

# 同几何分析研究进展\*

葛建立<sup>1,†</sup> 杨国来<sup>1</sup> 吕加<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 南京理工大学机械工程学院, 南京 210094

<sup>2</sup> Department of Mechanical and Industrial Engineering, The University of Iowa, Iowa City, USA

**摘要** 同几何分析 (isogeometric analysis) 是当前工程分析的一种发展趋势, 有可能对计算机辅助工程 (CAE) 产生重大影响. 同几何分析的思想是采用计算机辅助设计 (CAD) 的几何语言, 如 NURBS (non-uniform rational B-spline) 几何替代拉格朗日插值作为分析计算的基础. 这种看似简单的几何语言变化, 消除了困扰 CAE 多年的瓶颈问题, 开启了一条紧密联系分析、设计和优化的新途径. 本文论述了同几何分析的产生背景、理论、优点及其在各个领域的应用. 系统总结了同几何分析在 NURBS, T 样条基函数构建, 非结构化网格构建, 有效积分方法, 曲面修剪技术, 网格细化等基础理论方面的进展, 以及在板壳问题、大变形问题、流固耦合、结构优化、接触问题、生物力学、温度场和电磁场等领域的应用, 展示了同几何分析相对于标准多项式插值有限元法的优势.

**关键词** 同几何分析, 有限元法, 非均匀有理 B 样条, T 样条, 结构优化, 接触问题

## 1 引言

在过去的几十年间, 有限元法 (FEM) 成为应用最广泛的数值解法, 在其近 70 年的发展历程中, 解决了大量的工程问题, 创造了巨大的经济效益. 随着计算机和通用有限元软件的快速发展, 有限元法必将在未来的工程应用中发挥更大的作用.

虽然有限元法应用广泛, 理论成熟, 但是它在构造近似解时需要拓扑网格, 这成为有限元法继续发展的主要障碍. 首先, 由于目前还无法做到高精度网格自动划分, 划分网格仍需消耗大量人力. Sandia 国家实验室曾做过一项统计, 在汽车、航空航天和造船行业, 大约全部分析时间的 80% 用于网格划分及划分前的几何模型准备<sup>[1-2]</sup>, 如图 1 所示. 其次, 应力计算中, 有限元程序得到的应力不连续且精度低, 处理大变形问题时, 由于单元扭曲导致精度损失严重. 再者, 有限元网格划分工具的几何形状识别精度低, 对复杂高级曲面无法给出精确的网格离散. 最后, 在处理涉及网格畸变、网格移动如动态裂纹扩展、冲压成型等问题时需要进行

网格重构, 这不仅浪费计算时间, 而且损害计算精度. 以上困难的根源在于网格, 这是有限元法的基础, 只要使用有限元网格, 这些问题都不容易得到解决.

无网格法 (meshless method 或 meshfree method) 试图克服有限元法的这一缺陷. 无网格法的共同特点是建立求解域的代数方程组时不需要预先定义网格, 而是采用一系列节点代替求解域和它的边界, 可以彻底或部分地消除网格. 无网格法是近 20 年来国际力学界的研究热点, 目前已提出了几十种无网格法, 主要包括 EFG 法, MLPG 法, SPH 法, PIM, PAM, 单位分解法、径向基函数法等<sup>[3]</sup>. 国内, 清华大学、大连理工大学、湖南大学、上海交通大学、厦门大学、西安交通大学、湘潭大学、北京航空航天大学、南京航空航天大学等<sup>[4]</sup>在无网格法理论和应用方面做出了很大贡献. 对某些应用, 无网格法是一种重大进步, 特别是在冲击爆炸、裂纹扩展、大变形、流固耦合、天体运动等问题中具有明显优势. 然而, 无网格法的一个突出问题是放弃了底层几何, 这对于无固定形状的

收稿日期: 2012-03-21, 修回日期: 2012-07-24 doi: 10.6052/1000-0992-12-040

\* 国家自然科学基金项目 (11172139) 和南京理工大学科技发展基金项目 (XKF09065) 资助

† E-mail: 19353770@qq.com

区域如点云模型是一个优点,但是对于设计几何,底层 CAD 模型总是存在,将它们转换为离散点是不自然的,也没有必要.对几何光滑要求比较严格的情况,如接触分析,点云几何是有问题的.另外,

大部分无网格法面临一些算法上的困难,如数值积分时需要积分网格或特殊的算法处理.最后,无网格法计算量较大,不易形成通用程序等,这些缺陷制约着无网格法的工程应用.

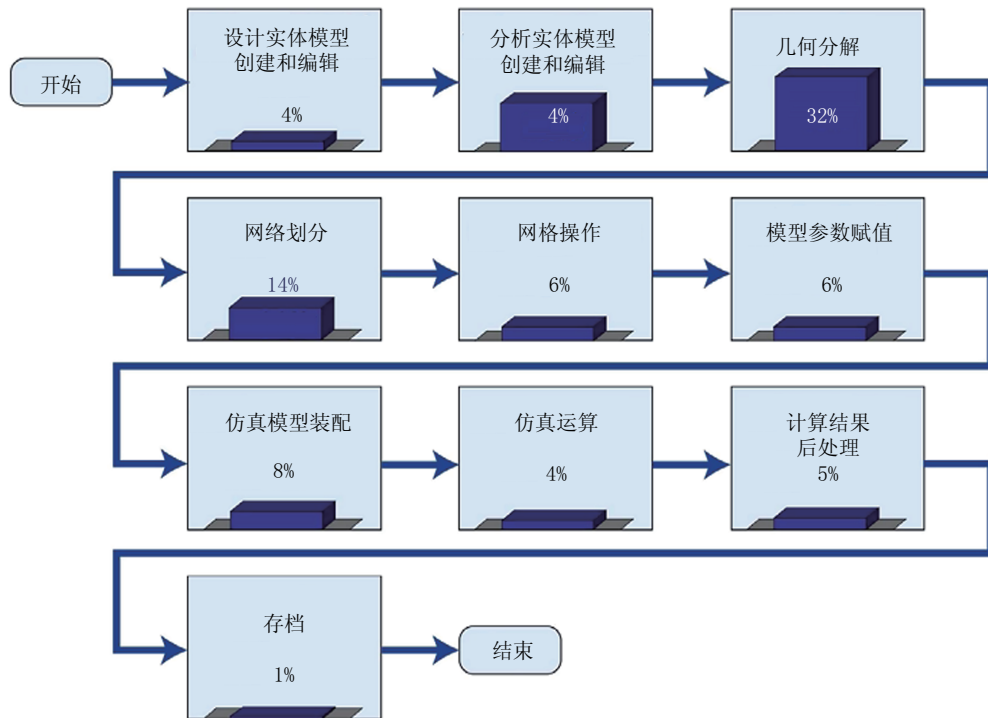


图 1 Sandia 国家实验室估计的建模和分析过程中每部分工作花费的时间

## 2 同几何分析的产生

### 2.1 产生背景

在试图解决有限元网格障碍的过程中, Hughes 等<sup>[1]</sup>从 CAD 几何造型中得到灵感,提出了同几何分析的概念,直接将构造 CAD 几何的节点信息作为有限元分析的输入信息,从而省去了网格划分过程,形成了几何与分析的直接联系.因此,从某种意义上说,同几何分析是有限元法的扩展,但是却有自己完整的计算流程和体系,而成熟的 CAD 建模技术和有限元计算为同几何分析方法提供了坚实的基础.在此之前虽然也有一些学者从提高分析精度的角度出发采用 B 样条, NURBS, T 样条等进行几何边界的精确描述,但是没有从统一 CAD 与 CAE 的高度来研究这一问题,直到 Hughes 提出了这一思想.同几何分析的吸引力在于其思想的独特性和程序的易行性,此法一经提出迅速在计算力学界引起广泛关注. Lu 几乎

与 Hughes 同时独立提出采用 NURBS 基函数进行力学分析, Lu<sup>[5]</sup>称之为 NURBS 伽辽金法,其思想与同几何分析完全一样.

