法相比, 能量相位法易于理解, 横截零点和开折条件的计算相对简单, 所以能量相位法很快就被扩展到研究实际工程中多脉冲混沌动力学问题. 2002 年, Malhotra 等^[84] 利用能量相位法研究了参数激励作用下非对称柔性旋转圆盘的全局动力学. 他们建立了旋转圆盘的运动控制方程, 利用耗散系统的能量相位法分析了扰动非线性系统的多脉冲同宿轨道和混沌动力学, 同时还研究了阻尼、激励和非对称性等参数对系统出现复杂动力学的影响, 解释了多脉冲混沌现象的物理机理, 研究结果表明多脉冲轨道连接旋转圆盘上的不同节点. 2005 年, McDonald 等^[85] 综合运用高维 Melnikov 方法、Shilnikov 理论和能量相位法研究了脉动输流管 0:1 内共振情形下的全局动力学, 分析了能量由高频模态向低频模态转化的动力学机理.

国内专家和学者对能量相位理论的发展和扩展也作出了重要贡献, 并且取得了一些研究成果. 2005 年, Yao 等^[86] 改进了能量相位法, 并利用耗散系统的能量相位法研究了非线性非平面运动悬臂梁的多脉冲异宿轨道和混沌动力学. Zhang 等^[87-88] 利用能量相位法研究了参数激励作用下黏弹性传动带的多脉冲同宿轨道、多脉冲异宿分岔和混沌动力学. 2007 年, Yao 等^[89] 利用能量相位法研究了参数激励与外激励联合作用下四边简支矩形薄板的多脉冲异宿分岔和混沌动力学. 2008 年, Zhang 和 Yao^[69] 总结比较了能量相位法与广义 Melnikov 方法, 分析了两种理论的联系和区别, 并同时利用这两种方法研究了非线性非平面运动悬臂梁的同宿分岔和多脉冲混沌动力学. 2009 年, Zhang 等^[90] 把能量相位理论推广到六维自治非线性系统中, 并利用该方法研究了复合层合压电矩形薄板的混沌动力学. 2010 年, Zhang 等^[91] 利用能量相位法研究了功能梯度矩形薄板 1:1 内共振情形下的多脉冲混沌动力学. Yu 等^[92-93] 利用 Haller 和 Wiggins 提出的能量相位法分别研究了两自由度旋转系统和旋转薄圆盘的多脉冲同宿轨道和同宿分岔树.

3.2 能量相位方法发展和现状小结

1993 年, Haller 和 Wiggins^[74] 首先提出了能量相位准则, 初步建立了能量相位理论, 直到 1995

年, Haller 和 Wiggins [76] 建立了能量相位法完整的理论体系. 因此, 能量相位法的提出和发展是伴随着 Melnikov 理论的扩展, 所以, 两种理论有着内在的必然联系.

虽然 Melnikov 理论有多种不同的表述形式, 但是每种表述形式的关键都是重新定义 Melnikov 函数, Melnikov 函数的几何意义就是用来度量稳定流形与不稳定流形之间的距离, 1963 年, 当 Melnikov [1] 提出该方法时, 主要为了研究三维天体轨道问题, 所研究的动力学模型是保守系统, 后来, Melnikov 理论不断发展, 但是理论研究的主要对象是完全可积 Hamilton 系统、近可积 Hamilton 系统等. 因此, Melnikov 函数与 Hamilton 函数有关, Melnikov 函数不仅是距离度量函数, 还是能量函数. Melnikov 函数是低阶能量差分函数, 所以, Haller 和 Wiggins 就用能量差分函数代替了 Melnikov 函数, 提出了判定系统混沌运动的能量准则. 但是这样就产生了一个问题, 由于 Melnikov 函数和能量差分函数不同阶, 那么所研究的流形必然不一样, Melnikov 理论所研究的流形是双曲流形, 为了解决这个问题, Haller 和 Wiggins 引入了作动角变量, 使局部慢流形成为双曲流形, 这样就建立了判定系统混沌运动的相位准则. 能量准则和相位准则结合起来, 就构成了能量相位理论的基本框架, 在后续的发展中, Haller 和 Wiggins 又不断地引入多种摄动理论、扩散理论、规范形理论等, 逐步地形成了完整的理论体系.

与 Melnikov 理论相比, 虽然能量相位理论提出和发展的历史较短, 但同样也经历了 3 个发展阶段. 第一个阶段是能量相位理论创立和形成期, 从 1993 年 Haller 和 Wiggins 提出能量相位准则, 到 1995 年形成较为完整的能量相位理论, 虽然时间不长, 但是却开辟了非线性动力学全局摄动分析的新方向——多脉冲混沌动力学的研究, 文献 [75] 是这期间代表性论文之一. 能量相位理论发展的第二阶段是从 1996 年至 1999 年, 四维自治非线性系统的能量相位理论开始向高于四维的更高维非线性动力系统推广, 这个阶段的主要特点是能量相位理论不断与其他理论相结合, 不断吸收全局摄动分析中最新的研究成果, 具体表现在引入了 Fenichel 正规形理论、改进后的 Arnold 扩散理论、叶状结构理论、Fenichel 几何奇异摄动理论、无穷维 Poincaré 映射等, 在向无限维非线性动力系统推广能量相位理论时, 借鉴了同期 Li 等 [34-35] 的最新研究成果, 即 $2(M+1)$ 维 Melnikov 理论, 能

量相位理论的研究对象逐渐从常微分方程向偏微分方程过渡. 能量相位理论发展的第三阶段就是从 21 世纪初至今, 开始利用能量相位理论研究实际工程中的科学问题. 与广义 Melnikov 方法相比, 能量相位理论易于理解, 而且该理论给每一个脉冲轨道都定义了相应的能量函数, 能够更形象地刻画多脉冲轨道的几何结构, 所以它被推广应用到工程领域的步伐比广义 Melnikov 方法要快, 这期间代表性论文是 Malhotra 等 [84-85] 的研究成果. 在这一阶段, 国内学者 Zhang 和 Yao [86-89] 对能量相位理论的发展也作出了贡献. Haller 和 Wiggins 提出的能量相位理论在计算能量差分函数时, 所使用的数学变换改变了相空间的几何结构, Zhang 和 Yao 改进了计算能量差分函数的方法, 避免了拓扑结构不等价的问题. 前期能量相位理论在高于四维的高维非线性动力系统中的应用成果仅限于理论研究, Zhang 等 [90] 把能量相位理论推广到具有实际工程背景的六维非线性系统中. 能量相位理论虽然在研究多脉冲混沌动力学方面取得了一些进展, 但是在向高维非自治非线性动力系统推广时, 却受到了许多限制.

3.3 能量相位法与广义 Melnikov 方法的比较分析

能量相位法和广义 Melnikov 方法是研究多脉冲混沌动力学的两种全局摄动方法, 能量相位法的提出要早于广义 Melnikov 方法. Haller 和 Wiggins [74] 于 1993 年初步建立能量相位准则, 1995 年完善了能量相位法 [76]. Kaper 和 Kovacic [67] 于 1996 年提出了广义 Melnikov 方法的基本理论框架, 1998 年 Camassa 等 [68] 对该理论体系给出了严谨地证明.

虽然能量相位法的思想来自于 Melnikov 理论, 但是它是最早开始研究多脉冲混沌动力学的全局解析摄动方法, 因此, 广义 Melnikov 方法的提出和发展借鉴了能量相位法, 所以两种全局摄动方法在分析多脉冲混沌动力学方面, 有内在必然联系, 但又有区别. 能量相位理论的核心思想就是每一个脉冲轨道都有一个能量函数, 在四维相空间中每一个脉冲轨道都有两部分组成, 一部分是脉冲跳跃部分, 它是快变流形, 分布在二维扰动相空间之外; 另一部分是非脉冲跳跃部分, 它是慢变流形, 分布在二维扰动相空间上. 能量差分函数是研究每一个脉冲跳跃所消耗的能量, 因此, 能量相位理论所研究的对象是脉冲跳跃部分; 而广义 Melnikov 方法的研究对象则是分布在二维扰动相空间

上的慢变流形. 所以, 能量相位法和广义 Melnikov 方法分别研究了脉冲轨道的快变流形和慢变流形. 但是这两种理论又有联系, 在四维相空间中, 脉冲轨道张成奇异横截面, 奇异横截面是一种复杂的流形结构, 它包含了脉冲轨道的全部信息, 但是如果以奇异横截面作为研究对象, 很难定义稳定流形与不稳定流形之间的距离; 同时也很难定义能量准则和相位准则. 因此, 能量相位法和广义 Melnikov 方法分别研究了多脉冲轨道的不同部分.

能量相位法和广义 Melnikov 方法在发展和推广的过程中, 各自遇到了不同的困难. Haller 和 Wiggins 建立的能量相位准则更容易被工程科学理解和接受, 所以在研究工程科学多脉冲混沌动力学方面, 取得了一些进展, 但是由于 Haller 和 Wiggins 是首先估计了脉冲跳跃时间的数量级, 然后再建立相位准则, 因此, 能量相位法在研究自治非线性系统多脉冲混沌动力学方面取得了一些研究成果, 但是在向非自治非线性系统推广时, 却遇到了很大困难.

广义 Melnikov 方法研究的内容比较广泛, 即能研究高维自治非线性系统的混沌动力学, 也能研究高维非自治非线性系统的混沌动力学; 即能研究共振情形的多脉冲轨道, 也能研究非共振情形的多脉冲轨道. 广义 Melnikov 方法的关键思想就是计算多脉冲轨道的相位漂移角, 共振情形下的相位漂移角计算相对简单; 但是, 非共振情形下的相位漂移角计算则相当复杂. 另外, 验证广义 Melnikov 函数的横截条件和开折条件非常困难, 解释和描述流形之间的几何关系非常繁琐, 不易理解. 因此, 广义 Melnikov 方法的推广和应用就受到了很大限制.

除了利用能量相位法和广义 Melnikov 方法研究高维非线性系统的多脉冲混沌动力学外, 数值方法也是一种研究多脉冲混沌动力学的有效方法. Feo^[94-95] 利用数值方法研究了两类三维非线性系统的多脉冲 Shilnikov 型奇怪吸引子. Zhang 和 Yao 等^[96] 利用数值方法研究了变刚度主动电磁轴承的多脉冲混沌动力学.

4 能量相位法简介

能量相位法是由 Haller 和 Wiggins^[74-83] 发展的一种全局摄动分析方法, 根据所分析的系统, 能量相位法又分为完全可积 Hamilton 系统的能量相位法和近可积 Hamilton 系统的能量相位法. 由于实际工程中, 遇到的大量模型都是带有耗散项, 所

以我们利用能量相位法分析问题, 都是应用含有耗散项的近可积 Hamilton 系统的能量相位法. 因此, 在本节里, 我们简要介绍近可积 Hamilton 系统的能量相位法.

近可积 Hamilton 系统的能量相位法是研究两个自由度近可积系统慢流形的多脉冲轨道的全局摄动方法, 我们考虑一个四维近可积 Hamilton 系统, 形式如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}D_x H_0(\mathbf{x}, I) + \varepsilon \mathbf{J}D_x H_1(\mathbf{x}, I, \gamma, \varepsilon) + \varepsilon g^x(\mathbf{x}, I, \gamma, \mu, \varepsilon) \quad (1a)$$

$$\dot{I} = -\varepsilon D_\gamma H_1(\mathbf{x}, I, \gamma, \varepsilon) + \varepsilon g^I(\mathbf{x}, I, \gamma, \mu, \varepsilon) \quad (1b)$$

$$\dot{\gamma} = D_I H_0(\mathbf{x}, I) + \varepsilon D_I H_1(\mathbf{x}, I, \gamma, \mu, \varepsilon) + \varepsilon g^\gamma(\mathbf{x}, I, \gamma, \mu, \varepsilon) \quad (1c)$$

系统 (1) 定义在四维相空间 $P = R^2 \times R \times S^1$ 上, D_x , D_I 和 D_γ 分别表示对 \mathbf{x} , I 和 γ 的偏导数, H_0 是 Hamilton 函数, H_1 是 Hamilton 扰动, g^x , g^I 和 g^γ 是 C^r 光滑扰动项, $0 < \varepsilon \ll 1$ 是小扰动参数.

方程 (1) 中的矩阵 \mathbf{J} 的表达式为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

系统 (1) 有一个光滑 C^{r+1} ($r \geq 3$) Hamilton 函数 $H = H_0 + \varepsilon H_1$, C^r 光滑函数 g^x , g^I 和 g^γ 是依赖参数 μ 的一般耗散项或激励项, 这里 μ 是参数向量场, $\mu \in R^P$.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 就可以得到系统 (1) 的未扰动方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}D_x H_0(\mathbf{x}, I) \quad (3a)$$

$$\dot{I} = 0 \quad (3b)$$

$$\dot{\gamma} = D_I H_0(\mathbf{x}, I) \quad (3c)$$

这是一个完全可积 Hamilton 系统, 有两个积分函数 $H_0(\mathbf{x}, I)$ 和 I . 由于 $\dot{I} = 0$, 所以方程 (3a) 中的变量 I 是作为一个参数出现, 因此方程 (3a) 可以解耦, 解耦后的方程是一个依赖参数 I 的单自由度 Hamilton 系统, 为了说明 (3a) 的相空间结构, 引入如下假设:

假设 4.1 当 $\varepsilon = 0$ 时, 存在 $I_1, I_2 \in R$, $I_1 < I_2$, 对一任意 $I \in [I_1, I_2]$, 方程 (3a) 有两个双曲奇点 $\bar{x}_j(I)$ ($j = 1, 2$), 连接双曲奇点的是两条异宿轨线 $x^{h+}(t, I)$ 和 $x^{h-}(t, I)$.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 对一任意 $I \in [I_1, I_2]$, $\bar{x}_j(I) \times S^1$ 表示双曲奇点的直角坐标与变量 γ 的不变圆的叉

积, 考虑系统 (3) 的一个两维不变流形 M , 其形式如下

$$M = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{x}, I, \phi) \in P \mid \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_j(I) \\ I \in [I_1, I_2], \gamma \in S^1 \end{array} \right\} \quad (4)$$

显而易见, 在假设 4.1 下, M 有两个三维异宿流形 W_0^+ 和 W_0^- , 每一个流形都包括稳定流形 $W^s(M)$ 和不稳定流形 $W^u(M)$, 流形 $M, W^s(M)$ 和 $W^u(M)$ 在四维相空间中的几何结构如图 1 所示.

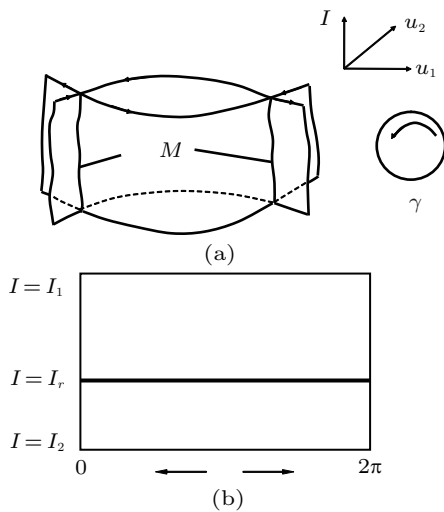


图 1 四维相空间异宿流形的几何结构

方程 (3) 在流形 W_0^\pm 的解可以写成式 (5)

$$X_0^\pm(t, I, \gamma_0) = \left(x^{h^\pm}(t, I), I_1 < I < I_2, \int_0^t D_I H_0(x^{h^\pm}(\tau, I), I) d\tau + \gamma_0 \right) \quad (5)$$

上述解是流形 M 上的异宿周期解, 它们满足 $I \equiv I_0, x \equiv \bar{x}_j(I_0)$ 和 $\dot{\gamma} = D_I H(\bar{x}_j(I_0), I_0) \neq 0$ 这 3 个条件, 而且当 $\varepsilon = 0$ 时, 它们的二维稳定流形和不稳定流形不重合. 考虑流形 M 上的一个周期轨道会衰减到零, 那么就会产生一个鞍点环, 于是有假设 4.2.

