第 42 卷 第 5 期 力 学 进 展 Vol. 42 No. 5
2012 年 9 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Sep. 25, 2012

准晶数学弹性理论和某些有关研究的进展 (上)*

范天佑 †

北京理工大学物理学院, 北京 100081

摘 要 本文对固体准晶力学性能和准晶数学弹性, 塑性, 断裂以及有关研究的进展作了评论, 尤其对材料常数和塑性变形行为的测量, 一维、二维、三维准晶弹性理论, 动力学、非线性、缺陷理论、准晶弹性新型偏微分方程的推导和精确分析解, 复分析方法, 变分原理和有限元方法, 有限差分方法这些宏观问题和它们的数学方法进行了分析, 同时对准晶晶格动力学问题的数学理论也作了初步讨论. 近来在软物质中发现了 12 次和 18 次对称准晶, 意义重大, 这里也做了初步介绍. 文中重点讨论此领域最近这些年来中国科学工作者的工作.

关键词 准晶, 弹性, 塑性, 缺陷, 动力学, 精确解

1 引 言

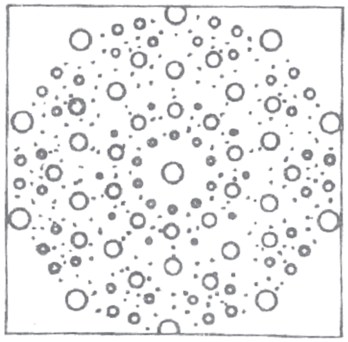
固体准晶的主要发现人 D Shechtman 于 2011 年 10 月 5 日被授予诺贝尔化学奖, 这对国内外从事准晶研究和教学工作的一切工作者都是一个极大的鼓舞. 中国科学院沈阳金属研究所的郭可信教授领导的小组独立地发现了合金中的准晶 [2-3], 只是工作报道发表晚了几个月, 同诺贝尔奖擦肩而过. 不过这再次表明, 中国科学工作者在祖国本土做出诺贝尔奖级的科学成果的能力和水平是完全具备的.

Shechtman 在 1982 年 4 月 8 日, 在急冷的 Al-Mn 合金的电子衍射图像中发现了二十面体准晶, 见图 1. 由于根本违反晶体学基本定律, 不但得不到承认, 反被取消在该实验室工作的权利. 经过两年半的艰苦抗争, 1984 年 11 月, *Phys. Rev. Lett.* 发表这一结果 [1]. 这引起了晶体学, 化学, 物理学, 材料科学和数学界的强烈反响! 准晶不具有普通晶体的周期平移对称性, 也不具有普通晶体的 $N = 1, 2, 3, 4, 6$ 的旋转对称性, 但是具有准周期平移对称性和晶体学所不允许的 $N = 5, 8, 10, 12$ 的旋转对称性 (具有这些对称性的准晶先是由人工合成的, 后来在自然界发现了天然的准晶, 最近在胶体中发现了 $N = 18$ 的准晶). 这种对称性称为准周期对称性, 它的发现是人类认识史上的重大进步, 也是物质结构和对称性理论上的重大突破, 改写了凝聚态物理和凝聚态化学, 促进了群论, 离散几何, Fourier 分析, 偏微分方程等数学分支的发展. 同时热力学稳定的准晶被大量地研制出来, 使它成为一种新型的功能材料和结构材料, 它具有轻质, 高强度, 高硬度和良好弹性及抗摩擦性能的特点, 是最适宜制作汽车发动机的材料, 具有潜在的工程应用前景.

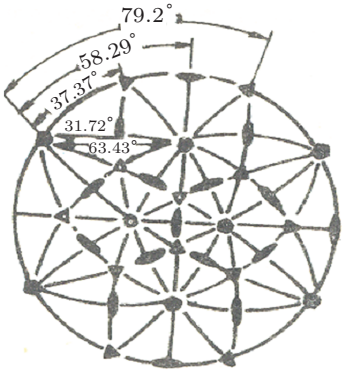
准晶包括一维准晶, 二维准晶和三维准晶 3 大类, 每一类又包括许多子类, 其物理性质和力学性质互不相同, 现在已经得到许多研究成果. 本文重点介绍一下准晶力学性能和本小组积极参与的准晶力学的发展工作, 它们属于宏观 (连续统) 范畴. 除了这些宏观现象的研究外, 准晶晶格动力学和电子能谱等微观现象的研究也方兴未艾, 中国学者也有贡献, 在本文最后部分进行简单介绍.

准晶特殊的物质结构导致了一些奇特的现象, 为了下面的讨论, 在第 2 节和第 3 节, 介绍有关术语, 提供若干预备知识.

收稿日期 : 2011-12-01, 修回日期 : 2012-07-12 doi: 10.6052/1000-0992-11-168
* 国家自然科学基金项目 (10372016, 10672022) 资助
† E-mail: tyfan2006@yahoo.com.cn



(a)



(b)

图 1 (a) 五重旋转对称性的衍射图像; (b) 二十面体准晶的立体图像, 存在五重, 二重, 三重旋转对称轴

2 高维空间的引进

准晶是通过电子衍射图像发现的. 由于准晶特殊的原子排列, 这种电子衍射图像不能用描写普通晶体电子衍射图像的 3 个指标 (h,k,l) (即 Miller 指标) 去描写, 而必须用 6 个指标 (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) 才能描写. 这表明必须引进高维空间 (即六维空间)E^6. 这正好与群论一致. 按照群论, 三维准晶在六维空间是周期排列的, 六维空间里的周期排列的 “晶体” 向三维空间的一个投影就形成了三维准晶, 原子排列在 3 个方向上都是准周期的. 类似地, 二维准晶在五维空间是周期排列的, 五维空间里的周期排列的 “晶体” 向三维空间的一个投影就形成了二维准晶, 原子排列在两个方向上是准周期的, 在一个方向上排列是周期的. 同样类似, 一维准晶在四维空间是周期排列的, 四维空间里的周期排列的 “晶体” 向三维空间的一个投影就形成了一维准晶, 原子排列在一个方向上是准周期的, 在另外两个方向上排列为周期的. 所以三维物理空间是所谓的六维空间的一个子空间, 又称为平行空间, 用符号 $E^3_{\parallel}$ 表示. 六维空间的另一个子空间, 即同物理空间相补的子空间称为垂直空间, 用符号 $E^3_{\perp}$ 表示. 这样

$$E^6 = E^3_{\parallel} \oplus E^3_{\perp} \tag{1}$$

其中符号 $\oplus$ 代表直接和.