传统工程实践中的典型情况是在 CAD 系统中进行设计,然后在 CAD 模型上生成网格,分析和优化依赖于有限元网格,其结果也以网格的形式展现,无法与 CAD 几何建立起直接的联系.图 2 显示了当前 CAE 实践中,设计、分析和优化是割裂的.同几何分析使得设计、分析和优化模型采用统一的描述,可以直接利用 CAD 模型进行分析和优化,分析和优化结果反过来直接指导设计,三者之间形成最佳配合,如图 3 所示.值得注意的是,在传统模式中(如图 2)信息流是单向的,除了分析和优化之间有可能是双向的.单向信息流是过去几何、分析和优化未能综合的根本原因.相比之下,新模式中(如图 3),各部分之间可以通过同一基础,即 CAD 几何,直接通讯,这为紧密结合 CAE 的 3 部分工作开启了一条新思路.

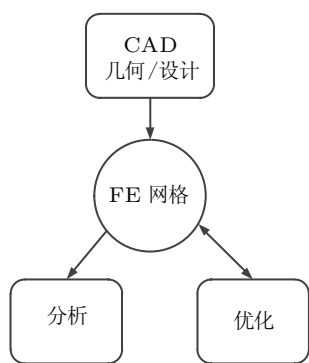


图 2 传统有限元分析与设计、优化的关系

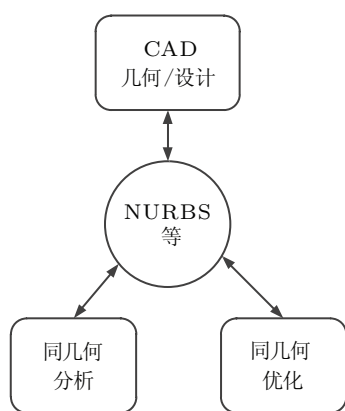


图 3 设计、分析与优化三者的最佳配合模式

### 2.2 同几何分析的基本思想

同几何分析的基本思想是用计算机辅助设计的几何语言替代拉格朗日插值作为分析计算的基础。目前，主要采用 NURBS 和 T 样条几何，但是，其他一些几何语言也在探索之中。NURBS 几何本身具有网格，一个 NURBS 实体包含若干子域（称为 NURBS 单元），在分析过程中，这些单元成为精确描述几何形状的实体单元。NURBS 单元可以细分，其基函数的次数也可以提高，但其几何形状保持不变。因此，在模型修改的整个过程中，几何形状始终固定在初始设计上，基于这个原因，Hughes 把这种方法称为同几何分析。NURBS 是一种参数几何，它通过一组控制点描述结构体，移动控制点可以改变结构体的形状，力学分析的过程即是确定控制点新位置的过程。整个分析过程采用等参原理，即独立变量的解空间与几何空间采用相同的方程描述。同几何分析将设计与分析融为一体，极大地改善了现有的设计与分析完全分离的状态，必将在工程设计中获得广泛应用。本质上，T 样条

是 NURBS 的扩展，允许坐标线在域内终止，因此更适合局部网格细化。

### 2.3 同几何分析的优点

同几何分析与标准有限元法相比，具有很多显著特点<sup>[1,6-7]</sup>：(1) 为复杂几何体提供更精确的建模方法，能精确描述常见的工程形状，如圆、圆柱体、球体、椭圆体等。(2) 即使在最粗糙的离散水平也能保证几何描述的精确性，从源头开始消除几何误差。(3) 通过消除与 CAD 几何联系的必要性，极大程度地简化复杂几何体的网格细化。(4) 具备更系统的网格细化方法，除传统的 h-细化和 p-细化外，Hughes 还提出了一种新的 k-细化技术，超越了有限单元标准的  $C^0$  连续，并且比传统的 p-细化精度更高，更有效。(5) NURBS 生成的方程组比高阶有限元得到的齐次性更好，这在方程求解策略上有些优势。NURBS 满足变差缩减特性，不像拉格朗日插值多项式随着阶次提高而剧烈震荡。(6) 由于几何和分析采用统一的描述，因此可以直接利用 CAD 模型来分析，有望实现分析、设计和优化的一体化。

### 2.4 同几何分析算法

#### 2.4.1 NURBS 基函数及算法公式

##### (1) B 样条基函数

B 样条是由基函数的线性组合构造的分段多项式线条，基函数由节点矢量构建，而节点矢量是参数空间中的非递减序列，如  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+p+1}\}$ ，式中  $u_i$  称为节点。基函数由 Cox-de Boor 递推公式定义为

$$\text{当 } p = 0 \text{ 时,} \\ N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{当 } p > 0 \text{ 时,} \\ N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2)$$

假设  $U = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$ ，其基函数如图 4 所示。

B 样条曲线可以表示为

$$C(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) P_i \quad (3)$$

式中  $P_i$  为控制点，利用上面的节点矢量  $U$ ，控制点设为  $\{0, 0\}$ ,  $\{0.5, 1\}$ ,  $\{2, 1.5\}$ ,  $\{1, -1\}$ ,  $\{3, -1\}$ ，

{2.5, 0.5}, {3.5, 1}, {5, 0}, 定义的 B 样条曲线如图 5 所示.

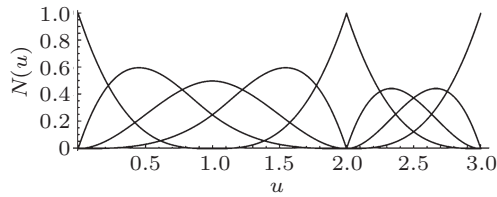


图 4 B 样条基函数

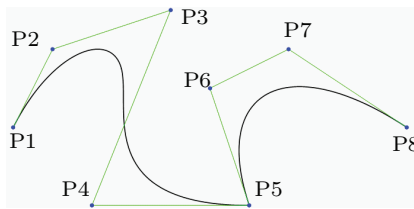


图 5 B 样条示意图

(2) NURBS 曲线

NURBS 是 B 样条的有理形式.  $p$  阶 NURBS 曲线定义为

$$C(u) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u)\omega_i P_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u)\omega_i} \quad (4)$$

式中  $w$  为权因子,  $P_i$  为控制点.

(3)NURBS 张量积曲面

多变量 NURBS 可以用张量积构建. 对于 NURBS 曲面, 假定两个节点矢量  $U^1 = \{u_1^1, u_2^1, \dots, u_{n+p+1}^1\}$  和  $U^2 = \{u_1^2, u_2^2, \dots, u_{m+q+1}^2\}$ , 以及  $n \times m$  个控制点构成的控制网格, 可表示为

$$S(u^1, u^2) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(u^1)N_{j,q}(u^2)\omega_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(u^1)N_{j,q}(u^2)\omega_{ij}} \quad (5)$$

也可写成

$$S(u^1, u^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(u^1, u^2) P_{ij} \quad (6)$$

$$R_{i,j}(u^1, u^2) := \frac{N_{i,p}(u^1)N_{j,q}(u^2)\omega_{ij}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(u^1)N_{l,q}(u^2)\omega_{kl}} \quad (7)$$



图 6 NURBS 张量积曲面

同样, 一个三变量 NURBS 实体可以表示为

$$V(u^1, u^2, u^3) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(u^1)N_{j,q}(u^2)N_{k,r}(u^3)\omega_{ijk} P_{ijk}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(u^1)N_{j,q}(u^2)N_{k,r}(u^3)\omega_{ijk}} \quad (8)$$

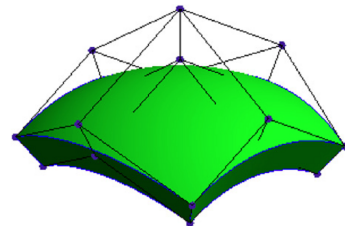


图 7 NURBS 张量积球壳

二维线弹性问题的弱形式为

$$\int_P \sigma(\epsilon(u)) : \epsilon(\delta u) da - \int_P \rho b \cdot \delta u da - \int_{\partial P_t} \bar{t} \cdot \delta u ds = 0 \quad (9)$$

式中,  $\sigma$  为柯西应力,  $\epsilon$  为应变张量,  $b$  为体力,  $\bar{t}$  为边界上施加的外力,  $\delta u$  为虚位移.