假设 4.2 存在一个 $I_r \in (I_1, I_2)$, 满足下面条件

$$D_I H_0(\bar{x}_j(I_r), I_r) = 0 \quad (6)$$

$$m(I_r) = D_I^2 [H_0(\bar{x}_j(I), I)]|_{I=I_r} \neq 0 \quad (7)$$

从方程 (6) 可以看出当 $I = I_r$ 时, 系统会出现共振, 这里的 I_r 是共振振幅, I_r 所对应的点是共振点. 当 $I = I_r$ 时, 流形 M 上的圆环 C_r 可以看成退

化解或共振周期解. 所以, 共振圆环 C_r 用如下形式来表示

$$C_r = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{x}, I, \gamma) \in P \mid \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_j(I) \\ I_r \in [I_1, I_2], \gamma \in S^1 \end{array} \right\} \quad (8)$$

从上面的阐述可以看到, 在流形 W_0^\pm 上, $I = I_r$ 的解连接着共振圆环 C_r 的奇点. 两个相互连接的奇点 x 坐标和 I 坐标都相同, 但 γ 坐标不同, γ 坐标沿着异宿轨道有一个变化量 $\Delta\gamma$, 如图 2 所示.

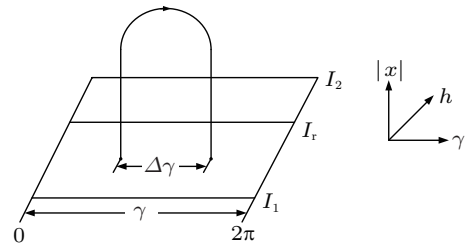


图 2 异宿轨道

利用式 (5) 可以写成如下形式

$$\Delta\gamma^\pm = \gamma^\pm(+\infty, I_r) - \gamma^\pm(-\infty, I_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_I H_0(x^{h^\pm}(t, I_r), I) dt \quad (9)$$

这里的符号 \pm 取决于连接轨道的两个异宿流形.

如果 $\Delta\gamma^\pm$ 是 2π 的整数倍, C_r 上的点是通过 W_0^\pm 上的异宿轨道来连接; 如果 $\Delta\gamma^\pm$ 不是 2π 的整数倍, C_r 上的点是通过 W_0^\pm 上的不同奇点之间的异宿轨道来连接. 不论是哪一种情况, 这些连接轨道都在二维异宿流形 $W_0^+(C_r)$ 和 $W_0^-(C_r)$ 上. 在模态相互作用的问题中, 经常会出现这种未扰动几何结构.

第三个假设是未扰动方程 (3) 的结构对称性假设, 即相位漂移角 $\Delta\gamma^+$ 和 $\Delta\gamma^-$ 相等都等于 $\Delta\gamma$.

假设 4.3 相位漂移角满足下面的对称关系

$$\Delta\gamma = \gamma(+\infty, I_r) - \gamma(-\infty, I_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_I H_0(x^{h^+}(t, I_r), I_r) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} D_I H_0(x^{h^-}(t, I_r), I_r) dt \quad (10)$$

由于不变流形 M 是正则双曲流形, 也就是说流形上的法向延伸率比切向延伸率占优势, 因此在弱扰动下, 根据一些经典理论, 流形 M 仍然存在. 这就意味着在充分小扰动 ($\varepsilon > 0$) 下, 流形 M 摄动成为方程 (1) 的 C^r 不变流形 M_ε , 流形 M 和流形 M_ε 的距离数量级是 $O(\varepsilon)$, 流形 M_ε 仍然有

稳定流形 $W^s(M_\varepsilon)$ 和不稳定流形 $W^u(M_\varepsilon)$, 只是它们已经破裂. 人们所关心的是: 在 $I = I_r$ 的邻域内流形 M_ε 上存在什么样的运动? $W^s(M_\varepsilon)$ 和 $W^u(M_\varepsilon)$ 上的轨线有怎样的联系? 为了把这些问题都集中在 $I = I_r$ 的共振区内来讨论, 引入如下坐标变换

$$I = I_r + \sqrt{\varepsilon}h, \quad h \in [-h_0, h_0] \quad (11a)$$

$$\gamma = \gamma \quad (11b)$$

这里 $h_0 > 0$.

变换方程 (11) 把相空间 P 的共振区放大为

$$P_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(x, I, \gamma) \in P \mid I \in [I_r - h_0\sqrt{\varepsilon}, I_r + h_0\sqrt{\varepsilon}]\} \quad (12)$$

这时发现方程 (1) 的轨线双倍趋近于不变流形 M_ε 的共振区

$$M_\varepsilon^R = M_\varepsilon \cap P_{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0 \quad (13)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (1) 中的 $g^x = g^I = g^\gamma \equiv 0$, 这种情况是扰动部分为 Hamilton 扰动. 这时, 扰动系统的解仍然在能量平面 $E_\varepsilon(H)$ 内

$$E_\varepsilon(H) = \{(x, I, \gamma) \in P \mid H(x, I, \gamma, \varepsilon) = H\} \quad (14)$$

用 ε 次幂的泰勒展开, 可以看到流形 M_ε^R ($\varepsilon > 0$) 上的解趋近于式 (15) 中的 Hamilton 函数的等值线

$$\hat{H}(h, \gamma) = \frac{1}{2}m(I_r)h^2 + H_1(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, 0) \quad (15)$$

这里的 $m(I_r)$ 已经在假设 4.2 中定义过了.

从上面的分析可以看出, M_ε^R 上的动力学行为是由下面的单自由度系统所决定

$$\dot{h} = -\sqrt{\varepsilon}D_\gamma \hat{H}(h, \gamma) + O(\varepsilon) \quad (16a)$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\varepsilon}D_h \hat{H}(h, \gamma) + O(\varepsilon) \quad (16b)$$

这个系统的时间尺度数量级是 $O(\sqrt{\varepsilon})$, 这说明了 M_ε^R 是慢流形. 对于一个任意正整数 n , 定义 n 阶能量差分函数 $\Delta^n \hat{H}$ 如下

$$\begin{aligned} \Delta^n \hat{H}(\gamma) &= \hat{H}(h, \gamma + n\Delta\gamma) - \hat{H}(h, \gamma) \\ &= H_1(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma + n\Delta\gamma, 0) - \\ &\quad H_1(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, 0) \end{aligned} \quad (17)$$

这里的 $\Delta^n \hat{H}$ 既包括扰动系统的能量信息又包括未扰动系统的相位信息, 而且 $\Delta^n \hat{H}$ 粗略地度量了

M_ε^R 上原来被异宿轨道所连接的点之间的低阶能量差.

现在来看更一般的情况, 即系统 (1) 中耗散项 $g^x = g^I = g^\gamma \neq 0$, 这样就把扰动部分为纯 Hamilton 系统扩展到一般情况. 处理这种情况有两种方法, 一种方法是假设耗散扰动比 Hamilton 扰动小, 这样就把纯 Hamilton 系统的结果推广到一般情况. 在这个假设条件下, 由 Hamilton 扰动所决定的 M_ε^R 上的 Shilnikov 型多脉冲同宿轨道仍然存在, 但是根据流形 M_ε^R 上的弱耗散动力学, 这些轨道的渐近性却发生了变化, 在本节里, 我们不研究这种弱耗散扰动, 而是采用第二种方法来分析耗散项不等于零的一般情况, 即考虑耗散扰动与 Hamilton 扰动 H_1 是同阶的情况.

简单的泰勒展开后, 慢流形 M_ε^R 上的动力学可以近似为下面的二维耗散系统

$$\dot{h} = -D_\gamma \hat{H}_D(h, \gamma) + \sqrt{\varepsilon}D_I g^I(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, 0)h \quad (18a)$$

$$\dot{\gamma} = D_h \hat{H}_D(h, \gamma) + \sqrt{\varepsilon}g^\gamma(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, 0) \quad (18b)$$

其中函数 \hat{H}_D 的表达式如下

$$\hat{H}_D(h, \gamma) = \hat{H}(h, \gamma) - \int_0^\gamma g_I(\bar{x}_j(I_r), I_r, u, 0)du \quad (19)$$

式 (15) 中定义了 \hat{H} , 当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程 (18) 是一个未扰动 Hamilton 系统, 未扰动 Hamilton 系统的相图如图 3(a) 所示; 当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 方程 (18) 是一个扰动 Hamilton 系统, 扰动 Hamilton 系统的相图如图 3(b) 所示.

当 $\varepsilon > 0$, 要想让系统 (18) 成为真正的耗散系统, 那么还必须满足假设 4.4 的非退化条件

假设 4.4

$$D_I g_I(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma; 0) + D_\gamma g_\gamma(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma; 0) \neq 0 \quad (20)$$

在此条件下, 系统 (18) 以 $O(\varepsilon)$ 精度近似趋近于慢流形 M_ε^R 上的轨线. 但是, 我们注意到当 $\varepsilon > 0$ 时, 系统 (18) 可能没有轨线, 而只有孤立的奇点. 这是因为 Hamilton 扰动 M_ε^R 通常是流出不变流形或者流入不变流形, 即 M_ε^R 只能是一个时间方向的不变流形.

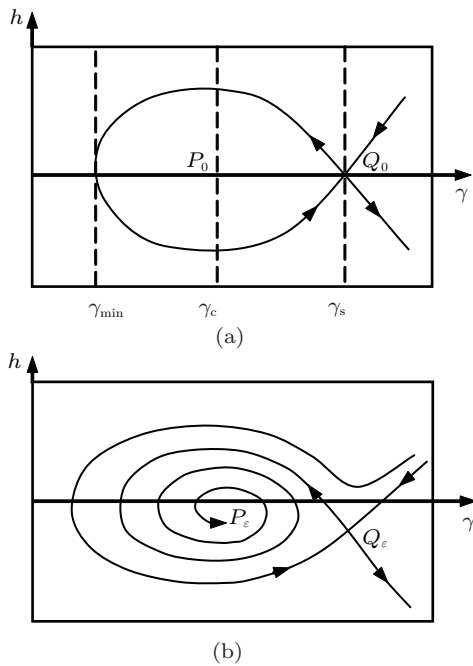


图3 正规双曲流形的动力学特性

为了使公式简单明晰和更好的应用, 提出假设 4.5.

假设 4.5 当 $\varepsilon = 0$ 时, $t \in R$, 对于方程 (1) 的任意两个未扰动解 $X_0^+(t, I_r, \gamma_0^+)$ 和 $X_0^-(t, I_r, \gamma_0^-)$, 有 $X_0^+(t, I_r, \gamma_0^+) \in W_0^+$, $X_0^-(t, I_r, \gamma_0^-) \in W_0^-$, 并且

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} X_0^+(t, I_r, \gamma_0^+) = \lim_{t \rightarrow -\infty} X_0^-(t, I_r, \gamma_0^-) \quad (21)$$

那么如下关系式成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle DH_0, g \rangle_{X_0^+(t, I_r, \gamma_0^+)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle DH_0, g \rangle_{X_0^-(t, I_r, \gamma_0^-)} dt \quad (22)$$

用含有耗散项的能量相位法分析问题, 一般有以下几个步骤:

(1) 分析方程 (3a) 的动力学特性, 计算出一对异宿轨道的表达式; 根据式 (10) 求出相位漂移角 $\Delta\gamma$.

(2) 计算单自由度系统 (18), 确定慢流形 M_ε^R 的动力学, 按照式 (19) 的定义来计算函数 $\hat{H}_D(h, \gamma)$

(3) 计算任意正整数 n 所对应的 n 阶能量差分函数 $\Delta^n \hat{H}_D$, 计算公式如下

$$\Delta^n \hat{H}_D(\gamma) = \Delta^n \hat{H}(\gamma) - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \langle DH_0, g \rangle |_{X^i(t)} dt \quad (23)$$

其中 $\Delta^n \hat{H}$ 是 Hamilton 扰动情形下的式 (17) 所定义的能量差分函数, $X^i(t)$ 表示 $\varepsilon = 0$ 时方程 (1) 的任意一个未扰动异宿解, $X^i(t)$ 连接点 $(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma + (i-1)\Delta\gamma)$ 和点 $(\bar{x}_{j+1}(I_r), I_r, \gamma + i\Delta\gamma)$. 计算能量差分函数 (23) 的零点, 目的是为了确定系统 (18) 的脉冲个数.

(4) $\Delta^n \hat{H}_D$ 的零点集合与 Hamilton 函数 \hat{H}_D 的任意稳定轨道 $\hat{\gamma}$ 的脉冲个数 $N(\hat{\gamma})$ 有关系. 如果能够直接求出脉冲个数的定义表达式, 这就表明在慢流形 M_ε^R 上存在横截的第 $N(\hat{\gamma})$ 个脉冲的同宿轨道, 这条同宿轨道趋近于慢轨道 $\hat{\gamma}$; 如果 $N(\hat{\gamma})$ 的表达式含有参数, 不能直接求出, 那就计算共振脉冲个数 $N_r(\hat{\gamma})$, 这表明在慢流形 M_ε^R 上存在非横截的第 $N_r(\hat{\gamma})$ 个脉冲的同宿轨道, 这条同宿轨道趋近于慢轨道 $\hat{\gamma}$.

(5) 描述多脉冲 Shilnikov 型轨道的形状, 确定脉冲序列.

(6) 证明慢流形 M_ε^R 的 N 脉冲 Shilnikov 型同宿轨道的存在性.

5 广义 Melnikov 方法简介

广义 Melnikov 方法是 Kovacic 等 [67-68] 提出的分析多脉冲混沌的另外一种解析方法. 它应用的范围较广, 利用它可以分析系统共振情形下的多脉冲混沌运动, 也可以研究系统非共振情形下的多脉冲混沌运动, 既适用于完全可积系统, 又适用于近可积系统. 但是, 由于计算多脉冲 Melnikov 函数复杂, 以及证明广义 Melnikov 方法的开折条件很困难, 因此限制了广义 Melnikov 方法在工程问题中的应用. 本节我们简要介绍近可积系统共振情形下的广义 Melnikov 方法.

考虑如下一个四维非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}D_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}, I) + \varepsilon \mathbf{g}^x(\mathbf{x}, I, \gamma, \mu, \varepsilon) \quad (24a)$$

$$\dot{I} = \varepsilon g^I(\mathbf{x}, I, \gamma, \mu, \varepsilon) \quad (24b)$$

$$\dot{\gamma} = \Omega(\mathbf{x}, I) + \varepsilon g^\gamma(\mathbf{x}, I, \gamma, \mu, \varepsilon) \quad (24c)$$

这里 $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$, $I \in R$, $\gamma \in S^1$, $H(\mathbf{x}, I)$ 是自变量为 \mathbf{x} 和 I 的 Hamilton 函数, $\mu \in R$ 是一个实参数, $\varepsilon \ll 1$ 是一个小参数, $D_{\mathbf{x}}$ 表示对 \mathbf{x} 的偏导数, D_I 是对 I 的偏导数, 矩阵 $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 R^n 上的欧氏内积, n 是参数向量场的维数, $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数和矩阵范数.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 就得到系统 (24) 的未扰动方程

$$\dot{x} = JD_x H(x, I) \tag{25a}$$

$$\dot{I} = 0 \tag{25b}$$

$$\dot{\gamma} = \Omega(x, I) \tag{25c}$$

方程 (25a) 是关于变量 x 的 Hamilton 系统族, 与变量 γ 无关. 方程 (25c) 可以积分求解. 在文献 [68] 中, 关于未扰动系统 (25), Kovacic 等给出两个假设条件, 第一个假设条件是关于函数光滑性的条件.