普通晶体只在空间 $E^3_{\parallel}$ 中研究, 通常使用两种标架, 一种以晶体基矢 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 为标架, 另一种以倒格矢 $\{b_1,b_2,b_3\}$ 为标架. 基矢与倒格矢有简单代数关系, 这里不去讨论. 准晶在空间 E^6 中研究, 它的基矢和倒格矢都是六维的.

3 Landau-Anderson 对称性破缺原理, 元激发 (准粒子), 声子和相位子

准晶一发现, 对其力学性能的研究立即被提上日程, 它也是迄今准晶学科研究中最成功的领域之一. 在力学性能中, 弹性和缺陷是基础和核心.

把 Landau [4] 对称性破缺原理用于晶体, 认为晶体相对于对称性高的液体, 发生了对称性破缺. 按照 Landau 理论, 对称性破缺导致新的元激发 (又称为准粒子) 的产生, 对晶体而言, 它就是声子. Anderson [5] 对声子作了一个较深入的解释, 即 Landau 第二类相变理论中的描写有序/无序的序参量, 对晶体而言可以取为其密度 $\rho(\boldsymbol{r})$, 并且在倒格矢 $\boldsymbol{G}$: $\{b_1,b_2,b_3\}$ 为标架的空间 (简称倒空间) 中作 Fourier 展开

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G}\in L_R} \rho_{\boldsymbol{G}} \exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}\} = \sum_{\boldsymbol{G}\in L_R} |\rho_{\boldsymbol{G}}| \exp\{-\mathrm{i}\Phi_{\boldsymbol{G}} + \mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}\} \tag{2}$$

其中, L_R 为倒格子, $|\rho_{\boldsymbol{G}}|$ 为波幅, $\Phi_{\boldsymbol{G}}$ 为相位角, 由于 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是实数, $|\rho_{\boldsymbol{G}}| = |\rho_{-\boldsymbol{G}}|$ 并且 $\Phi_{\boldsymbol{G}} = -\Phi_{-\boldsymbol{G}}$, 进而令

$$\Phi_{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u} \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 就是声子. 这对声子的物理由来作了较深入的描写, 虽然这一解释仍然是唯象的 (因为 Landau 的对称性破缺原理是一种唯象的理论).

在长波长近似情形下, $\boldsymbol{u}$ 可以理解为晶格中粒子 (原子, 分子, 离子) 对其平衡位置的偏移, 这与宏观连续介质力学的位移概念相一致. 但是 Anderson 给出的式 (3) 虽然包含了这一层意义, 又不仅仅包含了这一点, 因为在长波长近似不成立的情形下, 式 (3) 仍然成立, 但这时 $\boldsymbol{u}$ 并不能简单地理解为晶格中粒子 (原子, 分子, 离子) 对其平衡位置的偏移. 可以把声子理解为晶格波的量子, 因为

晶格波是 Einstein [6], Debye [7], Born 等 [8] 在研究低温比热时引进的宏观物质运动量子化的一个概念, 他们认为晶格波的能量是量子化的, 它的量子就是声子 (这同 Planck 辐射理论中的光子概念类似, 往往光子也称为光量子). 不过要注意, 声子和其他准粒子是用量子力学方法描写凝聚态物质中大量原子集体激发的一种概念 (量子化方法论的产物), 不能把它们和单个原子或分子等同起来.

准晶发现的具体事件, 或前或后, 具有某种的偶然性, 但是在 20 世纪 80 年代研究准晶的客观条件已经具备, 这又表明准晶被发现具有必然性. 首先, Landau 对称性破缺理论成熟了, 在超导和液晶的应用中获得重大成功 (已先后两次获得诺贝尔物理奖). 在 20 世纪 60 年代无公度相的理论 [9] 也已经发展起来, 提出了相位子自由度的概念 (后来准晶被发现, 相位子自由度的名称就是从无公度相的理论中借用来的). 其次, 在 20 世纪 70 年代离散几何的理论, 尤其是 Penrose [10] 拼砌理论, 得到较大发展, 群论和群表示论也已经很成熟. 准晶发现后, Penrose 拼砌成了准晶的几何理论, 群论和群表示论成了它的代数理论. 一些功底深厚的理论物理学家, 例如 Bak [11-12] 迅速倡导用 Landau 对称性破缺概念研究准晶弹性, 即把上述 Anderson 观点推广, 令准晶的密度表示成

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G}\in L_R} \rho_{\boldsymbol{G}} \exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}\} = \sum_{\boldsymbol{G}\in L_R} |\rho_{\boldsymbol{G}}| \exp\{-\mathrm{i}\Phi_{\boldsymbol{G}} + \mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}\} \tag{4}$$

形式上看起来同晶体的一个表达式相类似, 但这里的 $\boldsymbol{G}$ 是六维空间的倒格矢, L_R 为六维空间的倒格子. $\rho_{\boldsymbol{G}}$ 代表一个复数

$$\rho_{\boldsymbol{G}} = |\rho_{\boldsymbol{G}}|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi_G} \tag{5}$$