应变可表示为

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Nele} [u_j \otimes \nabla N_j + \nabla N_j \otimes u_j] \quad (10)$$

式中  $N_j$  为 NURBS 基函数,  $\nabla$  表示物理坐标的梯度. 具体分析过程与有限元方法相似, 最后得出的矩阵方程为

$$Kd = F \quad (11)$$

式中  $d$  为控制点位移向量, 单元刚度矩阵和载荷列阵分别为

$$K_{i,j} = \int_P B_i^T D B_j da \quad (12a)$$

$$F_i = \int_p N_i b da + \int_{\partial P_t} N_i \bar{t} ds \quad (12b)$$

$B_i$  为应变-位移矩阵

$$\epsilon = \sum_{j=1}^{Nele} B_j u_j, \quad B_j = \begin{bmatrix} N_{j,x} & 0 \\ 0 & N_{j,y} \\ N_{j,y} & N_{j,x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

### 2.4.2 计算流程

基于 NURBS 的同几何分析流程如下<sup>[1]</sup>:

- (1) 通过节点向量积定义 NURBS 片;
- (2) 通过节点插值将计算域细分为单元;
- (3) 由少量单元组成每个基函数的支撑域;
- (4) 由基函数的控制点定义几何;

(5) 采用等参概念, 即场变量与几何采用相同的基函数表示, 基函数的系数是自由度或控制变量;

(6) 采用节点插值或阶次提高技术进行网格细化;

(7) 等参 NURBS 片构建的数组采用类似于有限元的方法组装成全局数组;

(8) 施加 Dirichlet 边界条件需要做些考虑. 最粗糙的方法是加在控制变量上, 这是一种近似, 会导致比较大的误差. 然而, 对于一些特殊情况, 如奇次边界条件, 该方法是精确的. Dirichlet 边界条件常常通过变分近似法或几何近似法施加.

NURBS 同几何分析与有限元分析的关系如图 8 所示.

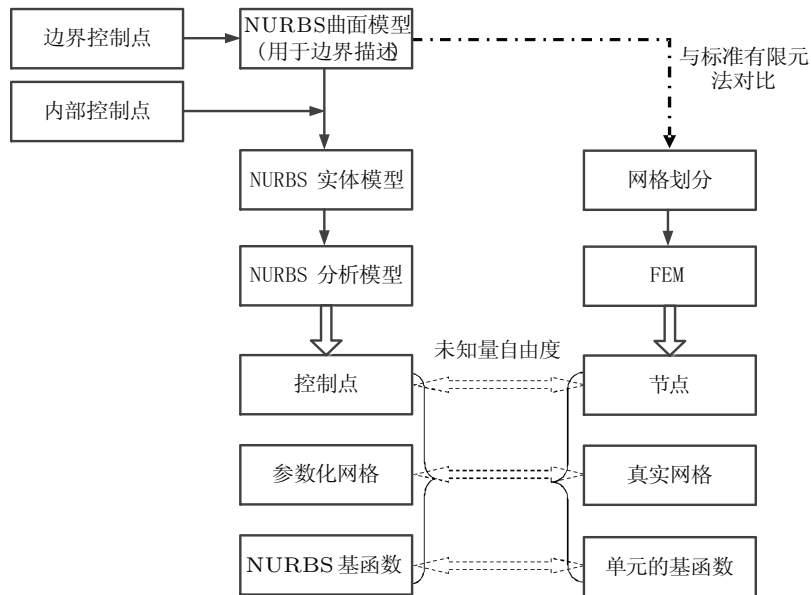


图 8 同几何分析流程与标准有限元法对比

### 2.4.3 算例

#### (1) 平面上无限大带圆孔方板

一个正方形板, 边长  $L = 200 \text{ mm}$ , 中心有一小孔, 半径  $R = 2 \text{ mm}$ , 上下边受均布拉伸载荷, 面力集度  $q = 1 \text{ MPa}$ , 如图 9 所示. 材料参数:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\mu = 0.3$ , 为平面应力模型. 当边长  $L$  为无限大时,  $y = 0$  截面上理论解为

$$\sigma_{yy}|_{y=0} = \frac{q}{2} \left( 2 + \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right)$$

式中,  $R$  为圆孔半径,  $r$  为截面上一点距离圆心的距离.  $y = 0$  截面上孔边 ( $r = R$ ) 应力  $\sigma_{yy} = 3q$ , 所以理论应力集中系数为 3.0.

用同几何方法计算最大应力及应力分布. 根据精度要求对网格进行了细化, 各级细化方案如图 10 所示, 最后求得的应力分布如图 11 所示, 采用同几何分析即使在较粗网格情况下得到的应力集中系数也比较接近理论解 3.0.

#### (2) 二头肌的同几何分析

Lu<sup>[8]</sup> 研究了软生物组织的同几何分析, 给出了二头肌的 NURBS 圆柱单元建模, 该方法和有限元法相比, 可采用较少的自由度, 得到更合理的分析结果, 并且同几何分析得到的应力是连续的, 有限元法得到的应力不连续. 图 12 是二头肌的 NURBS 模型, 图 13 是二头肌的变形和应力.

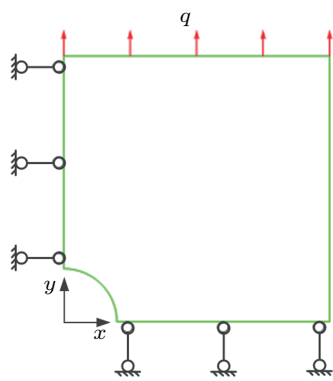
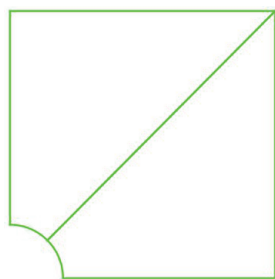
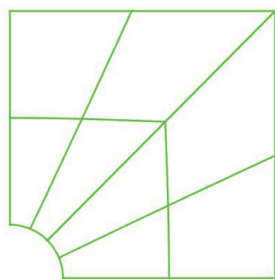


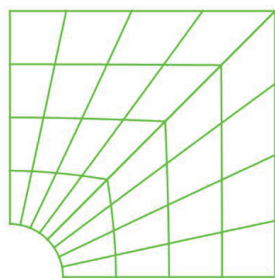
图 9 带孔平板的分析模型 (10 mm × 10 mm 子域)



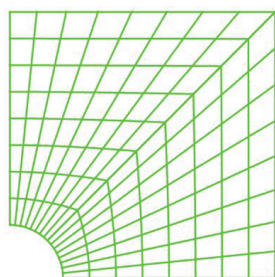
(a) 网格 1



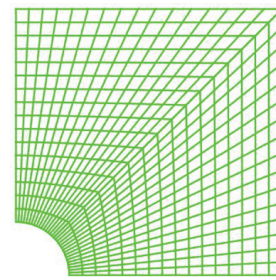
(b) 网格 2



(c) 网格 3

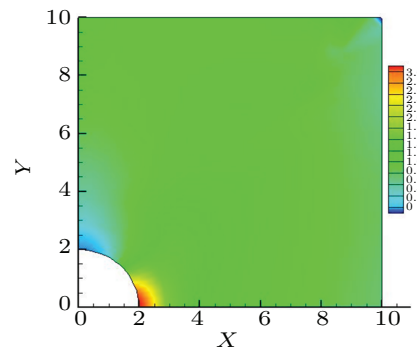


(d) 网格 4

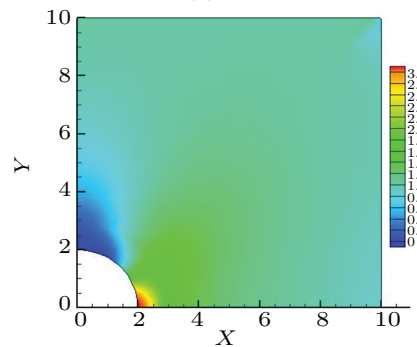


(e) 网格 5

图 10 网格划分方案 (h 细化方案)