假设 5.1 未扰动 Hamilton 函数 $H(x, I)$ 是一个实解析函数.

第二个假设条件是介绍在方程 (25) 的相空间中存在异宿轨道.

假设 5.2 在区间 $I_1 < I < I_2$ 上的每一个 I , 有某一整数 k , 方程 (25a) 有 $k + 1$ 个双曲奇点 $x = \bar{x}_j(I), (j = 0, 1, \dots, k)$, 奇点随 I 连续变化, 不稳定流形和稳定流形分别是 $W^u(\bar{x}_j(I))$ 和 $W^s(\bar{x}_{j+1}(I))$, 它们沿着异宿轨道 $W_j(I)$ 横截相交, 奇点 $x = \bar{x}_j(I)$ 和 $x = \bar{x}_{j+1}(I) (j = 0, 1, \dots, k)$ 连接异宿轨道.

根据奇点 $x = \bar{x}_j(I)$ 的双曲特性, 则 Jacobi 矩阵 $JD_x^2 H(\bar{x}_j(I), I)$ 必须有一对非零实特征根, 即 $\pm\lambda(I)$. 而且, 根据解析函数的隐函数定理, 向量 $\bar{x}_j(I)$ 依赖变量 I 而变化. 由于方程 (25a) 是自治系统, 所以异宿轨道 $W_j(I)$ 上的所有解有表达式 $x_j^h(t - t_0, I)$, 设 $t_0 = 0$, 当变量时间 t 变化时, 就可以得到流形 $W_j(I)$ 上的参数化轨道.

在系统 (25) 的三维 (x, I, γ) 相空间里, 奇点 $\bar{x}_j(I)$ 的参数化周期轨道 O_j^I

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}_j(I), \quad I = I, \\ \gamma &= \Omega(\bar{x}_j(I), I)t + \gamma_0 \equiv \omega_j(I)t + \gamma_0 \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

或

$$O_j^I = \{(x, I, \gamma) \mid x = \bar{x}_j, I, \Omega(\bar{x}_j(I), I)t + \gamma_0\} \tag{27}$$

周期轨道有二维稳定流形 $W^s(O_{j+1}^I)$ 和不稳定流形 $W^u(O_j^I)$, 它们是奇点 $x = \bar{x}_{j+1}(I)$ 的稳定流形 $W^s(\bar{x}_{j+1}(I))$ 和奇点 $x = \bar{x}_j(I)$ 不稳定流形 $W^u(\bar{x}_j(I))$ 与相位角 γ 的叉积. 异宿流形 $W_j(I)$ 的存在意味着流形 $W^s(O_{j+1}^I)$ 和 $W^u(O_j^I)$ 沿着二维异宿流形 $W_j(O_j^I)$ 方向是不重合的.

当 I 遍历 $I_1 < I < I_2$ 时, 取所有轨道 O_j^I 的并集, 就得到一个二维不变环面 M_j , 环面 M_j 有

三维稳定流形 $W^s(M_{j+1})$ 和不稳定流形 $W^u(M_j)$, 它们沿着三维异宿流形 $W_j(M_j)$ 横截相交. 区间 $I_1 < I < I_2$ 上的流形 $W^s(O_{j+1}^I)$, $W^u(O_j^I)$ 和 $W_j(O_j^I)$ 的并集形成了所有的流形, 异宿流形 $W_j(M_j)$ 是由下面的解所确定

$$x = x_j^h(t, I) \tag{28a}$$

$$I = I \tag{28b}$$

$$\gamma = \gamma_j^h(t, I) + \gamma_0 = \int_0^t \Omega(x_j^h(\tau, I), I) d\tau + \gamma_0 \tag{28c}$$

上面的解还可以写成另外一种形式

$$X_j(t, I, \gamma_0) = \left(x_j^h(t, I), I_1 < I < I_2, \int_0^t \Omega(x_j^h(\tau, I), I) d\tau + \gamma_0 \right) \tag{29}$$

异宿流形 $W_j(M_j)$ 可以通过解下面的方程而得到

$$\begin{aligned} H(x, I) - H(\bar{x}_{j-1}(I), I) &= \\ H(x, I) - H(\bar{x}_j(I), I) &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

由于连续性, 当 $j = 0, 1, \dots, k$ 时, 所有的 $H(\bar{x}_j(I), I)$ 都相等, 这种数学表达式包含了同宿轨道和异宿轨道两种情况.

系统 (25) 的相位漂移角可以用下面的公式计算

$$\Delta\gamma(I) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\Omega(x_j^h(\tau, I), I) - \Omega(\bar{x}_j(I), I)] d\tau \tag{31}$$

引入充分小的正数 ε 后, 关于双曲结构的一些结论仍然成立. 尤其是关于未扰动系统的一些结论, 环面 M_j 仍然与局部稳定流形 $W_{loc}^s(M_j)$ 和局部不稳定流形 $W_{loc}^u(M_j)$ 连接在一起, 即稳定流形 $W^s(M_j)$ 和不稳定流形 $W^u(M_j)$ 的连接部分包含在 M_j 的某一充分小邻域内, 并且沿着 M_j 横截相交. 这个结论保证了距离环面 M_j 为 $O(\varepsilon)$ 处存在唯一局部不变环面 M_j^ε 以及 M_j^ε 的局部稳定流形 $W_{loc}^s(M_j^\varepsilon)$ 、局部不稳定流形 $W_{loc}^u(M_j^\varepsilon)$, 这里局部流形 $W_{loc}^s(M_j^\varepsilon)$ 和 $W_{loc}^u(M_j^\varepsilon)$ 与局部流形 $W_{loc}^s(M_j)$ 和 $W_{loc}^u(M_j)$ 的距离的数量级也是 $O(\varepsilon)$, 对应的流形切空间距离的数量级也是 $O(\varepsilon)$. 环面 M_j^ε 的局部不变性反映了 M_j^ε 可以通过边界泄漏相点, 同时还反映了 M_j^ε 具有唯一性. 因为环面 M_j^ε 一定包含所有不变集, 所以保证环面 M_j^ε 的唯一性并不困难, 环面 M_j^ε 的唯一性主要是保证同宿轨道和异宿轨道的唯一性. 当时间 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, 在局部流形 $W_{loc}^s(M_j^\varepsilon)$ 和 $W_{loc}^u(M_j^\varepsilon)$ 上延拓初始条件, 就可以得到环面 M_j^ε 的全局稳定流形 $W^s(M_j^\varepsilon)$ 和全局不稳

定流形 $W^u(M_j^\varepsilon)$. 随着 ε 的变化, 环面 M_j^ε 、流形 $W^s(M_j^\varepsilon)$ 和 $W^u(M_j^\varepsilon)$ 可以光滑可变, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 环面 M_j^ε 、流形 $W^s(M_j^\varepsilon)$ 和 $W^u(M_j^\varepsilon)$ 就连续光滑变化到相应的未扰动部分上. 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 光滑函数 $\bar{x}_j^\varepsilon(I, \gamma, \mu, \varepsilon)$ 就成为 $\bar{x}_j^0(I, \gamma, \mu, 0) = \bar{x}_j(I)$, 这样扰动环面 M_j^ε 就可以写成含有变量 I 和 γ 的形式

$$x = \bar{x}_j^\varepsilon(I, \gamma, \mu, \varepsilon) \quad (32)$$

下面引入几个定义. 首先, 给出 1- 脉冲 Melnikov 函数 $M^j(I, \gamma_0, \mu)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) 的一般形式为

$$M^j(I, \gamma_0, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{n}(p_j^h(t)), \mathbf{g}(p_j^h(t), \mu, 0) \rangle dt \quad (33)$$

其中

$$p_j^h(t) = (x_j^h(t, I), I, \gamma_j^h(t, I) + \gamma_0) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(p_j^h(t)) = & (D_x H(x_j^h(t, I), I), D_I H(x_j^h(t, I), I) - \\ & D_I H(\bar{x}_j(I), I), 0) = \\ & (D_x H(x_j^h(t, I), I), D_I H(x_j^h(t, I), I) - \\ & D_I H(\bar{x}_{j+1}(I), I), 0) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & (g^x(x, I, \gamma, \mu, 0), g^I(x, I, \gamma, \mu, 0), \\ & g^\gamma(x, I, \gamma, \mu, 0)) \end{aligned} \quad (36)$$

$p_j^h(t)$ 是未扰动系统 (25) 的异宿轨道 (28), 向量 \mathbf{n} 是异宿流形 $W_j(M_j)$ 的法向量.

其次, 定义未扰动异宿流形 $W_j(I)$ 的法向量 \mathbf{n} 的正负号 σ_j 为

$$\begin{aligned} \sigma_j = & \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle \mathbf{n}(P_j^h(t)), \dot{P}_{j+1}^h(-t) \rangle}{\|D_x H(x_j^h(t, I), I)\| \|D_x H(x_{j+1}^h(-t, I), I)\|} = \\ & \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle D_x H(x_j^h(t, I), I), J D_x H(x_{j+1}^h(-t, I), I) \rangle}{\|D_x H(x_j^h(t, I), I)\| \|D_x H(x_{j+1}^h(-t, I), I)\|} \end{aligned} \quad (37)$$

因此, 如果未扰动异宿流形 $W_j(I)$ 的法向量 \mathbf{n} 所指的方向是环面 M_j 上点 $(\bar{x}_j(I), I, \gamma)$ 的异宿流形 $W_{j+1}(I)$ 上的未扰动流方向, 那么 σ_j 就是正的; 否则, σ_j 就是负的. 由于奇点 $\bar{x}_j(I)$ 的两个流形 $W^s(\bar{x}_j(I))$ 和 $W^u(\bar{x}_j(I))$ 横截相交, 所以 $\sigma_j \neq 0$.

最后, 定义第 k 个脉冲的 Melnikov 函数 $M_k(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu)$ ($k = 1, 2, \dots$) 为

$$M_k(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu) = \sum_{j=0}^{k-1} M^{(j)} \left(I, \sum_{i=1}^j \Delta \gamma_i(I) + \right. \quad (38)$$

$$\left. \Gamma_j(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu) + \gamma_0, \mu \right) \quad (38)$$

这里

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_i(I) = & \int_0^{+\infty} (\Omega(x_{i-1}^h(t), I) - \Omega(\bar{x}_j(I), I)) dt + \\ & \int_{-\infty}^0 (\Omega(x_i^h(t), I) - \Omega(\bar{x}_j(I), I)) dt \end{aligned} \quad (39)$$

$$\Gamma_j(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu) = \sum_{r=1}^j \frac{\omega_r(I)}{\lambda_r(I)} \lg \left| \frac{\varsigma_r(I)}{\varepsilon M_r(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu)} \right| \quad (40)$$

$j = 1, 2, \dots, k-1$, 当 $j = 0$ 时, 脉冲相位总和为零, $\Gamma_0(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu) = 0$, $\omega_r(I) = \Omega(\bar{x}_j(I), I)$.

所以一个脉冲的 Melnikov 函数 $M_1(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu)$ 与式 (33) 中的标准 Melnikov 函数 $M(I, \gamma_0, \mu)$ 是一样的. 函数 $\varsigma_r(I)$ 是根据方程 (25a) 奇点 $x = \bar{x}_j(I)$ 处的 Jacobi 矩阵来定义的, 其形式如下

$$\begin{aligned} \varsigma(I) = & 2(\lambda(I))^2 |A_2(I)| f_+(I) f_-(I) / \\ & \{[(A_2(I))^2 + (\lambda(I) - A_0(I))^2][(A_2(I))^2 + \\ & (\lambda(I) + A_0(I))^2]\}^{1/2} \end{aligned} \quad (41)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} A_0(I) &= D_{x_1} D_{x_2} H(\bar{x}_j(I), I) \\ A_1(I) &= D_{x_1}^2 H(\bar{x}_j(I), I) \\ A_2(I) &= D_{x_2}^2 H(\bar{x}_j(I), I) \\ f_+(I) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda(I)} e^{\lambda(I)t} \|D_x H(x_j^h(t, I), I)\| \\ f_-(I) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\lambda(I)} e^{-\lambda(I)t} \|D_x H(x_j^h(t, I), I)\| \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

注意到如果某一 I 的频率 $\omega_r(I) = \Omega(\bar{x}_j(I), I)$ 等于零, 即如果 I 值对应的周期轨道退化为奇点环, 那么函数 $\Gamma_j(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu)$ 恒等于零.

对于非共振情形的多脉冲 Melnikov 函数有以下一些结论:

定理 5.1 对于某一整数 k , 有一个不依赖 ε 的常数 $B > 0$, 当 $I = \bar{I}$, $\mu = \bar{\mu}$, 对于所有充分小参数 $\varepsilon > 0$, 存在一个函数 $\gamma_0 = \bar{\gamma}_0(\varepsilon)$, 它们满足下面的条件:

(1) k 脉冲 Melnikov 函数在 γ_0 处有一个简单零点, 即 $M_k(\varepsilon, \bar{I}, \bar{\gamma}_0(\varepsilon), \bar{\mu}) = 0$, 并且 $|D_{\gamma_0} M_k(\varepsilon, \bar{I}, \bar{\gamma}_0(\varepsilon), \bar{\mu})| > B$.

(2) 当 $i = 1, 2, \dots, k-1, k > 1$ 时, $M_i(\varepsilon, \bar{I}, \bar{\gamma}_0(\varepsilon), \bar{\mu}) \neq 0$, 如果未扰动异宿流形 $W_j(I)$ 法向量 \mathbf{n} 的符号 σ_j 为正, 则 $M_i(\varepsilon, \bar{I}, \bar{\gamma}_0(\varepsilon), \bar{\mu})$ 为正; 如果 σ_j 为负, 则 $M_i(\varepsilon, \bar{I}, \bar{\gamma}_0(\varepsilon), \bar{\mu})$ 为负.

(3) 当 $i = 1, 2, \dots, k - 1, k > 1$ 时,

$$\left| \left[1 - \lambda_i(\bar{I}) D_{\gamma_0} \lg \prod_{j=1}^i |M_j| \frac{\Omega(\bar{x}_j(\bar{I}), \bar{I})}{\lambda_j(\bar{I})} (\varepsilon, \bar{I}, \bar{\gamma}_0(\varepsilon), \bar{\mu}) \right] / \left[1 - \lambda_i(\bar{I}) D_{\gamma_0} \lg \prod_{j=1}^{i-1} |M_j| \frac{\Omega(\bar{x}_j(\bar{I}), \bar{I})}{\lambda_j(\bar{I})} (\varepsilon, \bar{I}, \bar{\gamma}_0(\varepsilon), \bar{\mu}) \right] \right| > B \quad (43)$$

这里 $\pm \lambda_i(I)$ 是方程 (25) 线性系统奇点 $x = \bar{x}_j(I)$ 处的两个特征根. 当 $i = 1$ 时, 式 (43) 的分母定义为 1.