具有模 $|\rho_{\boldsymbol{G}}|$ 和相位角 $\Phi_{\boldsymbol{G}}$. 由于 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是实数, $|\rho_{\boldsymbol{G}}| = |\rho_{-\boldsymbol{G}}|$ 并且 $\Phi_{\boldsymbol{G}} = -\Phi_{-\boldsymbol{G}}$. 从形式上这些关系似乎与上面晶体问题的 Anderson 表示相似. 但是现在研究对象为准晶, 存在 N 个倒格矢$\{\boldsymbol{G}_n\}$, 对每一个 $\boldsymbol{G}\in L_R$ 可以表示成 $\sum m_n\boldsymbol{G}_n$, m_n 为整数. 进而 $N = kd$, 这里 k 代表 d 维准晶中互为无公度的矢量的个数, 一般 $k = 2$. 可以把 Anderson 的式 (3) 推广成

$$\Phi_n = \boldsymbol{G}_n^{\parallel}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{G}_n^{\perp}\cdot\boldsymbol{w} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 理解为类似普通晶体中的声子自由度, 而 $\boldsymbol{w}$ 可以理解为准晶体相位子自由度, 为一个全新的物理量, 直观一点地说, 它描写 Penrose 拼砌中的局部重排. 上面 $\boldsymbol{G}_n^{\parallel}$ 是平行空间 $E_{\parallel}^3$ 中倒格矢, 而 $\boldsymbol{G}_n^{\perp}$ 是 $\boldsymbol{G}_n^{\parallel}$ 的共轭矢量, 在垂直空间 $E_{\perp}^3$ 中.

Bak 基于 Landau 对称性破缺原理研究准晶弹性的观点得到他同时和后来的众多物理学家的认可 [13-23]. 如果不从 Landau-Anderson 观点出发, 人们很难理解相位子. 如果硬要从经典的宏观的机械的观点去理解相位子, 几乎无法说清楚. 这说明事实已经突破了经典的宏观的机械的框架, 准晶的力学是凝聚态物理学的产物, 同时又从经典力学中吸取了许多有用的知识.

4　准晶弹性的物理基础

自准晶发现以来, 其力学性能得到较好的研究. 在力学性能方面, 弹性和缺陷既是基础, 又是核心.

在长波长近似条件下, 准晶的全位移场 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 可以表示成

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^{\parallel}\oplus\boldsymbol{u}^{\perp} = \boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{w} \tag{7}$$

但是无论声子或相位子, 它们仅仅是平行空间中的矢径 $\boldsymbol{r}^{\parallel}$ 的函数, 即

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}^{\parallel}),\quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}^{\parallel})$$

关于这一点, 有一个定理, 这里不去细说了. 为了简单起见, $\boldsymbol{r}^{\parallel}$ 中的上标后面都省略了.

由式 (7), 得到两个应变张量如下

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\quad w_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \tag{8}$$

其中头一个称为声子应变张量, 为对称的, 后一个称为相位子应变张量, 为非对称的 (这里要指出, 有一类准晶除外, 即三维立方准晶, 它的相位子应变张量和声子应变张量类似, 是对称的, 见参考文献 [43-44]). 和声子应变张量对应的应力张量, 记为 σ_{ij}, 和相位子应变张量对应的应力张量, 记为 $\boldsymbol{H}_{ij}$. 由动量守恒定律, 有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0\\ \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j} + g_i = 0\end{aligned}\right\},\quad (x,y,z)\in\Omega \tag{9}$$

其中 f_i 代表体积力, g_i 代表广义体积力. 同时具有应力边界条件

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}n_j = T_i\\ H_{ij}n_j = h_i\end{aligned}\right\},\quad (x,y,z)\in\Gamma_t \tag{10}$$

T_i 代表面积力, h_i 代表广义面积力. 在位移边界上还要满足位移边界条件

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \\ w_i &= \bar{w}_i \end{aligned}\right\}, \quad (x,y,z) \in \Gamma_u \tag{11}$$

这里 Γ_t 代表给定应力的边界部分, Γ_u 代表给定位移的边界部分.

对声子场使用角动量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \boldsymbol{r}^{\shortparallel} \times \rho \dot{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{r}^{\shortparallel} \times \boldsymbol{f} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{r}^{\shortparallel} \times \boldsymbol{T} \mathrm{d}\Gamma$$

可以得到

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{12}$$

由于 $\boldsymbol{r}^{\shortparallel}$ 和 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})$ 属于点群的不同的不可约的表示, 由角动量守恒定律不可能得到 H_{ij} 也满足式 (12), 所以

$$H_{ij} \neq H_{ji} \tag{13}$$

这表明相位子应力张量为非对称的 (这里要指出, 有一类准晶除外, 即三维立方准晶, 它的相位子应力张量和声子应力张量类似, 是对称的, 见参考文献 [43-44]).

除去二维十二次对称准晶之外, $\boldsymbol{u}$ 场与 $\boldsymbol{w}$ 场是耦合的, 所以应力 – 应变关系很复杂, 其广义 Hooke 定律为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + R_{ijkl}w_{kl} \\ H_{ij} &= \frac{\partial F}{\partial w_{ij}} = K_{ijkl}w_{kl} + R_{klij}\varepsilon_{kl} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中 F 为准晶应变能密度 (按物理学的术语, 称为自由能), C_{ijkl} 为声子弹性常数张量, K_{ijkl} 为相位子弹性常数张量, R_{ijkl} 为声子 – 相位子耦合弹性常数张量.

一维准晶, 由于对称性低, 弹性常数最多, 多达几十个; 二维准晶的数目要少一些; 三维二十面体准晶对称性最高, 弹性常数最少, 仅 5 个.