(a) 网格 3



(b) 网格 5

图 11 y 方向应力分布云图

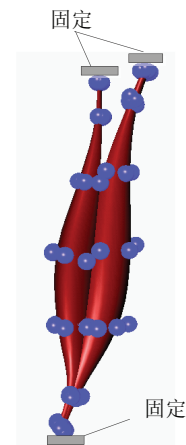


图 12 二头肌的 NURBS 模型 (每个分支 63 个控制点)

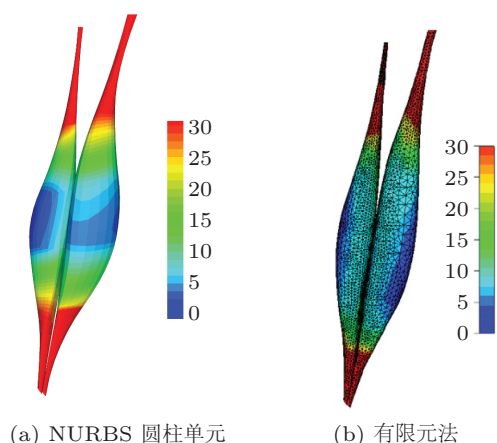


图 13 二头肌的变形和应力

### 3 同几何分析的发展状况

该方法提出后在国际上引起很大反响, 各国学者在基函数构建、有效积分、曲面修剪、应用领域扩展等方面做了很多工作. Cottrell 等<sup>[9]</sup>于 2009 年出版了一部有关同几何分析的专著, 对同几何分析的理论、算法及其应用做了较为详细的描述. 本文将从以下几个方面叙述同几何分析的进展.

#### 3.1 算法研究进展

Hughes 在其论文<sup>[1]</sup>中采用的是 NURBS 基函数, 但同时提出也可采用其他基函数. NURBS 有很多优点, 如可进行任意表面的建模, 是 CAD 系统事实上的标准等. 另外还拥有很多优良的数学特性, 如非负性、单位分解特性、基函数的线性无关性、局部支撑特性等, 这使得 NURBS 成为同几何分析中最常用的基函数形式. 随着应用的深入, NURBS 本身的不足不断暴露出来, 如 NURBS 采用张量积形式, 使得局部网格细化效率不高, 很多形状无法用一个简单密封的 NURBS 面表示; 面与面交界处有间隙或重叠等. 这些缺点必须改进, 才能获得更广泛的应用. 很多学者尝试将 T 样条用于同几何分析. Sederberg<sup>[10]</sup>最早将其引入计算机制图, T 样条很有希望在 CAD 中获得广泛应用. T 样条是 NURBS 的扩展, 除具有 NURBS 的一些特点外, 还具有其自身优点, 如更适合局部网格细化, 这是高效数值算法的一个重要因素; 能消除面与面连接处的间隙或重叠等. Bazilevs 等<sup>[2]</sup>探索了基于 T 样条基函数的同几何分析, 用于简单的流体力学和结构力学计算, 获得了很好的效果. Dörfler 等<sup>[11]</sup>提出一种局部网格细化的 T 样条法,

通过 T 样条将后验误差估计技术与网格细化联合起来. Wang 等<sup>[12]</sup>提出一种将任意非结构化二次网格转化为标准 T 样条表面的方法. Beirão da Veiga 等<sup>[13]</sup>采用 T 样条对两块标准张量积面片组合结构进行了同几何分析理论研究, 并在参数空间和物理空间确立了最优近似特性. 虽然 T 样条允许局部自适应网格细化, 但是这种细化的节点插入很复杂, 特别是对三维问题, 并且在一般的 T 网格中难保证基函数的线性无关性. 为了解决这个问题, Nguyen-Thanh 等<sup>[14]</sup>提出采用多项式分层 T 样条 (PHT 样条) 进行同几何分析, 并成功应用于二维问题. 从线性代数的观点看, NURBS 空间和 T 样条空间是 PHT 样条空间的一个子空间, PHT 样条继承了 NURBS 和 T 样条的所有优点, PHT 样条与 NURBS 或 T 样条之间的转换比较容易, 而在实际应用中 NURBS 和 T 样条之间的转换存在瓶颈. Borden 等<sup>[15-16]</sup>构建了 Bézier 单元和 Bézier 提取算子 (extraction operator), Bézier 单元和 Bézier 提取算子为同几何分析提供了一种单元结构, 这种单元结构可直接并入现有的有限元程序, 而不需修改单元的形式、装配方法和标准数据处理阵列. Costantini<sup>[17]</sup>, Manni 等<sup>[18]</sup>提出采用广义 B 样条进行同几何分析, 广义 B 样条具有代数 B 样条和 NURBS 所有的基本性质, 且不受有理函数的限制, 在微分和积分时与代数 B 样条完全相似. Kim 等<sup>[19-20]</sup>在修剪表面 (trimmed surface) 技术方面做了大量的研究工作, 侧重解决 NURBS 同几何分析的两个技术难题: (1) 关键位置的局部细分技术; (2) 任意复杂的拓扑学问题, 研究了几何模型中包含修剪表面的同几何分析.

Hughes 提出同几何分析的概念后, Bazilevs<sup>[21]</sup>对其进行了数学分析, 证明了同几何分析的稳定性和最优收敛性. Cottrell 等<sup>[22]</sup>研究了基函数光滑性对解精度的影响, 指出在结构振动问题中, 随着光滑性的增加,  $k$  细化方法解的精确度比传统的  $C^0$  连续  $p$  细化方法有很大提高. 徐岗等<sup>[23]</sup>研究了同几何分析中的  $r$ - $p$  型细化方法. Elguedj 等<sup>[24]</sup>基于修正最小势能原理, 给出了处理弹塑性大变形不可压缩约束的投影方法, 该法对线性和高阶单元均有效. Lu<sup>[8,25]</sup>将同几何分析的概念延伸到计算机图形几何, 提出了光滑单元的概念, 包括圆柱单元和圆单元, 这些研究为光滑结构体特别是生物体力学分析提供了一条新思路. Lipton<sup>[26]</sup>等研究了严重扭曲单元情况下同几何结构离散的鲁棒性. Cohen 等<sup>[27]</sup>在建模中考虑了网格质量对分

析的影响. Nagy 等<sup>[28]</sup>提出了一种同几何分析应力约束变分公式, 王东东<sup>[29]</sup>, 轩军长等<sup>[30]</sup>提出一种用于 NURBS 同几何分析的应变光滑算法, 该法基于拟应变法和应变光滑处理技术, 将单元分割为若干个子域, 通过单元子域的应变平均定义应变光滑. NURBS 基函数一般不具有插值特性, 直接在 NURBS 控制点施加本质边界条件会由于收敛速率恶化而导致明显误差. 鉴于此, 王东东<sup>[31]</sup>提出一种增强处理本质边界条件的方法, 通过一种变换将控制变量与本质边界上的配置节点值联系起来, 并在随后研究了边界条件施加方式对三维问题计算精度的影响<sup>[32]</sup>. 陈涛<sup>[33]</sup>, Embar<sup>[34]</sup>等采用 Nitsche 法施加本质边界条件, 可以获得较优的收敛速率. RypI 等<sup>[35]</sup>设法将同几何分析融入到面向对象的有限元环境, 利用有限元代码的现有功能设计了类层次结构和相应的方法. Beirão da Veiga 等<sup>[36]</sup>对同几何分析中 NURBS 的近似特性进行了理论研究, 获得了以网格尺寸, 阶数和整体规则度表示的误差估计, 指出了光滑性在近似特性中的地位. Van der Zee 等<sup>[37]</sup>研究了自由边界问题面向目标的误差估计. Hughes 等<sup>[38]</sup>研究了同几何分析的有效积分, 提出了有效积分的“半点法则”, 指出最优法则积分点大致等于自由度数的一半, 或者等于所考虑空间基函数数目的一半, 且独立于多项式基函数的阶次. Echter 等<sup>[39]</sup>研究了 NURBS 同几何分析的数值效率和单元锁死问题, 发展一种 NURBS 离散剪切间隙 (discrete shear gap) 单元, 避免了锁死现象. Evans 等<sup>[40]</sup>基于 Kolmogorov 的  $n$  宽度理论  $k$  方法, 提出一种考察同几何离散近似特性的理论和计算框架. 徐岗等<sup>[41]</sup>研究了计算域的参数化问题, 以及参数化对近似解的影响. Schmidt 等<sup>[42]</sup>研究了结构设计过程的一体化实现, Aigner 等<sup>[43]</sup>研究了同几何分析中扫掠体的参数化问题. 这些研究为同几何分析的发展奠定了良好的基础.