于是当所有的 I 趋近 \bar{I} , 所有的 μ 趋近 $\bar{\mu}$, 所有的 ε 都充分小时, 则存在二维横截面 $\sum_\varepsilon^\mu(\bar{\gamma}_0)$, 该二维横截面沿着扰动环面 M_k^ε 的稳定流形 $W^s(M_k^\varepsilon)$ 和扰动环面 M_0^ε 的不稳定流形 $W^u(M_0^\varepsilon)$ 方向, 在扰动环面 M_k^ε 与 M_0^ε 相位角距离的数量级为 $O(\varepsilon)$ 处, 稳定流形 $W^s(M_k^\varepsilon)$ 和不稳定流形 $W^u(M_0^\varepsilon)$ 横截相交. 而且在扰动环面 $M_i^\varepsilon (i = 0, \dots, k)$ 的小邻域外, 由相位角

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \hat{\gamma}_0(\varepsilon, I, \mu) + \sum_{i=0}^j \Delta \gamma_j(I) + \\ &I_j(\varepsilon, I, \hat{\gamma}_0(\varepsilon, I, \mu), \mu), \\ j &= 0, 1, \dots, k - 1 \end{aligned} \quad (44)$$

所确定的轨道曲线族 (28) 张成轨道面, 这些轨道面形成并集, 轨道面与横截面 $\sum_\varepsilon^\mu(\bar{\gamma}_0)$ 之间的距离数量级是 $O(\varepsilon)$. 在 $I = \bar{I}, \mu = \bar{\mu}, \hat{\gamma}_0(\varepsilon, \bar{I}, \bar{\mu}) = \bar{\gamma}_0(\varepsilon)$ 的邻域内, 含有三角标记 $(I, \hat{\gamma}_0(\varepsilon, I, \mu), \mu)$ 变量的 Melnikov 函数同样满足方程 $M_k(\varepsilon, I, \hat{\gamma}_0(\varepsilon, I, \mu), \mu) = 0$.

因为计算广义 Melnikov 函数是一个递归的过程, 所以首先要计算第一个脉冲的 Melnikov 函数. 广义 Melnikov 函数依赖小摄动参数 ε , 但是, 这种依赖关系是随着研究问题的具体情况而定, 比较特殊的情形就是共振区域的广义 Melnikov 方法, 这时计算 k 脉冲 Melnikov 函数相对而言就简单一些. 应用定理 5.1 分析共振区域的异宿轨道时, 除了假设 5.1 和假设 5.2, 还应该有如假设

假设 5.3 对于区间上的某一个 $I = I_r \in (I_1, I_2)$, 它的频率 $\omega_j(I) = \Omega(\bar{x}_j(I), I)$ 在 I_r 处有一个简单零点, 即

$$\omega_j(I_r) = \Omega(\bar{x}_j(I_r), I_r) = 0, \quad D_I \omega_j(I_r) \neq 0 \quad (45)$$

从方程 (45) 可以看出当 $I = I_r$ 时, 会出现共振, 这里的 I_r 是共振振幅, I_r 所对应的奇点是共振奇点.

为了集中在 $I = I_r$ 的共振区讨论问题, 引入如下坐标变换

$$I = I_r + \sqrt{\varepsilon} h, \quad h \in [-h_0, h_0] \quad (46a)$$

$$\gamma = \gamma \quad (46b)$$

这里 $h_0 > 0$.

变换 (46) 把相空间 P 的共振区放大为

$$P_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(x, I, \gamma) \in P \mid I \in [I_r - h_0 \sqrt{\varepsilon}, I_r + h_0 \sqrt{\varepsilon}]\} \quad (47)$$

我们发现方程 (47) 的轨线双倍趋近于不变流形 M_j^ε 的近共振区

$$M_\varepsilon^R = M_j^\varepsilon \cap P_{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0 \quad (48)$$

把变换 (46) 代入方程 (24) 的后两个方程, 然后作 $\sqrt{\varepsilon}$ 次幂的 Taylor 展开, 可以得到下面的方程

$$\begin{aligned} h' &= g^I(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, \mu) + \\ &\sqrt{\varepsilon} G(h, \gamma, \mu) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (49a)$$

$$\begin{aligned} \gamma' &= \frac{d}{dI} [\Omega(\bar{x}_j(I_r), I_r)] h + \\ &\sqrt{\varepsilon} F(h, \gamma, \mu) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (49b)$$

这里符号 “ $'$ ” 表示对 $\sqrt{\varepsilon} t$ 求导数, 函数 $G(h, \gamma, \mu)$ 和 $F(h, \gamma, \mu)$ 分别为

$$G(h, \gamma, \mu) = \frac{d}{dI} [g^I(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, \mu)] h \quad (50a)$$

$$\begin{aligned} F(h, \gamma, \mu) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dI^2} [\Omega(\bar{x}_j(I_r), I_r)] h^2 + \\ &D_x \Omega(\bar{x}_j(I_r), I_r) \bar{x}_1(I_r, \gamma, \mu) + \\ &g^\gamma(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, \mu) \end{aligned} \quad (50b)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(I_r, \gamma, \mu) &= [JD_x^2 H(\bar{x}_j(I_r), I_r)]^{-1} \cdot \\ &[g^I(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, \mu) D_I \bar{x}_j(I_r) - \\ &g^x(\bar{x}_j(I_r), I_r, \gamma, \mu)] \end{aligned} \quad (51)$$

在原来的坐标系 (x, I, γ) 中, 应用定理 5.1 可以确定第 k 个脉冲异宿横截面 $\sum_\varepsilon^\mu(\bar{\gamma}_0)$. 注意在这种情况下, 对任意整数 k , 在共振情形 $I = I_r$ 时, k 脉冲 Melnikov 函数表示为

$$\begin{aligned} M_k(\varepsilon, I_r, \gamma_0, \mu) &= \sum_{j=0}^{k-1} M^{(j)}. \\ &\left(I_r, \gamma_0 + \sum_{i=1}^j \Delta \gamma_i(I_r), \mu \right) \end{aligned} \quad (52)$$

根据式 (52), 可以发现当 $I = I_r$ 时, 第一个脉冲的 Melnikov 函数 $M(I_r, \gamma_0, \mu)$ 的形式与式 (33) 一样, 根据式 (31), 相位漂移角为

$$\Delta\gamma(I_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x_j^h(\tau, I_r), I_r) d\tau \quad (53)$$

在共振情形 $I = I_r$ 时, $\Omega(\bar{x}_j(I_r), I_r) = 0$. 因此共振区域异宿轨道的 k 脉冲 Melnikov 函数 (52) 不依赖参数 ε , 并且 $I_j(\varepsilon, I_r, \gamma_0, \mu) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). 在实际工程应用中, 一般是共振情形反映了系统的主要非线性行为, 正是因为共振情形下的 $I_j(\varepsilon, I_r, \gamma_0, \mu) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), 所以简化了广义 Melnikov 函数的计算. 显而易见, 在假设 5.3 的条件下, 在 $I = I_r$ 处以及距离 $I = I_r$ 为 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 处的所有 I 值, 总是满足开折条件 (43), 因此可以从定理 5.1 中去掉开折条件, 那么在共振情形下, 定理 5.1 就变成了如下命题.

命题 5.1 在共振情形 $I = I_r$, 对某一整数 k , $\mu = \bar{\mu}$, 存在一个相位角 $\gamma_0 = \bar{\gamma}_0$, 它们满足以下几个条件:

(1) 在 γ_0 处, k 脉冲 Melnikov 函数有一个简单零点, 即

$$M_k(I_r, \bar{\gamma}_0, \bar{\mu}) = 0, \quad D_{\gamma_0} M_k(I_r, \bar{\gamma}_0, \bar{\mu}) \neq 0 \quad (54)$$

(2) 当 $i = 1, 2, \dots, k-1, k > 1$ 时, $M_i(I_r, \bar{\gamma}_0, \bar{\mu}) \neq 0$, 如果法向量 \mathbf{n} 的符号 σ_j 为正, 则 $M_i(I_r, \bar{\gamma}_0, \bar{\mu})$ 为正; 如果 σ_j 为负, 则 $M_i(I_r, \bar{\gamma}_0, \bar{\mu})$ 为负.

于是当所有的 I 趋近 I_r , 所有的 μ 趋近 $\bar{\mu}$, 所有的 ε 都充分小时, 则存在二维横截面 $\sum_{\varepsilon}^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$, 该二维横截面沿着扰动环面 M_k^{ε} 的稳定流形 $W^s(M_k^{\varepsilon})$ 和扰动环面 M_0^{ε} 的不稳定流形 $W^u(M_0^{\varepsilon})$ 方向, 在扰动环面 M_k^{ε} 与 M_0^{ε} 相位角距离的数量级为 $O(\varepsilon)$ 处, 稳定流形 $W^s(M_k^{\varepsilon})$ 和不稳定流形 $W^u(M_0^{\varepsilon})$ 横截相交. 而且在 (x, h, γ) 坐标系中, 在扰动环面 M_i^{ε} ($i = 0, 1, \dots, k$) 的小邻域外, h 为任意值, 由相位角

$$\gamma_0 = \hat{\gamma}_0(\varepsilon, I, \mu) + \sum_{i=0}^j \Delta\gamma_j(I), \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \quad (55)$$

和 $I = I_r$ 所确定的轨道曲线族 (??) 张成轨道面 $\sum_0^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$, 横截面 $\sum_{\varepsilon}^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$ 会光滑地衰减到轨道面 $\sum_0^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$ 上, $\bar{\gamma}_0(\mu)$ 是 k 脉冲 Melnikov 函数 $M_k(I_r, \gamma_0, \mu)$ 的简单零点. 二维横截面 $\sum_0^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$ 的一条边在流形 M_j^0 的直线 $\gamma = \bar{\gamma}_0(\mu) - \Delta\gamma^-(I_r)$ 上, 另一条边在流形 M_j^0 的直线 $\gamma = \bar{\gamma}_0(\mu) + (k -$

$1)\Delta\gamma(I_r) + \Delta\gamma^+(I_r)$ 上, 从直线 $\gamma = \bar{\gamma}_0(\mu) - \Delta\gamma^-(I_r)$ 变化到直线 $\gamma = \bar{\gamma}_0(\mu) + (k-1)\Delta\gamma(I_r) + \Delta\gamma^+(I_r)$, 张成二维横截面 $\sum_0^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$, 该横截面最终又回到流形 M_j^0 . 相位差 $\Delta\gamma^-(I_0)$ 和 $\Delta\gamma^+(I_0)$ 定义为

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma^+(I_0) &= \int_0^{+\infty} \Omega(x_j^h(\tau, I_r), I_r) d\tau \\ \Delta\gamma^-(I_r) &= \int_{-\infty}^0 \Omega(x_j^h(\tau, I_r), I_r) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

如果由未扰动异宿流形 $W_j(M_j)$ 所围成的区域是凸的, 则符号 σ_j 不必计算. 这里, 把这种有边界横截面 $\sum_0^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$ 叫做奇异异宿横截面.

利用共振情形的广义 Melnikov 方法分析问题, 一般有以下几个步骤:

(1) 计算未扰动系统 (25) 的异宿轨道 \bar{x}_j^h 和相位漂移角 $\Delta\gamma$.

(2) 利用式 (33), 计算第一个脉冲的 Melnikov 函数.

(3) 根据式 (38), 计算 k 脉冲 Melnikov 函数及其开折条件、简单零点.

(4) 解释流形的几何意义以及流形之间的关系, 这些流形包括未扰动异宿流形 $W_j(I)$ 、环面 M_j 、局部稳定流形 $W_{\text{loc}}^s(M_j)$ 、局部不稳定流形 $W_{\text{loc}}^u(M_j)$ 、稳定流形 $W^s(M_j)$ 、不稳定流形 $W^u(M_j)$ 、稳定流形 $W^s(M_k^{\varepsilon})$ 、不稳定流形 $W^u(M_0^{\varepsilon})$ 等.

(5) 解释如何形成二维横截面 $\sum_{\varepsilon}^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$, $\sum_0^{\mu}(\bar{\gamma}_0)$, 以及两个横截面的几何意义、几何关系.

6 广义 Melnikov 方法的应用

薄板广泛应用于航空航天领域, 人们关注的问题是变形时薄板的非线性振动. 近几十年来, 关于薄板的非线性振动、分岔和混沌动力学的研究取得了一些进展, Holmes 等 [97-98] 利用有限元法研究了薄板的非线性振动和分岔. Yang 和 Sethna [99] 利用平均法分析了参数激励作用下正方形薄板的局部分岔和全局分岔, 他们首先利用 $Z_2 \oplus Z_2$ 对称性把 von Karman 方程简化为两个自由度含参数激励的非线性系统, 然后分析了平均方程的全局动力学, 研究结果表明系统存在异宿环和 Smale 马蹄意义的混沌运动. 根据 Yang 和 Sethna [99] 的研究结果, Feng 和 Sethna [43] 利用全局摄动方法进一步研究了参数激励作用下薄板的分岔和混沌动力学, 他们得到了 Shilnikov 同宿轨道和混沌运动存在的条件.

Abe 等 [100] 利用多尺度法分析了简支矩形层合薄板的模态响应. Popov 等 [101] 研究了参数激励

作用下壳的不同模态之间的相互作用和分岔. Hadian 和 Nayfeh^[102] 利用多尺度法分析了谐波激励作用下的非线性夹紧圆板混合内共振情形的响应. Nayfeh 和 Vakakis^[103] 利用多尺度法研究了轴对称几何非线性薄圆板的亚谐波移动波, 发现了固有频率相同的线性模态之间的非线性作用. Tien 等^[44-45] 利用平均法和 Melnikov 方法分析了简谐激励作用下的两个自由度薄弓的 1:2 和 1:1 内共振情形的全局分岔和混沌动力学. Chang 等^[104] 研究了矩形薄板 1:1 内共振情形的分岔和混沌动力学. Zhang 等^[55,105] 研究了参数激励和外激励联合作用下的简支矩形薄板的全局分岔和混沌动力学. Yu 等^[106] 利用规范形理论得到了薄板的双零和纯虚特征根的简单规范形. Ye 等^[107] 研究了参数激励作用下反对称铺设复合层合矩形薄板的混沌动力学. Zhang 等^[108] 利用 Reddy 三阶剪切变形理论研究了四边简支复合层合压电矩形薄板 1:2 内共振情形下的混沌动力学. Guo 和 Zhang 等^[109-110] 利用三阶剪切变形理论研究了角对称铺设四边简支复合层合薄板的周期运动和混沌动力学. Zhang 和 Hao 等^[111-114] 利用三阶剪切变形理论研究了功能梯度矩形薄板的混沌动力学以及具有裂纹的功能梯度板的非线性动力学. Zhang 和 Yang^[115] 研究了变转速旋转圆盘横向振动的非线性动力学.

由于高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学在理论分析上和工程应用上都具有重要意义, 因此, 这些问题成为近二十年的研究热点. 因为研究方法的限制, 目前对高维非线性系统全局动力学多脉冲混沌运动的研究, 解析方法主要有两种, 一种是广义 Melnikov 方法; 另外一种方法就是综合了几何奇异摄动理论、高维 Melnikov 理论和横截理论的能量相位法.

本节主要研究在面内激励和横向激励联合作用下的四边简支薄板的多脉冲 Shilnikov 轨道和混沌动力学. 我们考虑 1:2 内共振主参数共振——基本参数共振情形, 首先, 根据 von Karman 方程推导出矩形薄板的运动控制方程, 利用 Galerkin 方法得到参数激励和外激励联合作用下的两个自由度的运动方程. 然后, 应用多尺度法把两个自由度的非自治系统转换成平均方程; 在平均方程的基础上, 利用规范形理论得到简单规范形. 利用 Kovacic 等^[67-68] 提出的广义 Melnikov 方法研究薄板的多脉冲混沌运动, 在分析时, 我们改进了近可积 Hamilton 系统的多脉冲 Melnikov 函数的计算. 理论上的定性分析发现在平均方程的扰动相空间

里存在多脉冲 Shilnikov 跳跃轨道.