广义 Hooke 定律也可以用矩阵形式表示, 即令 $\boldsymbol{C}_{9\times 9}$ 为代表 $\boldsymbol{C}_{ijkl}$ 声子弹性常数张量的矩阵, 而 $\boldsymbol{K}_{9\times 9}$ 为代表 K_{ijkl} 相位子弹性常数张量的矩阵, 又 $\boldsymbol{R}_{9\times 9}$, $\boldsymbol{R}'_{9\times 9}$ 为代表 R_{ijkl} 为声子 – 相位子耦合弹性常数张量的矩阵, 并且 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}'$ 进而

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{K},\boldsymbol{R}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{R}' & \boldsymbol{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \tag{15}$$

那么应变能密度为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{w}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix} [\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{w}]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

因而广义 Hooke 定律的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中应变为 18 个元素的矢量如下

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{ij}, w_{ij}] = \big[& \varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{23},\varepsilon_{31}, \\ & \varepsilon_{12},\varepsilon_{32},\varepsilon_{13},\varepsilon_{21}, \\ & w_{11},w_{22},w_{33},w_{23},w_{31}, \\ & w_{12},w_{32},w_{13},w_{21}\big] \end{aligned} \tag{18}$$

应力为 18 个元素的矢量与式 (18) 完全类似, 并且

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij} \\ H_{ij} \end{bmatrix} = [\sigma_{ij}, H_{ij}]^{\mathrm{T}}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix} = [\varepsilon_{ij}, w_{ij}]^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

以上物理基础由我国武汉大学丁棣华, 王仁卉等 [24] 所总结, 对准晶弹性理论研究起了积极推动作用.

广义 Hooke 定律式 (14) 或式 (17) 是分析准晶弹性的一个基础, 其中全部独立的非零的弹性常数的确定, 具有重要意义. 荷兰物理学家 Janssen [25] 用点群讨论了这一问题, 我国武汉大学杨文革等 [26], 胡承正等 [27-28] 用群表示论使之完善化.

5 准晶弹性常数的测定和结果

全部独立的非零的弹性常数由群表示论确定无疑极为关键, 但是用实验方法把它们测量出来同样重要.

迄今发现的 200 多种准晶中, 三维二十面体准晶占了 100 多种, 二维 10 次对称准晶占了 70 多种, 这两种准晶系占据了全部准晶的绝大多数, 因而成为人们的主要研究对象.

二十面体准晶的声子弹性常数非零的元素只有 2 个, 即 λ, $\mu(G)$, 相位子弹性常数非零的元素也只有 2 个, 即 K_1, K_2, 声子 – 相位子耦合弹性常数非零的元素只有 1 个 R, 通过中子衍射, X- 射线衍射, Moessbauer 效应, 核磁共振等技术手段测量了若干合金的弹性常数, 见表 1~3.

表 1　各种二十面体准晶的声子弹性模量

合金	λ/GPa	$\mu(\boldsymbol{G})$/GPa	B/GPa	v	文献
Al-Li-Cu	30.0	35.0	53.0	0.230	[29]
Al-Li-Cu	30.4	40.9	57.7	0.213	[30]
Al-Cu-Fe	59.1	68.1	104.0	0.213	[31]
Al-Cu-Fe-Ru	48.4	57.9	87.0	0.228	[31]
Al-Pd-Mn	74.9	72.4	123.0	0.254	[31]
Al-Pd-Mn	74.2	70.4	121.0	0.256	[32]
Ti-Zr-Ni	85.5	38.3	111.0	0.345	[33]
Cu-Yh	35.3	25.3	52.1	0.291	[34]
Zn-Mg-Y	33.0	46.5	64.0	0.208	[35]

表 2　几种二十面体准晶的相位子弹性模量

合金	方法	测量温度	K_1/MPa	K_2/MPa	文献
Al-Pd-Mn	X-ray	R.T.	43	−22	[36]
Al-Pd-Mn	Neutron	R.T.	72	−37	[36]
Al-Pd-Mn	Neutron	1043K	125	−50	[36]
Zn-Mg-Sc	X-ray	R.T.	300	−45	[37]

表 3　少数几种二十面体准晶的声子 – 相位子耦合弹性常数的测量结果

合金	方法	R	文献
Mg-Ga-Al-Zn	X-ray	-0.04μ	[38]
Al-Cu-Fe	X-ray	0.004μ	[38]

二维 10 次对称准晶非零独立的声子弹性常数有 C_{ij}(由 C_{ijkl} 简化而来)5 个, 其实验测量值见表 4.

其中, B 代表体积变形模量, G 为剪切模量, 和 C_{ij} 一起单位为 GPa, v 代表 Poisson 比.

二维 10 次对称准晶非零独立的相位子弹性常数有 K_i(由 K_{ijkl} 简化而来)2 个, 其实验测量值见表 5.

表 4　二维 10 次对称准晶非零独立的声子弹性常数实验测量值 [39]

合金	C_{11}	C_{33}	C_{44}	C_{12}	C_{13}	B	G	v
Al-Ni-Co	234.33	232.22	70.19	57.41	66.63	120.25	79.98	0.228

表 5　二维 10 次对称准晶非零独立的相位子弹性常数实验测量值 [40]

合金	K_1/GPa	K_2/GPa
Al-Ni-Co	122	24

二维 10 次对称准晶非零独立的声子 – 相位子耦合弹性常数有 R_i(由 R_{ijkl} 简化而来) 两个, 其实验测量值见表 6.

表 6　二维 10 次对称准晶非零独立的声子 – 相位子耦合弹性常数实测值 [40]

合金	R_1/GPa	$\lvert R_2\rvert$/GPa
Al-Ni-Co	−1.1	< 0.2

虽然在这些常数的测量方面取得一定进展, 但是困难仍然很大, 尤其声子 – 相位子耦合弹性常数的结果仍然很少, 需要进一步开展这方面的工作.

6　准晶弹性方程组的化简, 位移势和应力势

根据第 4 节的介绍, 可以看出: 一维准晶弹性具有 22 个场变量, 22 个场方程; 二维准晶弹性具有 29 个场变量, 29 个场方程; 三维二十面体准晶弹性具有 36 个场变量, 36 个场方程. 不仅方程组数目庞大而且都不具有经典弹性的对称性, 边界条件又十分复杂, 求解极其困难.