### 3.2 板壳问题

同几何分析的思想产生之后, 很自然地延伸到板壳问题. 薄梁板壳问题要求近似函数具有  $C^1$  连续性, 是传统有限元分析的难点之一. Kiendl 等<sup>[44]</sup>提出了一种以 NURBS 作为基函数的 Kirchhoff-Love 壳单元, 该单元是几何非线性的, 因此也适用于非常薄的大转动壳体. 由于仅考虑了壳中面上的 3 个位移自由度, 转角自由度由位移控制变量得到, 所以单元的自由度数非常少. 随后, Kiendl<sup>[45]</sup>提出了一种多片组合无转动薄壳结构

分析的同几何法, 每片壳的内部是  $C^1$  或更高阶连续的, 因此内部使用了基于高阶连续的 Kirchhoff-Love 壳理论. Uhm 等<sup>[46]</sup>将 T 样条用于壳结构的同几何分析, 通过将每个控制点映射到表面上的一个几何点, 解决了控制点上无法定义转动自由度的限制. Benson<sup>[47]</sup>提出一种  $C^k$  连续无转动自由度大变形壳的同几何分析方法, 在经典壳基准问题上证明该方法的高阶单元用于大变形问题是有效的. 高阶拉格朗日元对网格畸变非常明显, 这种缺陷使其不能应用在大变形问题中, 而基于 NURBS 基函数的同几何分析克服了这种缺陷, 可以应用在包括薄片金属冲压和汽车碰撞等大变形中. Nguyen-Thanh 等<sup>[48]</sup>提出了采用多项式分层 T 网格样条 (PHT-spline) 进行薄壳的同几何分析, PHT 样条是  $C^1$  连续的, 因此可应用 Kirchhoff-Love 壳理论的原始形式, 避免引入转动自由度. Benson<sup>[49]</sup>提出一种基于退化实体的 Reissner-Mindlin 壳公式, 该方法可用于解决线弹性和非线性弹塑性问题, 并为 LS-DYNA 软件定义了一种壳单元. 张汉杰等<sup>[50]</sup>将几何精确 NURBS 有限元法应用到薄梁板问题, 研究了该方法在典型梁板问题求解中的收敛特性.

### 3.3 同几何分析的结构优化

结构优化是工程界的永恒追求, 结构优化最初采用经典解析方法求解, 如变分法或微分法. 1960 年 Schmit<sup>[51]</sup>将有限元分析和非线性数学规划法相结合进行结构优化. 近几十年来, 计算机技术及其在结构分析中的普遍应用, 促进了结构优化数值方法的发展. 目前, 结构优化设计已从低层次的尺寸、形状优化发展到高层次的拓扑优化、结构与多学科优化阶段.

在大部分结构优化方法中, 常采用有限元法进行结构响应分析和灵敏度计算. 然而, 这种方法遇到了一些瓶颈. 网格内在几何近似会在响应分析时导致精度问题, 在设计灵敏度分析时会更不利. 在形状优化中, 需要繁琐的参数化过程和耗时的网格重划分, 形状优化设计中最容易选择的设计变量是有限元节点坐标, 这会导致一些困难, 如设计变量过多, 不规则边界造成的不现实设计, 在优化过程中维持足够有限元网络的困难. 在拓扑优化中, 设计结果取决于初始设计空间, 对初始有限元网格有依赖性, 并且需要额外后处理与 CAD 系统进行数据交换. 这些缺点是由于设计模型与分析模型采用不同的数学语言引起的: 在设计和

几何建模中采用样条基函数,而在分析模型中采用拉格朗日或埃尔米特多项式.这迫切需要二者之间的紧密结合,同几何分析提供了一种很有前途的将设计模型与分析模型结合在一起的方法.

首先是在尺寸和形状优化方面出现了一些研究成果,同几何分析用于形状优化设计最初是由 Hughes 及其合作者<sup>[1]</sup>提出的.由于在几何定义的早期离散形状灵敏度分析域,因此可以精确地计算法向量和法曲率,提供非常精确的形状灵敏度.该法中 NURBS 的控制点或系数作为设计变量,因此不需要进一步设计参数化且光滑设计变量是可能的.而且, NURBS 基函数通常提供光滑非局部设计速度场,这在有限元优化设计中是不容易计算的,但对形状优化却是必须的. Wall<sup>[52]</sup>给出了一种基于同几何分析的结构形状优化设计框架,并将其应用到二维线弹性结构的最优化问题. Cho 和 Ha<sup>[53]</sup>研究了同几何结构形状优化,得到了平面弹性问题的连续体伴随矩阵灵敏度分析法. Ha<sup>[54-55]</sup>在同几何结构优化中采用了 T 样条,在产生相同优化设计形状的情况下,可获得更高效的求解过程. Nagy 等<sup>[56]</sup>将同几何分析用于曲梁的尺寸和形状优化,提出了多级设计方法. Nagy<sup>[57]</sup>还研究了最大基频弹性拱形结构同几何设计,设计考虑了最优形状和刚度分布. Seo 等<sup>[58]</sup>研究了二维和板壳问题形状优化,并通过修剪技术和修剪表面分析将其扩展到拓扑优化. Seo 等<sup>[59]</sup>采用样条表面和修剪曲线表示设计模型的外部 and 内部边界,以样条表面和修剪曲线的控制点坐标为设计变量,在修剪表面分析中提出了新的控制点灵敏度分析公式和内前面 (inner front) 合并算法,很好地解决了传统网格拓扑优化中很难处理的设计空间和载荷的依赖性问题. Manh 等<sup>[60]</sup>研究了形状自由变化大变形振动膜的同几何形状优化设计,采用 3 种不同的 B 样条参数化求解域的边界和内部,尝试了两种数值方法,即基于构建拟共形映射法和基于弹簧单元模型,将 B 样条参数化从分析域的边界扩展到内部. Qian<sup>[61]</sup>在形状优化中将 NURBS 控制点位置和权重均作为设计变量,提出了一种计算 NURBS 控制点位置和权重的完全灵敏度解析方法,可精确计算灵敏度,已成功应用于梯度形状优化. Qian 和 Sigmund<sup>[62]</sup>提出了一种将同几何形状优化的类矩形 NURBS 面片扩展到布局复杂的几何,并将该方法成功用于复杂几何边界光子水晶的优化设计方法. Hassani 等<sup>[63]</sup>使用了基于控制点的 SIMP 法 (solid isotropic ma-

terial with penalization), 材料密度在整个设计域作为连续函数,为了防止多孔介质构型布局,采用类似于 SIMP 方法的惩罚技术,推导应用了优化准则 (optimality criteria), 与基于单元的 SIMP 法拓扑优化不同的是结构布局独立于离散控制点数目,且没有棋盘格.

### 3.4 同几何接触分析

接触分析是计算力学领域最具挑战性的问题之一,其困难在于接触关系的非线性和非光滑性,非光滑性表明了接触问题的物理本质 (不等式约束,黏滑运动条件等) 和空间离散的几何不连续性.目前,常用的有限元接触分析存在一些技术瓶颈.首先,有限元法采用非光滑边界逼近光滑边界,人为导致接触边界的不光滑性.几何不精确会在一些情况下直接导致计算结果误差过大,如常见的球面接触或圆柱面接触,会使接触应力的偏差达到 310%<sup>[64]</sup>.其次,有限元法在解决接触问题时,其搜索算法为单元对单元的搜索或者分块搜索,由于单元边界处法线方向不唯一而导致搜索困难 (如图 14 所示),并且搜索成本高.第三,传统的有限元接触分析采用单元小平面描述接触面,这种方法对低曲率表面和小变形很有效,当遇到任意大变形或大滑移时会出现问题,主要表现为: (1) 当接触点滑过位于表面上的单元边界时,接触法线会出现跳转现象,从而使接触力发生人为改变,产生虚假振荡,导致非线性算法的数值困难; (2) 必须跟踪接触点在单元边界上的位置,这是因为一旦接触点进入一个新的单元,需要更新单元几何,这将提高计算量和计算的复杂性.