6.1 运动方程的建立和摄动分析

我们研究四边简支矩形薄板, 其边长为 a 和 b , 厚度是 h , 薄板同时受横向激励和面内激励, 所建立的直角坐标系如图 4 所示. 坐标系 Oxy 位于薄板的中面上, u, v 和 w 分别表示薄板中面上的一点在 x, y 和 z 方向的位移, 薄板面内的激励为 $p = p_0 - p_1 \cos \Omega_2 t$.

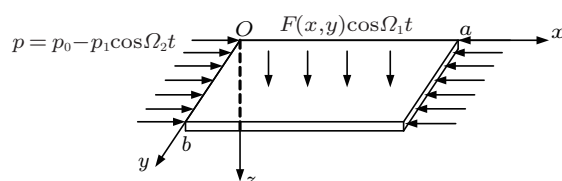


图 4 矩形薄板的模型及坐标系

根据薄板的 von Karman 方程^[116], 可以得到矩形薄板的运动方程如下

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} = F(x, y) \cos \Omega_1 t \quad (57)$$

$$\nabla^4 \phi = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (58)$$

其中 ρ 是薄板的密度, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 是弯曲刚度, E 是杨氏模量, ν 是泊松比, ϕ 是应力函数, μ 是阻尼系数.

简支边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } x = 0, a, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \text{当 } y = 0, b, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

应力函数 ϕ 满足边界条件, 可以表示成如下形式

$$u = \int_0^a \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \delta_x$$

$$h = \int_0^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = p, \quad \text{当 } x = 0, a \quad (60a)$$

$$v = \int_0^b \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx = 0$$

$$\int_0^a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx = 0, \quad \text{当 } y = 0, b \quad (60b)$$

其中 δ_x 是边界上 x 方向的位移.

我们考虑薄板的第一、二模态的非线性振动,应用 Galerkin 方法对方程 (57) 进行模态截断,得到无量纲运动方程如下

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon\mu\dot{x}_1 + (\omega_1^2 + 2\varepsilon f_1 \cos \Omega_2 t)x_1 + \varepsilon(\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2) = \varepsilon F_1 \cos \Omega_1 t \quad (61a)$$

$$\ddot{x}_2 + \varepsilon\mu\dot{x}_2 + (\omega_2^2 + 2\varepsilon f_2 \cos \Omega_2 t)x_2 + \varepsilon(\beta_1 x_2^3 + \beta_2 x_1^2 x_2) = \varepsilon F_2 \cos \Omega_1 t \quad (61b)$$

我们应用多尺度法^[17]得到方程 (61) 的统一解的形式如下

$$x_n(t, \varepsilon) = x_{n0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n1}(T_0, T_1) + \dots, \quad n = 1, 2 \quad (62)$$

其中 $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t$. 那么, 微分算子

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (63)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (64)$$

其中 $D_k = \partial/\partial T_k, k = 0, 1$.

我们仅研究 1:2 内共振-主参数共振-基本参数共振情形, 共振关系表示如下

$$\omega_1^2 = \frac{1}{4}\Omega_2^2 + \varepsilon\sigma_1, \quad \omega_2^2 = \Omega_2^2 + \varepsilon\sigma_2, \quad \Omega_1 = \Omega_2 \quad (65)$$

其中 σ_1, σ_2 是两个调谐参数, 为了便于下面的分析, 设 $\Omega_1 = \Omega_2 = 2$.

将方程 (62)~(65) 代入方程 (61), 并且比较方程两边 ε 同阶次的系数, 得到直角坐标形式的平均方程

$$\frac{dx_1}{dT_1} = -\frac{1}{2}\mu x_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - f_1)x_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 x_2(x_1^2 + x_2^2) - \alpha_2 x_2(x_3^2 + x_4^2) \quad (66a)$$

$$\frac{dx_2}{dT_1} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + f_1)x_1 - \frac{1}{2}\mu x_2 + \frac{3}{2}\alpha_1 x_1(x_1^2 + x_2^2) + \alpha_2 x_1(x_3^2 + x_4^2) \quad (66b)$$

$$\frac{dx_3}{dT_1} = -\frac{1}{2}\mu x_3 - \frac{1}{4}\sigma_2 x_4 - \frac{3}{4}\beta_1 x_4(x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{2}\beta_2 x_4(x_1^2 + x_2^2) \quad (66c)$$

$$\frac{dx_4}{dT_1} = -\frac{1}{8}F_2 + \frac{1}{4}\sigma_2 x_3 - \frac{1}{2}\mu x_4 + \frac{3}{4}\beta_1 x_3(x_3^2 + x_4^2) + \frac{1}{2}\beta_2 x_3(x_1^2 + x_2^2) \quad (66d)$$

在下一节里, 我们将给出参数激励和外激励联合作用下的四边简支矩形薄板的非线性振动平均方程 (66) 的规范形.

6.2 规范形计算

为了便于分析四边简支矩形薄板的非线性振动的多脉冲 Shilnikov 轨道的混沌动力学, 我们需要把平均方程 (66) 化简为较简单的规范形. 显而易见, 没有参数的平均方程 (66) 具有 $Z_2 \oplus Z_2$ 和 D_4 对称性, 这种对称性在规范形中也成立. 把激励振幅 F_2 作为摄动参数, 当分析多脉冲 Shilnikov 轨道时, 振幅 F_2 作为开折参数来处理, 显然, 不考虑摄动参数, 方程 (66) 就变成如下形式

$$\frac{dx_1}{dT_1} = -\frac{1}{2}\mu x_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - f_1)x_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 x_2(x_1^2 + x_2^2) - \alpha_2 x_2(x_3^2 + x_4^2) \quad (67a)$$

$$\frac{dx_2}{dT_1} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + f_1)x_1 - \frac{1}{2}\mu x_2 + \frac{3}{2}\alpha_1 x_1(x_1^2 + x_2^2) + \alpha_2 x_1(x_3^2 + x_4^2) \quad (67b)$$

$$\frac{dx_3}{dT_1} = -\frac{1}{2}\mu x_3 - \frac{1}{4}\sigma_2 x_4 - \frac{3}{4}\beta_1 x_4(x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{2}\beta_2 x_4(x_1^2 + x_2^2) \quad (67c)$$

$$\frac{dx_4}{dT_1} = \frac{1}{4}\sigma_2 x_3 - \frac{1}{2}\mu x_4 + \frac{3}{4}\beta_1 x_3(x_3^2 + x_4^2) + \frac{1}{2}\beta_2 x_3(x_1^2 + x_2^2) \quad (67d)$$

显而易见, 方程 (67) 有一个平凡解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, 其 Jacobi 矩阵写成如下形式

$$\mathbf{J} = D_x \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mu & -\frac{1}{2}(\sigma_1 - f_1) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 + f_1) & -\frac{1}{2}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\mu & -\frac{1}{4}\sigma_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\sigma_2 & -\frac{1}{2}\mu \end{bmatrix}. \quad (68)$$

平凡解的特征方程形式如下

$$(4\lambda^2 + 4\mu\lambda + \mu^2 + \sigma_1^2 - f_1^2) \cdot \left(4\lambda^2 + 4\mu\lambda + \mu^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2\right) = 0 \quad (69)$$

令

$$\Delta_1 = \mu^2 + \sigma_1^2 - f_1^2, \quad \Delta_2 = \mu^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2 \quad (70)$$

当 $\mu = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \sigma_2^2/4 > 0$ 三个条件同时满足时, 方程 (67) 有一个双零特征根和一对纯虚特征根

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega \quad (71)$$

其中 $\omega^2 = \sigma_2^2/16$.

令 $\sigma_1 = 2\bar{\sigma}_1 - f_1$, $f_1 = 1$, 把 $\bar{\sigma}_1$, μ , F_2 作为摄动参数, 使用 Zhang 等^[118] 的 Maple 程序计算, 得到方程 (67) 的含参数三阶规范形

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\bar{\mu}y_1 + (1 - \bar{\sigma}_1)y_2 \\ \dot{y}_2 &= \bar{\sigma}_1y_1 - \bar{\mu}y_2 + \frac{3}{2}\alpha_1y_1^3 + \alpha_2y_1y_3^2 + \alpha_2y_1y_4^2 \\ \dot{y}_3 &= -\bar{\mu}y_3 - \bar{\sigma}_2y_4 - \frac{3}{4}\beta_1y_3^3 - \\ &\quad \frac{1}{2}\beta_2y_1^2y_4 - \frac{3}{4}\beta_1y_3^2y_4 \\ \dot{y}_4 &= -\bar{f}_2 + \bar{\sigma}_2y_3 - \bar{\mu}y_4 + \frac{3}{4}\beta_1y_3^3 + \\ &\quad \frac{1}{2}\beta_2y_1^2y_3 + \frac{3}{4}\beta_1y_3y_4^2 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

其中 $\bar{\mu} = \mu/2$, $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2/4$, $\bar{f}_2 = F_2/8$.

引入下面的变换

$$y_3 = I \cos \gamma, \quad y_4 = I \sin \gamma \quad (73)$$

把方程 (73) 代入方程 (72), 同时引入线性变换

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{|\alpha_2|}}{\sqrt{|\beta_2/2|}} \begin{bmatrix} 1 - \bar{\sigma}_1 & 0 \\ \bar{\mu} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

去掉参数 $\bar{\sigma}_1$ 的非线性项, 得到方程如下

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\mu_1u_1 - \mu_2u_2 + \eta_1u_1^3 + \alpha_2u_1I^2 \\ \dot{I} &= -\bar{\mu}I - \bar{f}_2 \sin \gamma \\ I\dot{\gamma} &= \bar{\sigma}_2I + \eta_2I^3 + \alpha_2Iu_1^2 - \bar{f}_2 \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

其中 $\mu_1 = \bar{\mu}^2 - \bar{\sigma}_1(1 - \bar{\sigma}_1)$, $\mu_2 = 2\bar{\mu}$, $\eta_1 = 3\alpha_1\alpha_2/\beta_2$, $\eta_2 = 3\beta_1/4$.

引入如下的尺度变换

$$\mu_2 \rightarrow \varepsilon\mu_2, \quad \bar{\mu} \rightarrow \varepsilon\bar{\mu}, \quad \bar{f}_2 \rightarrow \varepsilon\bar{f}_2, \quad \eta_1 \rightarrow \eta_1, \quad \eta_2 \rightarrow \eta_2 \quad (76)$$

那么, 规范形 (75) 写成带有扰动项的形式

$$\dot{u}_1 = \frac{\partial H}{\partial u_2} + \varepsilon g_1^{u_1} = u_2 \quad (77a)$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{\partial H}{\partial u_1} + \varepsilon g_1^{u_2} = -\mu_1u_1 + \eta_1u_1^3 + \alpha_2u_1I^2 - \varepsilon\mu_2u_2 \quad (77b)$$

$$\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \gamma} + \varepsilon g_1^I - \varepsilon\bar{f}_2 \sin \gamma = -\varepsilon\bar{\mu}I -$$

$$\varepsilon\bar{f}_2 \sin \gamma \quad (77c)$$

$$I\dot{\gamma} = -\frac{\partial H}{\partial I} + \varepsilon g_1^\gamma - \varepsilon\bar{f}_2 \cos \gamma = \bar{\sigma}_2I + \eta_2I^3 + \alpha_2Iu_1^2 - \varepsilon\bar{f}_2 \cos \gamma \quad (77d)$$

这里 Hamilton 函数 H 的形式如下

$$H(u_1, u_2, I, \gamma) = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}\mu_1u_1^2 - \frac{1}{4}\eta_1u_1^4 - \frac{1}{2}\alpha_2I^2u_1^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2I^2 - \frac{1}{4}\eta_2I^4 \quad (78)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} g_1^{u_1} &= 0, \quad g_1^{u_2} = -\mu_2u_2, \\ g_1^I &= -\bar{\mu}I - \bar{f}_2 \sin \gamma, \quad g_1^\gamma = \bar{f}_2 \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

6.3 解耦系统的动力学

当 $\varepsilon = 0$, 系统 (77) 是一个解耦的两个自由度的非线性系统. 因为 $\dot{I} = 0$, 所以在系统 (77) 的 (u_1, u_2) 子空间中, 变量 I 可以看作一个参数. 分析前两个解耦方程

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad \dot{u}_2 = -\mu_1u_1 + \eta_1u_1^3 + \alpha_2I^2u_1 \quad (80)$$

因为 $\eta_1 > 0$ 时, 系统 (80) 会出现异宿分岔, 从系统 (80) 很容易看出当 $\mu_1 - \alpha_2I^2 < 0$, 系统 (80) 有唯一的平凡零解 $(u_1, u_2) = (0, 0)$, 该零解是鞍点, 而且在曲线 $\mu_1 = \alpha_2I^2$ 上, 即

$$I_{1,2} = \pm \left[\frac{\bar{\mu}^2 - \bar{\sigma}_1(1 - \bar{\sigma}_1)}{\alpha_2} \right]^{1/2} \quad (81)$$

上述平凡零解通过 Pitchfork 分岔, 分岔为 3 个解, 分别是 $q_0 = (0, 0)$ 和 $q_{\pm}(I) = (B, 0)$, 其中

$$B = \pm \left\{ \frac{1}{\eta_1} [\bar{\mu}^2 - \bar{\sigma}_1(1 - \bar{\sigma}_1) - \alpha_2I^2] \right\}^{1/2} \quad (82)$$

通过计算在非零解处的 Jacobi 矩阵, 可知奇点 $q_{\pm}(I)$ 是鞍点, I 和 γ 分别代表振动的幅值和相位. 因此, 我们可以假设 $I \geq 0$, 则方程 (81) 变为

$$I_1 = 0, \quad I_2 = \left[\frac{\bar{\mu}^2 - \bar{\sigma}_1(1 - \bar{\sigma}_1)}{\alpha_2} \right]^{1/2} \quad (83)$$

因此, 对所有的 $I \in [I_1, I_2]$, 系统 (80) 有两个双曲鞍点 $q_{\pm}(I)$, 它们由一对异宿轨道连接 $u_{\pm}^h(T_1, I)$, 即 $\lim_{T_1 \rightarrow \pm\infty} u_{\pm}^h(T_1, I) = q_{\pm}(I)$. 在四维相空间中, 定义集合

$$M = \{(u, I, \gamma) \mid u = q_{\pm}(I), I_1 \leq I \leq I_2, 0 \leq \gamma < 2\pi\} \quad (84)$$

它是一个二维不变流形, 根据参考文献 [12-16] 研究的结果可知这个二维不变流形 M 是正规双曲流形. 这个二维正规双曲不变流形 M 有三维稳定流形和不稳定流形, 分别用 $W^s(M)$ 和 $W^u(M)$ 表示. 在系统 (80) 中, 存在连接奇点 $q_{\pm}(I) = (B, 0)$ 的异宿轨道, 这表明稳定流形 $W^s(M)$ 和不稳定流形 $W^u(M)$ 沿着三维异宿流形非横截相交, 三维异宿流形 Γ 定义如下

$$\Gamma = \left\{ (u, I, \gamma) \mid u = u_{\pm}^h(T_1, I), I_1 < I < I_2, \right. \\ \left. \gamma = \int_0^{T_1} D_I H(u_{\pm}^h(T_1, I), I) ds + \gamma_0 \right\} \quad (85)$$

现在我们研究限制在流形 M 上的未扰动系统 (75) 的动力学特性, 限制在流形 M 上的未扰动系统 (75) 为

$$\dot{I} = 0, \quad I\dot{\gamma} = D_I H(q_{\pm}(I), I), \quad I_1 \leq I \leq I_2 \quad (86)$$

其中

$$D_I H(q_{\pm}(I), I) = -\frac{\partial H(q_{\pm}(I), I)}{\partial I} = \\ \bar{\sigma}_2 I + \eta_2 I^3 + \alpha_2 I q_{\pm}^2(I) \quad (87)$$

根据 Kovacic 和 Wiggins [12-16] 的研究结果, 可知如果 $D_I H(q_{\pm}(I), I) \neq 0$, $I =$ 常数, 则系统 (86) 形成一个周期轨道; 如果 $D_I H(q_{\pm}(I), I) = 0$, $I =$ 常数, 则系统 (86) 形成奇点环. $I \in [I_1, I_2]$, 使得 $D_I H(q_{\pm}(I), I) = 0$ 的 I 值, 称其为共振 I 值, 对应的奇点则称为共振奇点. 用 I_r 代表共振幅值, 因此有

$$I_r = \pm \left\{ \frac{\bar{\sigma}_2 \eta_1 + \alpha_2 [\bar{\mu}^2 - \bar{\sigma}_1 (1 - \bar{\sigma}_1)]}{\alpha_2^2 - \eta_1 \eta_2} \right\}^{1/2} \quad (88)$$

γ 代表振动的相位, 当 $I = I_r$ 时, 振动相位漂移角 $\Delta\gamma$ 的定义如下

$$\Delta\gamma = \gamma(+\infty, I_r) - \gamma(-\infty, I_r) \quad (89)$$

相位漂移的物理意义是轨道两个端点的相位差. 在 (u_1, u_2) 子空间中, 连接两个鞍点的轨线是一对异宿轨道, 因此, 事实上子空间 (I, γ) 中的同宿轨道在四维空间 (u_1, u_2, I, γ) 中具有异宿连接. 相位漂移表示轨道离开和回到 M 的吸引域时相位 γ 的差值. 在下面的分析中, 我们将利用相位漂移来得到多脉冲 Shilnikov 轨道的存在条件. 在异宿轨道的分析中将会对相位漂移进行计算.