我们的兴趣首先在于寻求精确解析解. 本小组开展了全面的研究, 并且取得系统的结果.

受经典弹性理论和数学物理 [41-42] 的启发, 采

用消元法减少未知函数的数目, 使问题化简. 为实现这一点, 在经典弹性理论中, 可以引进位移势, 或应力势. 这一思路在准晶弹性中仍然有意义. 以下按一维, 二维, 三维准晶系的顺序介绍.

6.1 一维六方准晶的空间弹性

对这一准晶系, 声子为 u_x, u_y, u_z, 相位子为 w_z(因为 $w_x = w_y = 0$), 相应的应变为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{20}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right),$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right),$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$w_{zx} = \frac{\partial w_z}{\partial x},\quad w_{zy} = \frac{\partial w_z}{\partial y},\quad w_{zz} = \frac{\partial w_z}{\partial z} \tag{21}$$

共 9 个分量, 其余 $w_{ij} = 0$. 式 (20) 和式 (21) 也适用全体一维准晶.

如果把式 (20) 和式 (21) 写成 9 个分量的矢量, 即

$$[\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}, w_{33}, w_{31}, w_{32}] \tag{22}$$

或

$$[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}, 2\varepsilon_{xy}, w_{zz}, w_{zx}, w_{zy}] \tag{23}$$

其对应的应力矢量为

$$[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}, H_{zz}, H_{zx}, H_{zy}] \tag{24}$$

那么我们有弹性常数矩阵如下

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{CKR}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

其中声子弹性常数的 4 个下标可以简化成两个, 即下标 $11 \to 1$, $22 \to 2$, $33 \to 3$, $23 \to 4$, $31 \to 5$, $12 \to 6$, 那么 C_{ijkl} 可以记为 C_{pq}:

$$C_{11} = C_{1111} = C_{2222}, C_{12} = C_{1122},$$

$$C_{33} = C_{3333}, C_{44} = C_{2323} = C_{3131}$$

$$C_{13} = C_{1133} = C_{2233},$$

$$C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2 = (C_{1111} - C_{1122})/2$$

这说明独立声子弹性常数是 5 个; 其次 $K_1 = K_{3333}$, $K_2 = K_{3131} = K_{3232}$, 也就是, 独立相位子弹性常数是两个; 而 $R_1 = R_{1133} = R_{2233}$, $R_2 = R_{3333}$, $R_3 = R_{2332} = R_{3131}$, 表明独立的声子–相位子耦合弹性常数是 3 个.

由弹性常数矩阵可以得到广义 Hooke 定律如下

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + R_1 w_{zz} \\ \sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{11}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + R_1 w_{zz} \\ \sigma_{zz} &= C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{13}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + R_2 w_{zz} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = 2C_{44}\varepsilon_{yz} + R_3 w_{zy} \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = 2C_{44}\varepsilon_{zx} + R_3 w_{zx} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 2C_{66}\varepsilon_{xy} \\ H_{zz} &= R_1(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + R_2\varepsilon_{zz} + K_1 w_{zz} \\ H_{zx} &= 2R_3\varepsilon_{zx} + K_2 w_{zx} \\ H_{zy} &= 2R_3\varepsilon_{yz} + K_2 w_{zy} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

其余 $H_{ij} = 0$.

应力张量的分量满足下列平衡方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial H_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial H_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

由式 (20), (25) 和式 (26), 消去应力和应变, 得到以位移分量表示的平衡方程

$$\left(C_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + C_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_x + (C_{11} - C_{66})\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + (C_{13} + C_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + (R_1 + R_3)\frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z} = 0$$

$$(C_{11} - C_{66})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \left(C_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + C_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_y + (C_{13} + C_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + (R_1 + R_3)\frac{\partial^2 w_z}{\partial y \partial z} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&(C_{13}+C_{44})\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}\right)+\\
&\left(C_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+C_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_z+\\
&\left[R_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+R_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]w_z=0\\
&(R_1+R_3)\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}\right)+\\
&\left[R_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+R_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_z+\\
&\left[K_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+K_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]w_z=0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

方程组 (27) 比 22 个方程组 (20), (25) 和式 (26) 大为简化, 但是还可以进一步化简, 即引进 4 个位移势

$$
\begin{aligned}
u_x&=\frac{\partial}{\partial x}(F_1+F_2+F_3)-\frac{\partial F_4}{\partial y},\\
u_y&=\frac{\partial}{\partial y}(F_1+F_2+F_3)+\frac{\partial F_4}{\partial x}\\
u_z&=\frac{\partial}{\partial z}(m_1F_1+m_2F_2+m_3F_3),\\
w_z&=\frac{\partial}{\partial z}(l_1F_1+l_2F_2+l_3F_3)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

那么我们得到 4 个调和方程

$$
\nabla_i^2 F_i=0,\quad i=1,2,3,4 \tag{29}
$$

$$
\nabla_i^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\gamma_i^2\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad i=1,2,3,4 \tag{30}
$$

其中 m_i, l_i 和 γ_i 定义如下

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_{44}+(C_{13}+C_{44})m_i+(R_1+R_3)l_i}{C_{11}}=\\
&\frac{C_{33}m_i+R_2l_i}{C_{13}+C_{44}+C_{44}m_i+R_3l_i}=\\
&\frac{R_2m_i+K_1l_i}{R_1+R_2+R_3m_i+K_2l_i}=\gamma_i^2,\quad i=1,2,3\\
&C_{44}/C_{66}=\gamma_4^2
\end{aligned}
\tag{31}
$$

求解方程组 (29) 代替求解原来的 22 个方程, 使求解大大简化. 详见 Fan 等 [43-44], Peng 等 [45]. 可以发现, 经典弹性的横观各向同性弹性仅仅是这里问题的一个特例, 即相位子场不存在时的特殊情形, 有关横观各向同性弹性的解, 也是这里的解的特例.