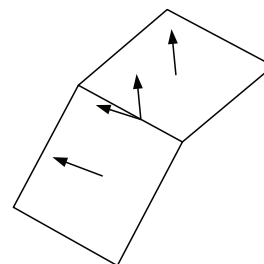


图 14 单元边界处的法线不唯一示意图

与有限元法相比,采用同几何分析研究接触问题具有很多优点: (1) 保留了几何连续性,如果几何体本身是光滑的,可用完全光滑的几何描述,没有人为的奇点和尖点,这一点对接触分析是很重要的; (2) 消除或极大地减少人为网格干涉; (3)

支持变分一致性, 容易实现面片接触搜索. 这是因为在 NURBS 中, 一个 NURBS 块是一个整体的参数化实体, 对接触面及其所围体积具有完全相同的数据结构, 因此接触搜索或跟踪可以跨过整个实体. 由此可见, 由于有限元分析利用网格几何逼近精确几何, 会导致接触分析中的一系列数值计算困难, 同几何分析方法将 NURBS 几何与分析融为一体, 能够解决复杂表面接触问题.

同几何接触分析刚刚起步. Lu<sup>[65]</sup> 首先提出了接触问题同几何分析的框架, 在几何描述和分析中统一采用 NURBS 基函数. 相对于基于有限单元的搜索算法, 提出了基于面片的搜索算法, 并发展了一种满足变分一致性的面-面光滑接触公式. 该方法在精度和收敛性方面均优于拉格朗日插值有限元法. Temizer 等<sup>[66]</sup> 提出了 NURBS 同几何分析的点-面接触算法, 定性研究了各种有限变形无摩擦热弹接触问题, 得到了令人满意的结果. 对 Hertz 问题的定量研究表明采用标准的点-面算法需释放力学接触约束, 而改进的黏合 (mortar) 点-面算法可以得到强劲精确的结果. De Lorenzis<sup>[67]</sup> 将 NURBS 同几何分析用于二维大变形 Coulomb 摩擦接触问题. Stadler 等<sup>[68]</sup> 在有限元框架下采用 NURBS 接触面, 得到  $C^n$  连续的有限变形弹性接触模型, 并用于分析二维问题. De Lorenzis 等<sup>[69-70]</sup> 将 NURBS 同几何分析用于三维无摩擦大变形光滑接触问题和有摩擦接触问题, 文中分别采用任意阶 NURBS 和拉格朗日单元离散接触体, 采用粘合法处理接触约束, 即在 NURBS 离散时, 接触约束施加在控制点上, 而拉格朗日离散时施加在节点上, 接触约束精确满足增强拉格朗日公式. 结果表明在相同的粘合接触公式中采用 NURBS 离散比拉格朗日离散性能优越. 在小变形和大变形的情况下, NURBS 离散的接触力始终是非负的且对插值的阶次不敏感, 这与实际情况一致, 而拉格朗日离散对插值阶次比较敏感, 有虚假数值振荡和不真实的负值. 在大变形和大滑移问题中 NURBS 离散得到的反力-时间曲线是光滑的, 提高参数化阶次能够改善结果性能, 拉格朗日插值得到的曲线有不真实振荡, 并且无法通过提高插值阶次减缓这种想象, 甚至会影响到数值计算的收敛性. Kim<sup>[71]</sup> 提出一种新的接触匹配算法用于精确确定同几何分析框架下的接触面.

### 3.5 湍流和流固耦合问题

样条函数能精确描述光滑的几何形状, 应用

在流固耦合问题中, 能更真实地反映实际物理场. 在湍流和流固耦合方面的进展主要是 Bazilevs 及其团队的工作. Bazilevs<sup>[72]</sup> 提出了一种 NURBS 同几何流固耦合公式, 该方法耦合不可压缩液体和非线性弹性固体, 并用于动脉血流问题建模和分析, 所需的 NURBS 几何直接从病人成像数据提取. Zhang<sup>[73]</sup> 描述了一种通过影像数据为病人特异性血管几何建模构建六面体 NURBS 网格的方法, 并将该网格用于血流量的分析. Bazilevs 在文献<sup>[74]</sup>中提出一种完全耦合的整体公式, 求解移动域上的不可压缩液体和非线性超弹固体相互作用的问题, 并将该方法用于 Jarvik 2000 左心室辅助装置植入病人胸主动脉血流量的分析<sup>[75]</sup>. Bazilevs 在其博士论文中发展了多尺度不可压缩流体的湍流模型<sup>[76]</sup>, 提出了流固耦合问题的 FSI 公式和推导形函雅克比矩阵的方法, 研究了该模型中基函数连续性的重要作用<sup>[77]</sup>、不可压缩液体的大尺度涡流仿真<sup>[78]</sup>、Taylor-Couette 流动<sup>[79]</sup>、以及不可伸缩网格上弱边界条件管内湍流问题<sup>[80]</sup>. Gamnitzer<sup>[81]</sup> 对变分多尺度方法进行了改进. Bazilevs<sup>[82]</sup> 将同几何分析用于风动涡轮叶片预弯形状的精确预测, 该程序仅包含流体和结构力学的单向联系, 避免求解二者的耦合问题. 随后, Bazilevs<sup>[83]</sup> 研究了复合材料叶片流固耦合问题的风动涡轮转子全尺寸三维仿真. Hsu<sup>[84]</sup> 提出了风力涡轮机空气动力学的高性能计算方法. Akkerman<sup>[85]</sup> 采用高阶连续基函数研究了自由表面流动的同几何分析. Calo<sup>[86]</sup> 研究了血流量多场模型及其在冠脉血流病人药物传输方面的应用, Hossain<sup>[87]</sup> 建立了病人冠状动脉管壁药品和纳米胶囊耦合传输的三维数学模型, 采用同几何分析方法求解.

### 3.6 同几何分析的其他应用

除了以上几个领域之外, 同几何分析在其他领域也获得了广泛的应用. Cottrell<sup>[88]</sup> 等将该法用于求解结构振动问题, 模型包括杆、薄梁、薄膜、薄板和三维实体, 给出了无转动弯曲单元的初步研究结果. Buffa<sup>[89]</sup> 研究了二维空间麦克斯韦方程的同几何离散方法. Gomez 等<sup>[90]</sup> 将该法用于求解等温 Navier-Stokes-Korteweg 方程, 考虑了水汽两相流, Manni<sup>[91]</sup> 用该方法研究对流-扩散问题, Anders<sup>[92]</sup> 采用该方法研究两种混合物微观结构的热扩散问题. Gómez<sup>[93]</sup> 研究了 Cahn-Hilliard 相场模型的同几何分析. Elguedj<sup>[94]</sup> 将同几何分析

用于基于数字图像相关法 (DIC) 的应变域测量, 获得较好的效果. Haasemann<sup>[95]</sup> 应用同几何分析计算织物增强复合材料的等效材料特性. 张勇<sup>[96]</sup> 在比例边界有限元 (SBFEM) 的框架下采用同几何分析思想, 使得单元间的应力应变场有更高阶连续性.

#### 4 挑战

同几何分析的挑战仍在于其几何. NURBS 的吸引人之处是其几何连续性, 但是这种连续性在非结构化网格中很难构建. B 样条是通过设计连续性可控的分片多项式得到的, 在一维问题中很容易构建连续性, 但是在多维非结构化网格中却不容易. 张量积 NURBS 本质上是一维的, 如两变量 NURBS 曲面可以看作曲线束. 如何从一维几何得到真正的非结构化网格是一个很大的挑战. T 样条提供了一种方法, 但是 T 样条本身拓扑仍然是张量积几何. Wang<sup>[12]</sup> 尝试构建非结构化 T 样条网格, 代价是允许奇异点的存在. 三角形 B 样条有可能解决这一难题, 但是目前实施起来非常复杂<sup>[97]</sup>, 还无法支持大规模的计算.