分析系统 (80) 的异宿轨道, 令 $\varepsilon_1 = \mu_1 - \alpha_2 I^2$ 和 $\mu_2 = \varepsilon_2$, 系统 (80) 可写为

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad \dot{u}_2 = -\varepsilon_1 u_1 + \eta_1 u_1^3 - \varepsilon_2 u_2 \quad (90)$$

令系统 (90) 中的 $\varepsilon = 0$, 则系统 (90) 是一个 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为

$$\bar{H}(u_1, u_2) = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 u_1^2 - \frac{1}{4} \eta_1 u_1^4 \quad (91)$$

将奇点 $q_{\pm}(I) = (B, 0)$ 代入方程 (91), 可以得到 $\bar{H} = \varepsilon_1^2 / (4\eta_1)$, 将方程 (90) 和方程 (91) 联立求解, 发现系统 (90) 存在一个异宿环 Γ^0 , 它包含两个双曲鞍点 $q_{\pm}(I)$ 和一对异宿轨道 $u_{\pm}(T_1)$, 为了计算相位漂移和广义 Melnikov 函数, 我们必须计算出异宿轨道

$$\left. \begin{aligned} u_1(T_1) &= \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\eta_1}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{2} T_1\right) \\ u_2(T_1) &= \pm \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2\eta_1}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{2} T_1\right) \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

计算相位漂移, 将方程 (92) 代入方程 (77d) 的未扰动系统, 并且积分相应的方程得

$$\gamma(T_1) = \omega_r T_1 - \frac{\alpha_2 \sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \tanh\left(\frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{2} T_1\right) + \gamma_0 \quad (93)$$

其中 $\omega_r = \bar{\sigma}_2 + \eta_2 I^2 + \varepsilon_1 \alpha_2 / \eta_1$.

因为在 $I = I_r$ 处, $\omega_r \equiv 0$, 所以, 相位漂移可以表示成如下形式

$$\Delta\gamma = \left[-\frac{2\alpha_2 \sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right]_{I=I_r} = \\ -\frac{2\alpha_2}{\eta_1} \sqrt{2[\bar{\mu}^2 - \bar{\sigma}_1(1 - \bar{\sigma}_1) - \alpha_2 I_r^2]} \quad (94)$$

在上述分析中, 我们没有使用 Haller [74-83] 和 Feng [43] 等提出的变换 $y_1 = \sqrt{2P} \sin Q$ 和 $y_2 = \sqrt{2P} \cos Q$, 原因是这种变换不是拓扑等价变换, 它改变了多脉冲连接的形式和相空间的拓扑结构, 即这种变换把子空间 (u_1, u_2) 中一对异宿轨道所围成的区域变成了同宿轨道所围成的区域. 而本文上述分析过程, 弥补了这种不足, 保持了相空间拓扑结构的不变性.

6.4 扰动系统的动力学

通过上面的分析, 得到了系统 (77) 的未扰动系统子空间 (u_1, u_2) 的详细非线性动力学特性. 下一步我们将要研究小扰动 $\varepsilon (0 < \varepsilon \ll 1)$ 对系统 (77) 的未扰动系统的影响, 我们分析小扰动对流形 M 的影响, 目的是确定扰动相空间中多脉冲轨道可能存在的参数范围. 这些多脉冲轨道并不渐近趋近于慢流形 M_ε 上的一些不变流形, 而是多

次离开和进入 M_ε 的小邻域, 最后渐近地回到 M_ε 的不变集上. 这些多脉冲轨道是由 Hamilton 扰动和耗散扰动引起的, 多脉冲轨道的存在表明扰动系统中存在复杂动力学.

接下来, 我们分析扰动系统的动力学和小扰动对流形 M 的影响, 根据文献 [74-83] 的研究结果, 可知在充分小扰动下, M 沿着稳定流形和不稳定流形是不变的. 在小扰动下, $q_\pm(I)$ 仍然保持双曲奇点的特性, $q_\pm(I)$ 仍旧是鞍点, 因此, 当 $M \rightarrow M_\varepsilon$ 时, 就得到

$$M = M_\varepsilon = \{(u, I, \gamma) | u = q_\pm(I), I_1 \leq I \leq I_2, 0 \leq \gamma < 2\pi\} \quad (95)$$

考虑系统 (75) 的后两个方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= -\bar{\mu}I - \bar{f}_2 \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \bar{\sigma}_2 + \eta_2 I^2 + \alpha_2 u_1^2 - \frac{\bar{f}_2}{I} \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

引入如下尺度变换

$$\bar{\mu} \rightarrow \varepsilon \bar{\mu}, I = I_r + \sqrt{\varepsilon} h, \bar{f}_2 \rightarrow \varepsilon \bar{f}_2, T_1 \rightarrow \frac{T_1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (97)$$

将上面的变换代入方程 (96) 得

$$\left. \begin{aligned} \dot{h} &= -\bar{\mu}I_r - \bar{f}_2 \sin \gamma - \sqrt{\varepsilon} h \bar{\mu} \\ \dot{\gamma} &= -\frac{2\delta}{\eta_1} I_r h - \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\delta}{\eta_1} h^2 + \frac{\bar{f}_2}{I_r} \cos \gamma \right) \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

其中 $\delta = \alpha_2^2 - \eta_1 \eta_2$, 当 $\varepsilon = 0$, 方程 (98) 变成如下形式

$$\dot{h} = -\bar{\mu}I_r - \bar{f}_2 \sin \gamma, \quad \dot{\gamma} = -\frac{2\delta}{\eta_1} I_r h \quad (99)$$

未扰动系统 (99) 是一个 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为

$$\hat{H}_D(h, \gamma) = -\bar{\mu}I_r \gamma + \bar{f}_2 \cos \gamma + \frac{\delta}{\eta_1} I_r h^2 \quad (100)$$

计算出系统 (99) 的奇点为

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= (0, \gamma_c) = \left(0, -\arcsin \frac{\bar{\mu}I_r}{\bar{f}_2} \right) \\ Q_0 &= (0, \gamma_s) = \left(0, \pi + \arcsin \frac{\bar{\mu}I_r}{\bar{f}_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

根据两个奇点处 P_0 和 Q_0 的特征方程, 可知两个奇点的稳定性. 奇点 P_0 是中心点, 奇点 Q_0 是一个鞍点, 并且它由一个同宿轨道连接. 经分析发现在充分小扰动 ε 的作用下, 奇点 Q_0 仍然保持其双曲

奇点的特性, 扰动后的奇点 Q_ε 仍为鞍点, 在小扰动下奇点 P_0 变成双曲焦点 P_ε .

在 $I = I_r$ 附近, 定义一个环形域 A_ε

$$A_\varepsilon = \{(u_1, u_2, I, \gamma) | u_1 = B, u_2 = 0, |I - I_r| < \sqrt{\varepsilon} C, \gamma \in T^1\} \quad (102)$$

这里 C 是一个常数, 并且 C 足够大, 从而使未扰动轨道包含在该环形域里. 注意到环形域 A_ε 中的三维稳定流形和不稳定流形 $W^s(A_\varepsilon)$ 和 $W^u(A_\varepsilon)$ 分别是四维稳定流形 $W^s(M_\varepsilon)$ 和不稳定流形 $W^u(M_\varepsilon)$ 的子集. 对于扰动系统, 在 A_ε 上的鞍焦点 P_ε 处有多脉冲轨道, 并且在四维相空间中, 多脉冲轨道从环形域 A_ε 出发, 又返回到该环形域, 最终便产生了多脉冲 Shilnikov 环, 如图 5 所示.

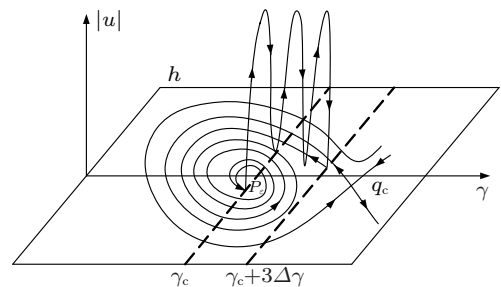


图 5 三脉冲 Shilnikov 轨道

6.5 利用广义 Melnikov 方法研究多脉冲轨道

我们利用 Kovacic 等 [67-68] 提出的广义 Melnikov 方法来分析矩形筒支薄板的异宿 Shilnikov 型多脉冲轨道, 研究广义 Melnikov 函数 $M_k(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu)$ 的非退化零点, 我们把含有这些参数 $\varepsilon, I, \gamma_0, \mu$ 的广义 Melnikov 函数 $M_k(\varepsilon, I, \gamma_0, \mu)$ 叫做 k 脉冲 Melnikov 函数.

为了揭示矩形筒支薄板的非线性振动存在异宿多脉冲轨道, 关键是计算 k 脉冲 Melnikov 函数的表达式. 首先, 根据第 5 节式 (33), 计算共振情形 $I = I_r$ 的第一个脉冲的 Melnikov 函数, 在异宿流形 $W^s(M)$ 和 $W^u(M)$ 上第一个脉冲的 Melnikov 函数 $M(I, \gamma_0, \mu)$ 等于

$$M(I_r, \gamma_0, \bar{\mu}, \eta_1, \alpha_2, \varepsilon_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \mathbf{n}(p^h(t)), \mathbf{g}_1(p^h(t), \mu, 0) \rangle dT_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} g_1^{u_1} + \frac{\partial H}{\partial u_2} g_1^{u_2} + \frac{\partial H}{\partial I} g_1^I + \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \gamma} g_1^\gamma) dT_1 = & -\frac{2\sqrt{2}\mu_2}{3\eta_1} \varepsilon_1^{3/2} + \bar{\mu} I_r^2 \Delta\gamma - \\ & \bar{f}_2 I_r \left[\cos \left(\gamma_0 - \alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right) - \right. \\ & \left. \cos \left(\gamma_0 + \alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (103)$$

根据 Kovacic 等^[67-68]的研究结果, 我们知道共振情形下的广义 Melnikov 函数不依赖小参数 ε , 即 $\Gamma_j(\varepsilon, I_r, \gamma_0, \mu) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), 因此, 我们利用第 5 节式 (38), 计算 k 脉冲 Melnikov 函数如下

$$\begin{aligned} M_k(I_r, \gamma_0, \bar{\mu}, \eta_1, \alpha_2, \varepsilon_1) = & \sum_{j=0}^{k-1} M(I_r, \gamma_0 + j\Delta\gamma(I_r), \bar{\mu}, \eta_1, \alpha_2, \varepsilon_1) = \\ & -\bar{f}_2 I_r \left[\cos \left(\gamma_0 - \alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right) - \right. \\ & \left. \cos \left(\gamma_0 + \alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right) \right] - \frac{2\sqrt{2}\mu_2}{3\eta_1} \varepsilon_1^{3/2} + \\ & \bar{\mu} I_r^2 \Delta\gamma + \dots - \\ & \bar{f}_2 I_r \left[\cos \left(\gamma_0 - \alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. 2(k-1)\alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right) - \right. \\ & \left. \cos \left(\gamma_0 + \alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. 2(k-1)\alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right) \right] - \\ & \frac{2\sqrt{2}\mu_2}{3\eta_1} \varepsilon_1^{3/2} + \bar{\mu} I_r^2 \Delta\gamma = \\ & -\bar{f}_2 I_r \left[\cos \left(\gamma_0 - \alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. 2(k-1)\alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right) - \cos \left(\gamma_0 + \alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. 2(k-1)\alpha_2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\eta_1} \right) \right] - \\ & \frac{2\sqrt{2}k\mu_2}{3\eta_1} \varepsilon_1^{3/2} + k\bar{\mu} I_r^2 \Delta\gamma \end{aligned} \quad (104)$$

令 $\Delta\gamma = -2\alpha_2\sqrt{2\varepsilon_1}/\eta_1$, $\gamma_{k-1} = \gamma_0 + (k-1)\Delta\gamma/2$, 方程 (104) 可以写成如下形式

$$\begin{aligned} M_k(I_r, \gamma_0, \bar{\mu}, \eta_1, \alpha_2, \varepsilon_1) = & M_k(I_r, \gamma_{k-1} - (k-1)\frac{\Delta\gamma}{2}, \bar{\mu}, \eta_1, \alpha_2, \varepsilon_1) = \\ & 2\bar{f}_2 I_r \sin \gamma_{k-1} \sin \left(\frac{1}{2}k\Delta\gamma \right) + \\ & \frac{2\mu_2\varepsilon_1}{3\alpha_2} \left(\frac{1}{2}k\Delta\gamma \right) + 2\bar{\mu} I_r^2 \left(\frac{1}{2}k\Delta\gamma \right) \end{aligned} \quad (105)$$

根据第 5 节 Kovacic 等^[67-68]提出的命题 5.1, 可知共振情形下的 k 脉冲 Melnikov 函数总是满足

开折条件, 因此, 我们得到如下两个条件

$$\left| \frac{\frac{1}{2}k\Delta\gamma}{\sin \left(\frac{1}{2}k\Delta\gamma \right)} \frac{(\mu_2\varepsilon_1 + 3\alpha_2\bar{\mu}I_r^2)}{3\alpha_2\bar{f}_2 I_r} \right| < 1 \quad (106)$$

$$\frac{1}{2}k\Delta\gamma \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (107)$$

下面主要是确定 k 脉冲 Melnikov 函数的简单零点, 定义一个包含所有简单零点的集合

$$\begin{aligned} Z^n = \{ (I_r, \gamma_{k-1}, \bar{\mu}, \eta_1, \alpha_2, \varepsilon_1) \mid M_k = 0, \\ D_{\gamma_0} M_k \neq 0 \} \end{aligned} \quad (108)$$

在区间 $\gamma_{k-1} \in [0, \pi]$ 上, k 脉冲 Melnikov 函数有两个简单零点, 即

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{k-1,1} = -\arcsin \frac{\frac{1}{2}k\Delta\gamma}{\sin \left(\frac{1}{2}k\Delta\gamma \right)} \cdot \\ \frac{(\mu_2\varepsilon_1 + 3\alpha_2\bar{\mu}I_r^2)}{(3\alpha_2\bar{f}_2 I_r)} \end{aligned} \quad (109)$$

$$\bar{\gamma}_{k-1,2} = \pi + \bar{\gamma}_{k-1,1} \quad (110)$$

根据以上分析, 我们可以得到无数条奇异轨道, 每条轨道都是从环面 M 上奇点 Q_0 的流形 $W(Q_0)$ 分支开始. 然后, 奇异轨道沿着一条第 k 脉冲奇异轨道 Γ_k 从环面 M 上起跳, 再回到环面 M 上连接奇点 Q_0 的分界线上, 沿着分界线运动一段时间, 奇异轨道又沿着一条第 l 脉冲奇异轨道 Γ_l 起跳, 如此反复, 最后奇异轨道回到分界线. 因此, 我们得出结论系统 (77) 的异宿多脉冲轨道是由双曲流形 M_ε 上的几个慢变线段和流形 M_ε 外的几个快速脉冲异宿轨道组成, 它们形成了一个连续的、循环的过程. 最终表明在矩形筒支薄板非线性振动中存在多脉冲异宿轨道.