6.2　其他一维准晶的弹性问题

由于篇幅的限制, 不可能对其他一维准晶系的弹性进行逐个介绍. 对比较复杂的一维准晶系, 在其空间弹性很难化简时, 我们发展了分解与叠加程序, 例如假设 z 轴为准周期排列方向, 可以令

$$
\frac{\partial}{\partial z}=0 \tag{32}
$$

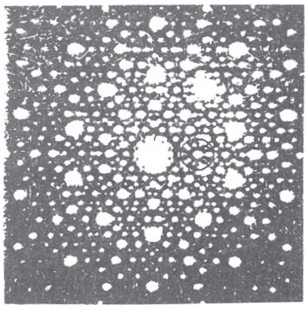
把问题分解成一个平面弹性问题和一个反平面弹性进行讨论, 方程大大化简, 求解后, 把平面和反平面问题的解叠加, 可以近似描写其空间弹性. 细节就不一一介绍了, 详见参考文献 [44, 46]. 其他中国科学工作者在一维准晶弹性方程化简方面的工作, 还可见 Chen 等 [47], Wang 等 [48], Gao 等 [49] 的论文.

这里发展的分解与叠加程序对二维和三维准晶弹性的研究, 也很有效, 见下面讨论.

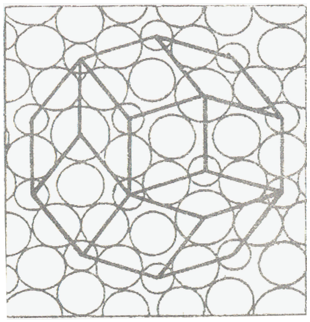
6.3　二维五次, 十次对称准晶

二维准晶弹性具有 29 个场变量和场方程, 比一维准晶更复杂, 更难以求解, 但是我们提出, 把平面弹性和反平面弹性分离, 使问题简化后, 取得重大进展, 见文献 [50-55].

点群 5 m 五次对称, 点群 10 mm 十次对称准晶是二维准晶中重要的两类准晶 (它们的电子衍射图像见图 2), 它们的平面弹性性质相同; 点群 5, $\bar{5}$ 五次对称, 点群 10, $\overline{10}$ 十次对称准晶和前者不同, 但是它们具有相同的平面弹性性质, 但是和



(a) 点群10 mm二维十次对称准晶的衍射图像



(b) 点群10 mm十次对称准晶的Penrose拼砌 tiling

图 2

点群 5 m 五次对称, 点群 10 mm 十次对称准晶不同. 下面以点群 5 m 五次对称, 点群 10 mm 十次对称准晶二维准晶为例, 讨论它们方程的化简.

假设 z 轴为周期排列方向, 可以令

$$\frac{\partial}{\partial z}=0 \tag{33}$$

则平面弹性方程具有如下形式, 即变形几何方程

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right),\\
&\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right),\\
&\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\\
&w_{xx}=\frac{\partial w_x}{\partial x},\quad w_{yy}=\frac{\partial w_y}{\partial y},\\
&w_{xy}=\frac{\partial w_x}{\partial y},\quad w_{yx}=\frac{\partial w_y}{\partial x}
\end{aligned}$$

其余的相位子应变等于 0; 应力–应变关系为

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{xx}=L(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})+2M\varepsilon_{xx}+\\
&\qquad R(w_{xx}+w_{yy})\\
&\sigma_{yy}=L(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})+2M\varepsilon_{yy}-\\
&\qquad R(w_{xx}+w_{yy})\\
&\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=2M\varepsilon_{xy}+R(w_{yx}-w_{xy})\\
&H_{xx}=K_1w_{xx}+K_2w_{yy}+R(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\\
&H_{yy}=K_1w_{yy}+K_2w_{xx}+R(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\\
&H_{xy}=K_1w_{xy}-K_2w_{yx}-2R\varepsilon_{xy}\\
&H_{yx}=K_1w_{yx}-K_2w_{xy}+2R\varepsilon_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

以及平衡方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial H_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial H_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial H_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial H_{yy}}{\partial y}=0
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

总共 21 个方程, 它们可以化成 4 个方程

$$\begin{aligned}
&M\nabla^2u_x+(L+M)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+\\
&\qquad R\left(\frac{\partial^2w_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2w_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2w_x}{\partial y^2}\right)=0\\
&M\nabla^2u_y+(L+M)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+\\
&\qquad R\left(\frac{\partial^2w_y}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2w_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2w_y}{\partial y^2}\right)=0\\
&K_1\nabla^2w_x+R\left(\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2u_y}{\partial x\partial y}-\right.\\
&\qquad \left.\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}\right)=0\\
&K_1\nabla^2w_y+R\left(\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial y}-\right.\\
&\qquad \left.\frac{\partial^2u_y}{\partial y^2}\right)=0
\end{aligned} \tag{37}$$

其中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

引进新的未知函数 $\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 如下

$$\left.\begin{aligned}
u_x&=(L+M)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+M\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\\
&\quad (L+2M)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\\
u_y&=-\left[(L+2M)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+M\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\right.\\
&\quad \left.(L+M)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right]\\
w_x&=-\frac{M(L+2M)}{R}\cdot\\
&\quad \left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]\\
w_y&=\frac{M(L+2M)}{R}\cdot\\
&\quad \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

又 $L=C_{12}$, $M=(C_{11}-C_{12})/2=C_{66}$, 则式 (37) 化成

$$\left.\begin{aligned}
&(\alpha\Pi_1+\beta\Pi_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\\
&\qquad \left(\alpha\Pi_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\beta\Pi_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi=0\\
&\left(\alpha\Pi_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta\Pi_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi+\\
&\qquad (\alpha\Pi_2+\beta\Pi_1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

这里

$$\Pi_1=3\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \Pi_2=3\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha=R(L+2M)-\omega K_1,\quad \beta=RM-\omega K_1\\
&\omega=M(L+2M)/R
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