#### 5 结论

同几何分析与有限元法有很多类似之处, 但是它将设计模型与分析模型采用统一的几何描述, 可以克服有限元法的很多缺点. 同几何分析可以借助于成熟的有限元算法框架, 而将其基函数改为 NURBS 或 T 样条基函数来实现, 是一种很有前途的数值计算方法, 其最终目标是实现设计、分析与优化一体化的软件平台, 但是要实现同几何分析的目标, 还有许多基础性的研究工作急需完善.

#### 参考文献

- Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39-41): 4135-4195
- Bazilevs Y, Calo V M, Cottrell J A, et al. Isogeometric analysis using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(5-8): 229-263
- Liu G R. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. 2nd ed. Singapore: CRC Press, 2009. 1-20
- 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. *力学进展*, 2009, 39(1): 1-36
- Zhou X L, Lu J. NURBS-based Galerkin method and application to skeletal muscle modeling. In: *Proceedings of the 2005 ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, Cambridge, 2005-06-13-15
- Fischer P, Klassen M, Mergheim J, et al. Isogeometric analysis of 2D gradient elasticity. *Computational Mechanics*, 2011, 47(3): 325-334
- Elguedj T, Bazilevs Y, Calo V M, et al. B and F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(33-40): 2732-2762
- Lu J, Zhou X L. Cylindrical element: Isogeometric model of continuum rod. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(1-4): 233-241
- Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. Chichester: John Wiley and Sons, Ltd, 2009
- Sederberg T W, Zheng J, Bakenov A, et al. T-splines and T-NURCCs. *ACM Transactions on Graphics*, 2003, 22(3): 477-484
- Dörfel M R, Jüttler B, Simeon B. Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(5-8): 264-275
- Wang W, Zhang Y, Scott M A, et al. Converting an unstructured quadrilateral mesh to a standard T-spline surface. *Computational Mechanics*, 2011, 48(4): 477-498
- Beirão da Veiga L, Buffa A, Cho D, et al. Isogeometric analysis using T-splines on two-patch geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(21-22): 1787-1803
- Nguyen-Thanh N, Nguyen-Xuan H, Bordas S P A, et al. Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical T-meshes for two-dimensional elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(21-22): 1892-1908
- Borden M J, Scott M A, Evans J A, et al. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 87(1-5): 15-47
- Scott M A, Borden M J, Verhoosel C V, et al. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of T-splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 88(2): 126-156
- Costantini P, Manni C, Pelosi F, et al. Quasi-interpolation in isogeometric analysis based on generalized B-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, 27(8): 656-668
- Manni C, Pelosi F, Lucia Sampoli M. Generalized B-splines as a tool in isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(5-8): 867-881
- Kim H J, Seo Y D, Youn S K. Isogeometric analysis for trimmed CAD surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(37-40): 2982-2995
- Kim H J, Seo Y D, Youn S K. Isogeometric analysis with trimming technique for problems of arbitrary complex topology. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(45-48): 2796-2812
- Bazilevs Y, Da Veiga L B, Cottrell J A, et al. Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2006, 16(7): 1031-1090
- Cottrell J A, Hughes T J R, Reali A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(41-44): 4160-4183
- 徐岗, 王毅刚, 胡维华. 等几何分析中的 r-p 型细化方法. *计算机辅助设计与图形学报*, 2011, 23(12): 2019-2024

- 24 Elguedj T, Bazilevs Y, Calo V M, et al. F-bar projection method for finite deformation elasticity and plasticity using NURBS based isogeometric analysis. *International Journal of Material Forming*, 2008, 1(1): 1091-1094
- 25 Lu J. Circular element: isogeometric elements of smooth boundary. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(30-32): 2391-2402
- 26 Lipton S, Evans J A, Bazilevs Y, et al. Robustness of isogeometric structural discretizations under severe mesh distortion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(5-8): 357-373
- 27 Cohen E, Martin T, Kirby R M, et al. Analysis-aware modeling: Understanding quality considerations in modeling for isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(5-8): 334-356
- 28 Nagy A P, Abdalla M M, Gürdal Z. On the variational formulation of stress constraints in isogeometric design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(41-44): 2687-2696
- 29 Wang D D, Zhang H J, Xuan J C. A strain smoothing formulation for NURBS-based isogeometric finite element analysis. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2012, 55(1): 132-140
- 30 轩军长. 基于改进边界条件施加方式和应变光滑子域积分的几何精确 NURBS 有限元分析: [硕士论文]. 厦门: 厦门大学, 2010
- 31 Wang D D, Xuan J C. An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(37-40): 2425-2436
- 32 王东东, 轩军长, 张灿辉. 几何精确 NURBS 有限元中边界条件施加方式对精度影响的三维计算分析. *计算力学学报*, 2012, 29(1): 31-37
- 33 陈涛, 莫蓉, 张欣. 固体介质瞬态传热问题的等几何分析. *计算机集成制造系统*, 2011, 17(9): 1988-1996
- 34 Embar A, Dolbow J, Harari I. Imposing Dirichlet boundary conditions with Nitsche's method and spline-based finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 83(7): 877-898
- 35 Rypl D, Patzák B. From the finite element analysis to the isogeometric analysis in an object oriented computing environment. *Advances in Engineering Software*, 2012, 44(1): 116-125
- 36 Beirão da Veiga L, Buffa A, Rivas J, et al. Some estimates for h-p-k-refinement in Isogeometric Analysis. *Numerische Mathematik*, 2011, 118(2): 271-305
- 37 Van der Zee K G, Verhoosel C V. Isogeometric analysis-based goal-oriented error estimation for free-boundary problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, 47(6): 600-609
- 38 Hughes T J R, Reali A, Sangalli G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(5-8): 301-313
- 39 Echter R, Bischoff M. Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(5-8): 374-382
- 40 Evans J A, Bazilevs Y, Babuška I, et al. N-widths, sup-infs, and optimality ratios for the k-version of the isogeometric finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(21-26): 1726-1741
- 41 Xu G, Mourrain B, Duvigneau R, et al. Parameterization of computational domain in isogeometric analysis: Methods and comparison. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(23-24): 2021-2031
- 42 Schmidt R, Kiendl J, Bletzinger K U, et al. Realization of an integrated structural design process: analysis-suitable geometric modelling and isogeometric analysis. *Computing and Visualization in Science*, 2010, 13(7): 315-330
- 43 Aigner M, Heinrich C, Jüttler B, et al. Swept volume parameterization for isogeometric analysis. *Mathematics of Surfaces XIII*, 2009, LNCS 5654: 19-44
- 44 Kiendl J, Bletzinger K U, Linhard J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(49-52): 3902-3914
- 45 Kiendl J, Bazilevs Y, Hsu M-C, et al. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff-Love shell structures comprised of multiple patches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(37-40): 2403-2416
- 46 Uhm T K, Youn S K. T-spline finite element method for the analysis of shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 80(4): 507-536
- 47 Benson D J, Bazilevs Y, Hsu M-C, et al. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(13-16): 1367-1378
- 48 Nguyen-Thanh N, Kiendl J, Nguyen-Xuan H, et al. Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(48-49): 3410-3424
- 49 Benson D J, Bazilevs Y, Hsu M-C, et al. Isogeometric shell analysis: the Reissner-Mindlin shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(5-8): 276-289
- 50 张汉杰, 王东东, 轩军长. 薄梁板结构 NURBS 几何精确有限元分析. *力学季刊*, 2010, 31(4): 469-477
- 51 Schmit L A. Structural design by systematic synthesis. In: Proceedings of the second ASCE conference on electronic computation, Pittsburgh, 1960. 105-122
- 52 Wall W A, Frenzel M A, Cyron C. Isogeometric structural shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(33-40): 2976-2988
- 53 Cho S, Ha S H. Isogeometric shape design optimization: Exact geometry and enhanced sensitivity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 38(1): 53-70
- 54 Ha S H. Isogeometric shape design optimization using NURBS basis functions: [Ph.D. Thesis]. Seoul Korea: Seoul National University, 2010
- 55 Ha S H, Choi K K, Cho S. Numerical method for shape optimization using T-spline based isogeometric method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 42(3): 417-428
- 56 Nagy A P, Abdalla M M, Gürdal Z. Isogeometric sizing and shape optimisation of beam structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(17-20): 1216-1230
- 57 Nagy A P, Abdalla M M, Gürdal Z. Isogeometric design of elastic arches for maximum fundamental frequency. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(1): 135-149
- 58 Seo Y D, Kim H J, Youn S K. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(11-12): 1618-1640
- 59 Seo Y D, Kim H J, Youn S K. Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces. *Computer Meth-*