7 全局摄动方法存在的不足和发展趋势

综上所述, 研究高维非线性系统多脉冲混沌动力学的解析方法主要是两种, 一种是能量相位法, 一种是广义 Melnikov 方法. 能量相位法是 1993 年由 Haller 和 Wiggins^[74]提出的一种全局摄动方法, 他们先后发表论文不断地改进这种方法. 2002 年 Malhotra 等^[84]把能量相位法推广到工程科学领域中, 分析了柔性旋转盘的多脉冲轨道和混沌动力学. 能量相位法的优点是可以计算出最大脉冲个数以及每一条轨道的能量函数, 但是, Haller 和 Wiggins^[74-83]提出的能量相位法在计算能量差

分函数时,同宿轨道和异宿轨道的拓扑结构发生了改变,因此, Yao 和 Zhang^[86-89]把能量相位法改进后,用它来分析悬臂梁、传动带和薄板的多脉冲混沌动力学.但是,经过发展后的能量相位法仍然存在一些不足之处.

(1) 能量相位法的核心思想是能量相位准则,但是 Haller 和 Wiggins 所建立的相位准则影响了能量相位法向非自治系统的推广和应用,因此,需要重新修改相位准则,使能量相位法既能研究自治系统的多脉冲混沌动力学,又能研究非自治系统的多脉冲混沌动力学.

(2) 能量相位法的横截条件和开折条件的证明,以及最大脉冲个数的求解,其实质是定义和求解耗散因子,耗散因子是阻尼与激励之比,目前,能量相位法只能用来分析单阻尼单激励单耗散因子的系统,而且激励的分析仅限于外激励,而实际上参数激励对系统多脉冲混沌动力学的影响同样重要,因此,如何定义耗散因子,使它能够在多激励多阻尼作用下高维非线性系统的多脉冲混沌动力学,有待进一步的研究.

(3) 能量相位法的理论体系包括了高于四维的高维非线性系统多脉冲混沌动力学的分析, Haller 和 Wiggins^[78]曾经利用能量相位法研究了三自由度非线性动力系统的多脉冲混沌动力学,他们是将一个六维的问题降维到四维流形上来分析,其实质仍然是四维流形上的多脉冲混沌动力学,因此,如何建立真正高维意义的能量相位理论,是未来该理论的主要研究方向之一.

纵观 Melnikov 理论的发展,可以看到, Melnikov 方法与平均法、KAM 法、几何奇异理论和不变流形纤维丛理论等方法和理论结合起来,在解决单脉冲混沌动力学方面取得了很大进展,但是传统的 Melnikov 方法和高维 Melnikov 方法在处理多脉冲混沌动力学方面却遇到了很大的困难.直到 1996 年 Kaper 和 Kovacic^[67]提出广义 Melnikov 方法,随后, Camassa 和 Kovacic 等^[68]严谨地论证了广义 Melnikov 方法.广义 Melnikov 方法理论体系严谨完整,所能够研究的内容和对对象比较广泛,但是,在进一步推广使用时,却遇到了很大的困难,直到 2008 年, Zhang 和 Yao^[69]把广义 Melnikov 方法推广到工程科学中,研究了非线性非平面运动悬臂梁的多脉冲混沌动力学.究其原因刻画流形几何结构过于复杂.

(1) 广义 Melnikov 函数是度量多脉冲轨道稳

定流形与不稳定流形之间距离的距离函数, Kovacic 等在描述相空间中多脉冲流形之间的关系时,所定义的广义 Melnikov 函数其实质是第一个脉冲的不稳定流形与最后一个脉冲的稳定流形之间的距离,但是他们在几何关系和几何结构的阐述上,却过于繁琐,因此,致使广义 Melnikov 方法理解很困难.而能量相位法之所以能够在工程科学中得到推广,是因为 Haller 和 Wiggins 构造的流形几何结构易于理解、易于被国内外的专家和学者所接受.所以,如何简化广义 Melnikov 方法,而又不影响广义 Melnikov 方法的严谨性,是今后该理论研究的重点.

(2) 广义 Melnikov 方法横截零点的计算、开折条件的证明都是基于广义 Melnikov 函数,计算广义 Melnikov 函数的难点在于多脉冲相位漂移角的计算, Kovacic 等是在二维扰动相空间慢变流形上定义了多脉冲相位漂移角,因此,相位漂移角是一个叠加变量,在非共振情形下,相位漂移角的计算尤其复杂,虽然共振情形下的多脉冲相位漂移角计算相对简单,但是与能量相位理论中的相位准则相比较,仍然很复杂.所以,在广义 Melnikov 方法中怎样定义多脉冲相位漂移角是简化广义 Melnikov 函数计算的关键.

(3) 广义 Melnikov 方法理论上是可以研究高于四维的高维非线性系统多脉冲混沌动力学,但是所研究的高维非线性系统却非常有限,仅限于可以降维或解耦的系统,这与整个 Melnikov 理论的发展有关, Melnikov 理论自从创建以来,主要的研究对象还是限于低于四维的非线性系统或者四维非线性系统. Yagasaki^[23]研究了四自由度非平面运动屈曲梁的非线性振动,他首先利用降维理论把八维非线性系统降为四维非线性系统,然后再利用 Melnikov 理论分析屈曲梁的混沌动力学. Guo 和 Chen^[59]利用 Melnikov 方法和几何奇异摄动理论研究了六维非线性 Schrodinger 方程的单脉冲轨道,这个方程可以解耦成四维方程和二维方程,同样是比较特殊的一类非线性系统.因此,如何把广义 Melnikov 方法推广到更广泛意义的一般高维非线性系统,显然还存在许多困难.

能量相位法和广义 Melnikov 方法提出和发展的时间较短.能量相位法是从多脉冲跳跃轨道的能量耗散方面来研究多脉冲混沌动力学,而广义 Melnikov 方法则是从多脉冲奇异横截面中的稳定流形和不稳定流形方面来研究多脉冲混沌动力学.研究表明,这两种方法分别只研究了多脉冲轨道

的一个方面, 如果能够把两者结合起来研究多脉冲混沌动力学, 则其结论将更加完整.

通过对能量相位法和广义 Melnikov 方法仔细地研究和对比, 发现了两种全局摄动理论有一些有待于进一步改进和完善的方面. 下述几个问题值得进一步的研究.

(1) 如何把能量相位法和广义 Melnikov 方法推广到高维非自治系统和高于四维的更高维非线性系统.

(2) 目前, 能量相位法和广义 Melnikov 方法理论在研究高维非线性系统的多脉冲混沌动力学方面, 理论体系只考虑了一个守恒量, 研究对象要求是 Hamilton 系统, 而实际上对于高维非线性系统需要有更多守恒量, 因此需要建立多个守恒量的多脉冲混沌动力学理论.

(3) 能量相位法和广义 Melnikov 方法理论体系复杂, 不利于工程科学家用来解决工程实际问题. 如何进一步改进和简化这两种方法, 提出新的多脉冲轨道和混沌动力学的判定准则, 使这两种全局摄动方法更好地应用于工程实际问题.

(4) 两种全局摄动理论在应用方面偏向于板、壳、梁等固体结构, 而它们的研究对象其实质都是几何流形, 固体与流体相对比, 流体的流动结构更加接近流形, 它的一些物理机理更加适合用流形去解释, 因此, 全局摄动理论应该推广到流体动力学中, 从理论上阐述产生复杂流体现象的根本原因.

参 考 文 献

- Melnikov V K. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 1963, 12: 1-57
- Arnold V I. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. *Soviet Mathematics*, 1964, 5: 581-585
- Holmes P J. A nonlinear oscillation with a strange attractor. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London-Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1979, 292: 419-488
- Holmes P J. Averaging and chaotic motions in forced oscillations. *society for industrial and applied mathematics, Journal on Applied Mathematics*, 1980, 38: 65-80
- Holmes P J, Marsden J E. A partial differential equation with infinitely many periodic orbits: Chaotic oscillations of a forced beam. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1981, 76: 135-165
- Holmes P J, Marsden J E. Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems. *Journal of Mathematical Physics*, 1982, 23: 669-675
- Holmes P J, Marsden J E. Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups. *Indiana University Mathematics Journal*, 1983, 32: 273-309
- Salam F M A. The Melnikov technique for highly dissipative systems. *society for industrial and applied mathematics, Journal on Applied Mathematics*, 1987, 47: 232-243
- Robinson C. Horseshoes for autonomous Hamiltonian systems using the Melnikov integral. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1988, 8: 39-49
- Wiggins S. *Global Bifurcations and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 1988
- Feng Z C, Sethna P R. Global bifurcation and chaos in parametrically forced systems with one-one resonance. *Dynamics and Stability of Systems*, 1990, 5: 201-225
- Kovacic G, Wiggins S. Orbits homoclinic to resonances, with an application to chaos in a model of the forced and damped sine-Gordon equation. *Physica D*, 1992, 57: 185-225
- Kovacic G. Hamiltonian dynamics of orbits homoclinic to a resonance band. *Physics Letters A*, 1992, 167:137-142
- Kovacic G. Dissipative dynamics of orbits homoclinic to a resonance band. *Physics Letters A*, 1992, 167:143-150
- Kovacic G. Singular perturbation theory for homoclinic orbits in a class of near-integrable Hamiltonian systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 1993, 5: 559-597
- Kovacic G. Singular perturbation theory for homoclinic orbits in a class of near-integrable dissipative systems. *SIMA Journal of Mathematical Analysis*, 1995, 26: 1611-1643
- Camassa R. On the geometry of an atmospheric slow manifold. *Physica D*, 1995, 84: 357-397
- Bountis T, Gorieli A, Kollmann M. A Melnikov vector for N-dimensional mappings. *Physics Letters A*, 1995, 206: 38-48
- Vered R K, Yona D, Nathan P. Chaotic Hamiltonian dynamics of particle's horizontal motion in the atmosphere. *Physica D*, 1997, 106: 389-431
- Kollmann M, Bountis T. A Melnikov approach to soliton-like solutions of systems of discretized nonlinear Schrodinger equations. *Physica D*, 1998, 113: 397-406
- Yagasaki K. Chaotic motions near homoclinic manifolds and resonant tori in quasiperiodic perturbations of planar Hamiltonian systems. *Physica D*, 1993, 69: 232-269
- Yagasaki K. Periodic and homoclinic motions in forced, coupled oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 20: 319-359
- Yagasaki K. The method of Melnikov for perturbations of multi-degree-of-degree Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, 1999, 12: 799-822
- Yagasaki K. Horseshoe in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2000, 154: 275-296
- Yagasaki K. Galoisian obstructions to integrability and Melnikov criteria for chaos in two-degree-of freedom Hamiltonian systems with saddle centres. *Nonlinearity*, 2003, 16: 2003-2012
- Doelman A, Hek G. Homoclinic saddle-node bifurcations in singularly perturbed systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2000, 12:169-216
- Li Y G. Singularly perturbed vector and scalar nonlinear Schrodinger equations with persistent homoclinic orbits. *Studies in Applied Mathematics*, 2002, 109:19-38
- Li Y G. Homoclinic tubes in discrete nonlinear Schrodinger equation under Hamiltonian perturbations. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31: 393-434
- 刘曾荣, 戴世强. 正交条件与 Melnikov 函数. *应用数学与计算数学学报*, 1990, 4(1): 53-56

- 30 郭友中, 刘曾荣, 江霞妹, 等. 高阶 Melnikov 方法. 应用数学和力学, 1991, 12(1): 19-30
- 31 徐振源, 刘曾荣. Sine-Gordon 方程的截断系统的同宿轨道. 力学学报, 1998, 30(3): 292-299
- 32 赵晓华, 程耀, 陆启韶, 等. 广义 Hamilton 系统的研究概况. 力学进展, 1994, 24(3): 289-300
- 33 赵晓华, 黄克累. 广义 Hamilton 系统与高维微分动力系统的定性研究. 应用数学学报, 1994, 17(2): 182-191
- 34 Li Y, McLaughlin D W. Homoclinic orbits and chaos in discretized perturbed NLS systems: Part I. homoclinic orbits. *Journal of Nonlinear Science*, 1997, 7: 211-269
- 35 Li Y, Wiggins S. Homoclinic orbits and chaos in discretized perturbed NLS systems: Part II. Symbolic dynamics. *Journal of Nonlinear Science*, 1997, 7: 315-370
- 36 Calini A, Ercolani N M, McLaughlin D W, et al. Melnikov analysis of numerically induced chaos in the nonlinear Schrodinger equation. *Physica D*, 1996, 89: 227-260
- 37 Shatah J, Zeng C C. Homoclinic orbits for the perturbed Sine-Gordon equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2000, LIII: 283-299
- 38 Zeng C C. Homoclinic orbits for the perturbed nonlinear Schrodinger equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2000, LIII: 1222-1283
- 39 Li Y C. Persistent homoclinic orbits for nonlinear Schrodinger equation under singular perturbation. *Analysis of PDEs*, 2001, 1:1-43
- 40 Li Y C. Melnikov analysis for a singularly perturbed DSII equation. *Studies in Applied Mathematics*, 2005, 114: 285-306
- 41 Li Y C. Chaos and shadowing around a heteroclinically tubular cycle with an application to Sine-Gordon equation. *Studies in Applied Mathematics*, 2006, 116: 145-171
- 42 Feng Z C, Wiggins S. On the existence of chaos in a class of two-degree-of-freedom, damped, strongly parametrically forced mechanical systems with broken $O(2)$ symmetry. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1993, 44: 201-248
- 43 Feng Z C, Sethna P R. Global bifurcations in the motion of parametrically excited thin plates. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4: 389-408
- 44 Tien W M, Sri Namachchivaya N, Bajaj A K. Nonlinear dynamics of a shallow arch under periodic excitation-I.1:2 internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1994, 29: 349-366
- 45 Tien W M, Sri Namachchivaya N, Malhotra N. Nonlinear dynamics of a shallow arch under periodic excitation-II.1:1 internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1994, 29: 367-386
- 46 Kovacic G, Wettergren T A. Homoclinic orbits in the dynamics of resonantly driven coupled pendula. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1996, 47: 221-264
- 47 Malhotra N, Sri Namachchivaya N. Global dynamics of parametrically excited nonlinear reversible systems with nonsemisimple 1:1 resonance. *Physica D*, 1995, 89: 43-70
- 48 Malhotra N, Sri Namachchivaya N. Chaotic dynamics of shallow arch structures under 1:2 resonance. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 6: 612-619
- 49 Malhotra N, Sri Namachchivaya N. Chaotic motion of shallow arch structures under 1:1 internal resonance. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 6: 620-627.
- 50 Feng Z C, Liew K M. Global bifurcations in parametrically excited systems with zero-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 21: 249-263
- 51 Yeo M H, Lee W K. Evidences of global bifurcations of imperfect circular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 293:138-155
- 52 Samoylenko S B, Lee W K. Global bifurcations and chaos in a harmonically excited and undamped circular plate. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 47: 405-419
- 53 Vakakis A F. Relaxation oscillations, subharmonic orbits and chaos in the dynamics of a linear lattice with a local essentially nonlinear attachment. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 61: 443-463
- 54 Xu P C, Jing Z J. Silnikov's orbit in coupled Duffing's systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2000, 11: 853-858
- 55 Zhang W. Global and chaotic dynamics for a parametrically excited thin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239:1013-1036
- 56 Zhang W, Tang Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, 37: 505-526
- 57 Zhang W, Wang F X, Yao M H. Global bifurcations and chaotic dynamics in nonlinear non-planar oscillations of a parametrically excited cantilever beam. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 40: 251-279
- 58 Hu X B, Guo B L, Tam H W. Homoclinic orbits for the coupled Schrodinger-Boussinesq equation and coupled Higgs equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2003, 72: 189-190
- 59 Guo B L, Chen H L. Homoclinic orbit in a six-dimensional model of a perturbed higher-order nonlinear Schrodinger equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2004, 9: 431-441
- 60 Du Z D, Zhang W N. Melnikov method for homoclinic bifurcation in nonlinear impact oscillators. *Computers and Mathematics with Applications*, 2005, 50: 445-458
- 61 Cao D X, Zhang W. Global bifurcations and chaotic dynamics in a string-beam coupled system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 37: 858-875
- 62 Zhang W, Zu J W, Wang F X. Global bifurcations and chaotic dynamics for a rotor-active magnetic bearing system with time-varying stiffness. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 35: 586-608
- 63 Chen H K, Xu Q Y. Bifurcations and chaos of an inclined cable. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 57: 37-55
- 64 Zhang W, Li S B. Resonant chaotic motions of a buckled rectangular thin plate with parametrically and externally excitations. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 62: 673-686
- 65 Yu W Q, Chen F Q. Global bifurcations of a simply supported rectangular metallic plate subjected to a transverse harmonic excitation. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 59:129-141
- 66 Deng G F, Zhu D M. Homoclinic and heteroclinic orbits for near-integrable coupled nonlinear Schrodinger equations. *Nonlinear Analysis*, 2010, 73: 817-827
- 67 Kaper T J, Kovacic G. Multi-bump orbits homoclinic to resonance bands. *Transactions of the American mathematical Society*, 1996, 348: 3835-3887
- 68 Camassa R, Kovacic G, Tin S K. A Melnikov method for homoclinic orbits with many pulses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1998, 143:105-193
- 69 Zhang W, Yao M H. Theories of multi-pulse global bifurcations for high-dimensional systems and applications to cantilever beam. *International Journal of Modern Physics B*, 2008, 22: 4089-4141
- 70 Zhang W, Yao M H, Zhang J H. Using the extended Melnikov method to study the multi-pulse global bifurcations