进而令

$$\varphi=\left(\beta\Pi_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\Pi_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F \tag{42}$$

$$\psi = (\alpha\Pi_1 + \delta\Pi_2)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{43}$$

其中,$F(x,y)$ 可以是任意函数, 我们称它为位移势函数, 如果

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 F = 0 \tag{44}$$

则方程组 (39) 被满足. 方程 (44) 是点群 5 m 五次对称, 点群 10 mm 十次对称二维准晶平面弹性的终态控制方程. 虽然点群 5, $\bar{5}$ 五次对称, 点群 10, $\overline{10}$ 十次对称准晶比点群 5 m 五次对称准晶和点群 10 mm 十次对称准晶复杂, 但是它们的平面弹性问题, 在引进类似的位移势之后, 也化成与式 (44) 一样的终态控制方程. 这说明方程 (44) 具有普遍性.

在假定式 (33) 下, 反平面弹性问题为

$$\nabla^2 u_z = 0 \tag{45}$$

所描写.

如果不用位移势, 而用应力势 $G(x,y)$, 对以上几类准晶得到

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 G = 0 \tag{46}$$

这再次说明四重调和方程的普遍性和重要性, 它最先由 Li 和 Fan [50] 分析和求解.

6.4　二维八次对称准晶

这里仅考虑点群 8 m 八次对称准晶 (其 Penrose 拚砌, 见图 3), 仍然用假定式 (33), 这时得到平面弹性的终态控制方程为

$$\begin{aligned}&(\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 - 4\varepsilon\nabla^2\nabla^2\Lambda^2\Lambda^2 + \\ &4\varepsilon\Lambda^2\Lambda^2\Lambda^2\Lambda^2)F = 0\end{aligned} \tag{47}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \Lambda^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ &\varepsilon = \frac{R^2(L+M)(K_2+K_3)}{[M(K_1+K_2+K_3)-R^2][(L+2M)K_1-R^2]}\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

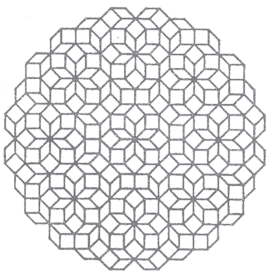


图 3　八次对称准晶的 Penrose 拼砌

$$L = C_{12},\quad M = (C_{11} - C_{12})/2 = C_{66} \tag{49}$$

$$\left.\begin{aligned}&K_{1111} = K_{2222} = K_1,\\ &K_{1122} = K_{2211} = K_2\\ &K_{1221} = K_{2112} = K_3,\\ &K_{2121} = K_{1212} = K_1 + K_2 + K_3\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

R 为耦合弹性常数, 见文献 [50].

6.5　二维十二次对称准晶

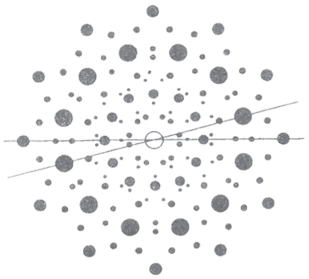
这类准晶的电子衍射图像和 Penrose 拼砌见图 4, 它弹性比较简单, 因为声子场和相位子场不耦合, 即

$$R = 0 \tag{51}$$

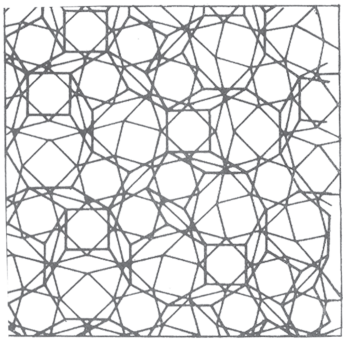
在假定 (32) 下, 二维十二次对称准晶平面弹性方程化成

$$\nabla^2\nabla^2 F = 0,\quad \nabla^2\nabla^2 G = 0 \tag{52}$$

其中头一个方程为声子场的方程, 和经典弹性平面问题的终态方程一样, 后一个方程为相位子场的方程, 见文献 [50].



(a) 电子衍射图像



(b) Penrose 拼砌

图 4　二维十二次对称准晶

6.6 三维二十面体准晶

二十面体准晶是目前准晶中最重要的一类, 它外形见图 5. 它的弹性有 36 个场变量和 36 个场方程, 求解难度最大.

前面的普遍式 (8), (9) 和式 (13) 对二十面体准晶也成立, 所不同的是具体的应力 – 应变关系, 这里因为

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{53}$$

其中 λ 和 $\mu(=G)$ 为 Lamé常数; 若分别定义 18 个分量的应变行矢量和 18 个分量的应力行矢量如下

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{ij},\boldsymbol{w}_{ij}]=[\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \varepsilon_{23},\ \varepsilon_{31},\ \varepsilon_{12},\ w_{11},\ w_{22},\ w_{33},\ w_{23},\ w_{32},\ w_{12},\ w_{32},\ w_{13},\ w_{21}] \tag{54}$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_{ij},\boldsymbol{H}_{ij}]=[\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{33},\ \sigma_{23},\ \sigma_{31},\ \sigma_{12},\ H_{11},\ H_{22},\ H_{33},\ H_{23},\ H_{32},\ H_{12},\ H_{32},\ H_{13},\ H_{21}] \tag{55}$$

那么有相位子弹性常数矩阵和声子 – 相位子耦合弹性常数矩阵如下

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}
K_1 & 0 & 0 & 0 & K_2 & 0 & 0 & K_2 & 0\\
0 & K_1 & 0 & 0 & -K_2 & 0 & 0 & K_2 & 0\\
0 & 0 & K_2+K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & K_1-K_2 & 0 & K_2 & 0 & 0 & -K_2\\
K_2 & -K_2 & 0 & 0 & K_1-K_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & K_2 & 0 & K_1 & -K_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_2 & K_1-K_2 & 0 & -K_2\\
K_2 & K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_1-K_2 & 0\\
0 & 0 & 0 & -K_2 & 0 & 0 & -K_2 & 0 & K_1
\end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\boldsymbol{R}=R\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{57}$$