- ods in *Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(49-52): 3270-3296
- 60 Manh N D, Evgrafov A, Gersborg A R, et al. Isogeometric shape optimization of vibrating membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(13-16): 1343-1353
- 61 Qian X. Full analytical sensitivities in NURBS based isogeometric shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(29-32): 2059-2071
- 62 Qian X, Sigmund O. Isogeometric shape optimization of photonic crystals via Coons patches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(25-28): 2237-2255
- 63 Hassani B, Khanzadi M, Tavakkoli S M. An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2012, 45(2):223-233
- 64 El-Abbasi N, Meguid S A, Czekanski A. On the modelling of smooth contact surfaces using cubic splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(4): 953-967
- 65 Lu J. Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(5-8): 726-741
- 66 Temizer I, Wriggers P, Hughes T J R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(9-12): 1100-1112
- 67 De Lorenzis L, Temizer I, Wriggers P, et al. A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 87(13): 1278-1300
- 68 Stadler M, Holzappel G A, Korelc J.  $C^n$  continuous modelling of smooth contact surfaces using NURBS and application to 2D problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57(15): 2177-2203
- 69 De Lorenzis L, Wriggers P, Zavarise G. A mortar formulation for 3D large deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method. *Computational Mechanics*, 2012, 49(1): 1-20
- 70 Temizer I, Wriggers P, Hughes T J R. Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, 209-212: 115-128
- 71 Kim J Y, Youn S K. Isogeometric contact analysis using mortar method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 89(12): 1559-1581
- 72 Bazilevs Y, Calo V M, Zhang Y, et al. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Computational Mechanics*, 2006, 38(4-5): 310-322
- 73 Zhang Y, Bazilevs Y, Goswami S, et al. Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(29-30): 2943-2959
- 74 Bazilevs Y, Calo V M, Hughes T J R, et al. Isogeometric fluid-structure interaction: Theory, algorithms, and computations. *Computational Mechanics*, 2008, 43(1): 3-37
- 75 Bazilevs Y, Gohean J R, Hughes T J R, et al. Patient-specific isogeometric fluid-structure interaction analysis of thoracic aortic blood flow due to implantation of the Jarvik 2000 left ventricular assist device. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(45-46): 3534-3550
- 76 Bazilevs Y. Isogeometric analysis of turbulence and fluid-structure interaction: [Ph.D. Thesis]. Austin: The University of Texas, 2006
- 77 Akkerman I, Bazilevs Y, Calo V M, et al. The role of continuity in residual-based variational multiscale modeling of turbulence. *Computational Mechanics*, 2008, 41(3): 371-378
- 78 Bazilevs Y, Calo V M, Cottrell J A, et al. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 197(1-4): 173-201
- 79 Bazilevs Y, Akkerman I. Large eddy simulation of turbulent Taylor-Couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(9): 3402-3414
- 80 Bazilevs Y, Michler C, Calo V M, et al. Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(13-16): 780-790
- 81 Gannitzer P, Gravemeier V, Wall W A. Advances in variational multiscale methods for turbulent flows. *Multiscale Methods in Computational Mechanics*, 2011, 55: 39-52
- 82 Bazilevs Y, Hsu M -C, Kiendl J, et al. A computational procedure for prebending of wind turbine blades. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 89(3): 323-336
- 83 Bazilevs Y, Hsu M -C, Kiendl J, et al. 3D simulation of wind turbine rotors at full scale. Part II: Fluid-structure interaction modeling with composite blades. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011, 65(1-3): 236-253
- 84 Hsu M C, Akkerman I, Bazilevs Y. High-performance computing of wind turbine aerodynamics using isogeometric analysis. *Computers & Fluids*, 2011, 49(1): 93-100
- 85 Akkerman I, Bazilevs Y, Kees C E, et al. Isogeometric analysis of free-surface flow. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(11): 4137-4152
- 86 Calo V M, Brasher N F, Bazilevs Y, et al. Multiphysics model for blood flow and drug transport with application to patient-specific coronary artery flow. *Computational Mechanics*, 2008, 43(1): 161-177
- 87 Hossain S S, Hossain S F A, Bazilevs Y, et al. Mathematical modeling of coupled drug and drug-encapsulated nanoparticle transport in patient-specific coronary artery walls. *Computational Mechanics*, 2012, 49(2): 213-242
- 88 Cottrell J A, Reali A, Bazilevs Y, et al. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(41-43): 5257-5296
- 89 Buffa A, Sangalli G, Vázquez R. Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(17-20): 1143-1152
- 90 Gomez H, Hughes T J R, Nogueira X, et al. Isogeometric analysis of the isothermal Navier-Stokes-Korteweg equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(25-28): 1828-1840
- 91 Manni C, Pelosi F, Sampoli M L. Isogeometric analysis in advection-diffusion problems: Tension splines approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 236(4): 511-528
- 92 Anders D, Weinberg K, Reichardt R. Isogeometric analysis of thermal diffusion in binary blends. *Computational Materials Science*, 2012, 52(1): 182-188

- 93 Gómez H, Calo V M, Bazilevs Y, et al. Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase-field model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(49-50): 4333-4352
- 94 Elguedj T, Réthoré J, Buteri A. Isogeometric analysis for strain field measurements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(1-4): 40-56
- 95 Haasemann G, Kerber T, Ulbricht V. Modeling and homogenization of textile reinforced composites based on the isogeometric analysis. *PAMM*, 2011, 11(1): 523-524
- 96 张勇, 林泉, 胡志强, 等. 基于等几何分析的比例边界有限元方法. *计算力学学报*, 2012, 29(3): 433-438
- 97 Qin H, Terzopoulos D. D-NURBS: A physics-based framework for geometric design. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1996, 2(1): 85-96

## ADVANCES IN ISOGEOMETRIC ANALYSIS\*

GE Jianli<sup>1,†</sup> YANG Guolai<sup>1</sup> LU Jia<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China

<sup>2</sup> Department of Mechanical and Industrial Engineering, The University of Iowa, Iowa City, USA

**Abstract** Isogeometric analysis (IGA) is a current trend in engineering analysis that is likely to leave a significantly impact on Computer-Aided Engineering (CAE). The basic idea of IGA is to utilize CAD geometry to facilitate analysis. This seemingly simple change of geometric language eliminates many bottle-neck issues that plagued CAE for years, and opens a pathway for a tighter integration of design, analysis, and optimization. In this review paper, the background, theory, advantages, and applications of isogeometric analysis are discussed. Topics of algorithmic development, including NURBS bases, T-spline bases, unstructured meshes, efficient quadrature methods, trimmed surface technologies, refinements and so on are reviewed. Recent advances of IGA in shell problems, large deformation, fluid-structure interaction, structural optimization, contact problems, biomechanics, thermal analysis, and electromagnetics are also summarized.

**Keywords** isogeometric analysis, finite element method, NURBS, T-spline, structural optimization, contact problem



葛建立, 1980 年生, 男, 博士, 硕士生导师. 一直从事计算固体力学、结构设计、非线性动态有限元方面的科研和教学工作, 参与过多项国家级和省部级项目, 主持“973”专题 1 项, 获得军队科技进步三等奖 1 项, 在国内外核心期刊及学术会议上发表学术论文二十多篇, 十多篇被 EI、ISTP 等收录. 参与出版专著 1 部, 申请国防专利 4 项. 为武器系统与工程专业课群国家级教学团队成员.

\* The project was supported by the National Natural Science Foundation of China(11172139) and the Science and Technology Development Fund of NUST(XKF09065).

† E-mail: 19353770@qq.com