- and chaos of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 319: 541-569
- 71 Zhang J H, Zhang W, Yao M H, et al. Multi-pulse Shilnikov chaotic dynamics for a non-autonomous buckled thin plate under parametric excitation. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2008, 9: 381-394
- 72 Zhang W, Zhang J H, Yao M H. The Extended Melnikov method for non-autonomous nonlinear dynamical systems and application to multi-pulse chaotic dynamics of a buckled thin plate. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11:1442-1457
- 73 Zhang W, Zhang J H, Yao M H, et al. Multi-pulse chaotic dynamics of non-autonomous nonlinear system for a laminated composite piezoelectric rectangular plate. *Acta Mechanica*, 2010, 211: 23-47
- 74 Haller G, Wiggins S. Orbits homoclinic to resonances: the Hamiltonian case. *Physics D*, 1993, 66: 298-346
- 75 Haller G. Diffusion at intersecting resonances in Hamiltonian systems. *Physics Letters A*, 1995, 200: 34-42
- 76 Haller G, Wiggins S. N-pulse homoclinic orbits in perturbations of resonant Hamiltonian systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1995, 130: 25-101
- 77 Haller G, Wiggins S. Multi-pulse jumping orbits and homoclinic trees in a modal truncation of the damped-forced nonlinear Schrödinger equation. *Physica D*, 1995, 85: 311-347
- 78 Haller G, Wiggins S. Geometry and chaos near resonant equilibria of 3-DOF Hamiltonian systems. *Physica D* 1996, 90: 319-365
- 79 Haller G. Universal homoclinic bifurcations and chaos near double resonances. *Journal of Statistical Physics*, 1997, 86: 1011-1051
- 80 Haller G. Multi-dimensional homoclinic jumping and the discretized NLS equation. *Communications in Mathematical Physics*, 1998, 193: 1-46
- 81 Haller G. Homoclinic jumping in the perturbed nonlinear Schrödinger equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1999, LII: 1-47
- 82 Haller G, Menon G, Rothos V M. Shilnikov manifolds in coupled nonlinear Schrödinger equations. *Physics Letters A*, 1999, 263: 175-185
- 83 Haller G. Chaos Near Resonance. New York, Springer-Verlag, 1999, 91-158
- 84 Malhotra N, Sri Namachchivaya N, McDonald R J. Multi-pulse orbits in the motion of flexible spinning discs. *Journal of Nonlinear Science*, 2002, 12: 1-26
- 85 McDonald R J, Sri Namachchivaya N. Pipes conveying pulsating fluid near a 0:1 resonance: Global bifurcations. *Journal of Fluids and Structures*, 2005, 21: 665-687
- 86 Yao M H, Zhang W. Multi-pulse shilnikov orbits and chaotic dynamics in nonlinear nonplanar motion of a cantilever beam. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15: 3923-3952
- 87 Yao M H, Zhang W. Multi-pulse homoclinic orbits and chaotic dynamics in motion of parametrically excited viscoelastic moving belt. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2005, 6: 37-45
- 88 Zhang W, Yao M H. Multi-pulse orbits and chaotic dynamics in motion of parametrically excited viscoelastic moving belt. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 28: 42-66
- 89 Yao M H, Zhang W. Shilnikov type multi-pulse orbits and chaotic dynamics of a parametrically and externally excited rectangular thin plate. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17: 851-875
- 90 Zhang W, Gao M J, Yao M H, et al. Higher-dimensional chaotic dynamics of a composite laminated piezoelectric rectangular plate. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2009, 52: 1989-2000
- 91 Li S B, Zhang W, Hao Y X. Multi-pulse chaotic dynamics of a functionally graded material rectangular plate with one-to-one internal resonance. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2010, 11: 351-362
- 92 Yu W Q, Chen F Q. Global bifurcations and chaos in externally excited cyclic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15: 4007-4019
- 93 Yu W Q, Chen F Q. Orbits homoclinic to resonances in a harmonically excited and undamped circular plate. *Mechanica*, 2010, 45: 567-575
- 94 Feo O D. Qualitative resonance of Shilnikov-like strange attractors, part I: Experimental evidence. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14: 873-891
- 95 Feo O D. Qualitative resonance of Shilnikov-like strange attractors, part II: Mathematical analysis. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14: 893-912
- 96 Zhang W, Yao M H, Zhan X P. Multi-pulse chaotic motions of a rotor-active magnetic bearing system with time-varying stiffness. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27: 175-186
- 97 Holmes P J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite-dimensional analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, 53: 161-174
- 98 Holmes P J, Marsden J E. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: An infinite-dimensional analysis. *Automatic*, 1978, 14: 367-384
- 99 Yang X L, Sethna P R. Local and global bifurcations in parametrically excited vibrations nearly square plates. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1990, 26: 199-220
- 100 Abe A, Kobayashi Y, Yamada G. Two-mode response of simply supported, rectangular laminated plates. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1998, 33: 675-690
- 101 Popov A A, Thompson J M, Croll J G. Bifurcation analyses in the parametrically excited vibrations of cylindrical panels. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 17: 205-225
- 102 Hadian J, Nayfeh A H. Modal interaction in circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142: 279-292
- 103 Nayfeh T A, Vakakis A F. Subharmonic traveling waves in a geometrically non-linear circular plate. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1994, 29: 233-245
- 104 Chang S I, Bajaj A K, Krousgrill C M. Non-linear vibrations and chaos in harmonically excited rectangular plates with one-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4: 433-460
- 105 Zhang W, Liu Z M, Yu P. Global dynamics of a parametrically externally excited thin plate. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 24: 245-268
- 106 Yu P, Zhang W, Bi Q S. Vibration analysis on a thin plate with the aid of computation of normal forms. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2001, 36: 597-627
- 107 Ye M, Sun Y H, Zhang W, et al. Nonlinear oscillations and chaotic dynamics of an antisymmetric cross-ply laminated composite rectangular thin plate under parametric excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 287: 723-758
- 108 Zhang W, Yao Z G, Yao M H. Periodic and chaotic dynamics of composite laminated piezoelectric rectangular plate

- with one-to-two internal resonance. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2009, 52: 731-742
- 109 Zhang W, Guo X Y, Lai S K. Research on periodic and chaotic oscillations of composite laminated plates with one-to-one internal resonance. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2009, 10: 1567-1583
- 110 Guo X Y, Zhang W, Yao M H. Nonlinear dynamics of angle-ply composite laminated thin plate with third-order shear deformation. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2010, 53: 612-622
- 111 Hao Y X, Chen L H, Zhang W, et al. Nonlinear oscillations, bifurcations and chaos of functionally graded materials plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 312: 862-892
- 112 Yang J, Hao Y X, Zhang W, et al. Nonlinear dynamic response of a functionally graded plate with a through-width surface crack. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 59: 207-219
- 113 Zhang W, Yang J, Hao Y X. Chaotic vibrations of an orthotropic FGM rectangular plate based on third-order shear deformation theory. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 59: 619-660
- 114 Hao Y X, Zhang W, Ji X L. Nonlinear dynamic response of functionally graded rectangular plates under different internal resonances. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, Article ID 738648
- 115 Zhang W, Yang X L. Transverse nonlinear vibrations of a circular spinning disk with varying rotating speed. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2010, 53: 1536-1553
- 116 Chia C Y. *Non-linear Analysis of Plate*. New York, McGraw-Hill, 1980, 110-145
- 117 Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations*, New York Wiley-Interscience, 1979, 59-79
- 118 Zhang W, Wang F X, Zu J W. Computation of normal forms for high dimensional nonlinear systems and application to nonplanar motions of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 278: 949-974.

STUDY OF GLOBAL BIFURCATIONS AND CHAOTIC DYNAMICS FOR HIGH-DIMENSIONAL NONLINEAR SYSTEMS*

ZHANG Wei[†] YAO Minghui ZHANG Junhua LI Shangbao

College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

Abstract In this paper, the history of the Melnikov theory is summarized. In 1963, the classical Melnikov method was presented by Melnikov, a Russian scientist. Until now, the Melnikov theory has been extended and developed. The development of the Melnikov method is divided into three historical periods. The extension and application of Melnikov theory are respectively summed up in each historical period, in which the situation of study and main domestic and abroad results in this research field are enumerated. The relationships, problems and deficiencies are pointed out for a variety of Melnikov theories. In addition, another global perturbation method, i.e., energy phase theory, is set forth in order to compare with two theories which are normally used to investigate multi-pulse chaotic motion in the high-dimensional nonlinear systems. The brief history, the theory and the research achievements and engineering applications of the energy phase theory are elucidated. The origin of the energy phase theory and its inherent relations with the Melnikov theory are illustrated. The subject investigated in the energy phase method is contrast with that in the extended Melnikov method to find the difference between them. Disadvantages and open problems are indicated for both the energy phase method and the extended Melnikov method. Furthermore, theoretical frames of these two methods are stated briefly. The multi-pulse chaotic dynamics for a rectangular thin plate, simply supported at the fore-edge, is analyzed by using both of them. Numerical simulation further verifies the analytical prediction. Finally, deficiencies of these two theories are described in detail. The future development direction of the global perturbation theory is demonstrated too.

* The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11290152, 11072008, 11172009, 10732020, 10872010).

[†] E-mail: sandyzhang@yahoo.com, ymh@bjut.edu.cn

Keywords high-dimensional nonlinear systems, global bifurcation, chaotic dynamics, energy phase method, extended Melnikov method



张伟, 北京工业大学机电学院教授、博士生导师. 1997 年在天津大学力学系一般力学专业获得博士学位, 1997 年破格晋升为教授. 2004 年获得国家杰出青年科学基金项目, 2003 年获得海外青年学者合作研究基金项目, 2007 年获得国家自然科学基金重点项目. 加拿大西安大略大学博士后, 加拿大多伦多大学机械与工业工程系访问教授, 香港城市大学访问教授. 2010 入选北京市属高等学校人才强教深化计划“高层次人才资助计划”. 2007 年入选北京市属高等学校人才强教计划“学术创新团队”. 发表学术论文 300 多篇, 其中在国际学术期刊发表学术论文 100 多篇, 100 多篇论文被 SCI 收录, 150 多篇论文被 EI 收录. 在科学出版社出版学术专著 3 本. 主要研究领域包括新型材料结构的高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学, 规范形的理论和应用, 高维非线性系统的全局摄动法, 航空航天飞行器结构非线性动力学, 非线性连续系统的全局动力学, 混沌运动的控制, 减振器的非线性动力学, 流体诱发的结构系统的非线性动力学, 可变体飞行器的非线性动力学与控制.



力学进展

ADVANCES IN MECHANICS

(总第 183 期)

第 43 卷第 1 期

2013 年 1 月 25 日

目次

结构和系统的动力学与控制专刊

序	陆启韶 张 伟 (1)
时滞动力系统的稳定性与分岔: 从理论走向应用	王在华 胡海岩 (3)
时滞反馈控制的若干问题	蔡国平 陈龙祥 (21)
时滞车辆跟驰模型及其分岔现象	徐 鉴 徐荣改 (29)
拟哈密顿系统非线性随机最优控制	朱位秋 应祖光 (39)
多自由度非线性随机系统的响应与稳定性	金肖玲 王 永 黄志龙 (56)
高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学研究	张 伟 姚明辉 张君华 李双宝 (63)
胞映射方法的研究和进展	徐 伟 孙春燕 孙建桥 贺 群 (91)
非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展	王 琪 庄方方 郭易圆 章 杰 房 杰 (101)
机械系统摩擦动力学的一些问题	丁 千 翟红梅 (112)
转子与定子碰摩的非线性动力学研究	江 俊 陈艳华 (132)
生物神经元系统同步转迁动力学问题	王青云 张红慧 (149)
具有刚-柔-液-控耦合的航天器动力学研究进展	岳宝增 宋小娟 (163)
绳系卫星在轨试验及地面物理仿真进展	陈 辉 文 浩 金栋平 胡海岩 (174)

· 封面图片说明 · 广义胞映射方法是研究确定性与随机动力系统的有力工具, 以往的一些改进方法在实际研究中仍存在一些不足, 主要是对动力系统流的全局演化信息反映的还不完整, 如与不稳定解(鞍)相关的不变流形的信息没有在图胞映射动力系统中得到反映. 作者对图胞映射方法进行了改进, 提出了图胞映射动力系统中状态空间的新型分类方法. 该方法通过引入新的概念, 解决了动力系统稳定流形和不稳定流形的图胞映射逼近问题. 详见徐伟、孙春燕、孙建桥、贺群文 p91.