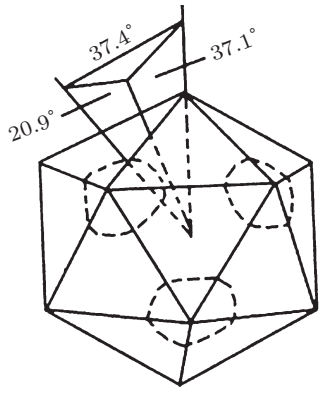


图 5 二十面体准晶的一种外形

进而得到应力 – 应变关系为

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{xx}+R(w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}+w_{xz})\\
\sigma_{yy}&=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{yy}-R(w_{xx}+w_{yy}-w_{zz}+w_{xz})\\
\sigma_{zz}&=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{yy}-2Rw_{zz}\\
\sigma_{yz}&=2\mu\varepsilon_{yz}+R(w_{zy}-w_{xy}-w_{yx})=\sigma_{zy}\\
\sigma_{zx}&=2\mu\varepsilon_{zx}+R(w_{xx}-w_{yy}-w_{zx})=\sigma_{xz}\\
\sigma_{xy}&=2\mu\varepsilon_{xy}+R(w_{yx}-w_{yz}-w_{xy})=\sigma_{yx}\\
H_{xx}&=R(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}+2\varepsilon_{zx})+K_1w_{xx}+\\
&\quad K_2(w_{zx}+w_{xz})\\
H_{yy}&=R(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}-2\varepsilon_{zx})+K_1w_{yy}+\\
&\quad K_2(w_{xz}-w_{zx})\\
H_{zz}&=R(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}-2\varepsilon_{zz})+(K_1+K_2)w_{zz}\\
H_{yz}&=-2R\varepsilon_{xy}+(K_1-K_2)w_{yz}+\\
&\quad K_2(w_{xy}-w_{yx})\\
H_{zx}&=2R\varepsilon_{zx}+(K_1-K_2)w_{zx}+\\
&\quad K_2(w_{xx}-w_{yy})\\
H_{xy}&=-2R(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{xy})+K_1w_{xy}+\\
&\quad K_2(w_{yz}-w_{zy})\\
H_{zy}&=2R\varepsilon_{yz}+(K_1-K_2)w_{zy}-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&K_2(w_{xy}+w_{yx})\\
H_{xz} =\ & R(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})+K_2(w_{xx}+w_{yy})+\\
&(K_1-K_2)w_{xz}\\
H_{yx} =\ & 2R(\varepsilon_{xy}-\varepsilon_{yx})+K_1w_{yx}-\\
&K_2(w_{yz}+w_{zy})
\end{aligned}\tag{58}
$$

这里 $\theta=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$.

把式 (8) 代入式 (58), 再代入式 (14), 得到二十面体准晶的位移平衡方程

$$
\begin{aligned}
&\mu\nabla^2u_x+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+R\bigg(\frac{\partial^2w_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_x}{\partial x\partial z}-\\
&\quad\frac{\partial^2w_x}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2w_y}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2w_y}{\partial y\partial z}+2\frac{\partial^2w_z}{\partial x\partial z}\bigg)=0\\
&\mu\nabla^2u_y+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+R\bigg(\frac{\partial^2w_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2w_x}{\partial x\partial y}-\\
&\quad\frac{\partial^2w_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2w_x}{\partial z\partial y}-2\frac{\partial^2w_y}{\partial x\partial z}+2\frac{\partial^2w_z}{\partial y\partial z}\bigg)=0\\
&\mu\nabla^2u_z+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+R\bigg(\frac{\partial^2w_x}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2w_x}{\partial x\partial y}-\\
&\quad\frac{\partial^2w_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2w_z}{\partial z^2}\bigg)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_1\nabla^2w_x+K_2\bigg(2\frac{\partial^2w_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2w_x}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2w_y}{\partial y\partial z}+\\
&\quad\frac{\partial^2w_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2w_z}{\partial y^2}\bigg)+R\bigg(\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial z}-\\
&\quad\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2u_y}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2u_y}{\partial y\partial z}+\\
&\quad\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u_z}{\partial y^2}\bigg)=0\\
&K_1\nabla^2w_y+K_2\bigg(2\frac{\partial^2w_x}{\partial y\partial z}-2\frac{\partial^2w_y}{\partial x\partial z}-2\frac{\partial^2w_z}{\partial x\partial y}-\\
&\quad\frac{\partial^2w_y}{\partial z^2}\bigg)+R\bigg(\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2u_x}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2u_y}{\partial y^2}+\\
&\quad2\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2u_y}{\partial x\partial z}-2\frac{\partial^2u_z}{\partial x\partial y}\bigg)=0\\
&(K_1-K_2)\nabla^2w_z+K_2\bigg(2\frac{\partial^2w_z}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2w_y}{\partial y\partial x}+\\
&\quad\frac{\partial^2w_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2w_x}{\partial y^2}\bigg)+R\bigg(\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial z}+\\
&\quad\frac{\partial^2u_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2u_z}{\partial z^2}\bigg)=0
\end{aligned}\tag{59}
$$

其中

$$
\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}
$$

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}.
$$

方程组 (59) 为 6 个未知函数的 6 个二阶偏微分方程, 直接求它们的精确解析解是很困难的, 下面设法化简. 设 z 轴为五重对称方向, 可以令

$$
\frac{\partial}{\partial z}=0\tag{60}
$$

那么 36 个方程组化成 32 个方程组, 相应的终态方程组 (59) 简化成

$$
\begin{aligned}
&\mu\nabla_1^2u_x+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla_1\cdot\boldsymbol{u}_1)+\\
&\quad R\bigg(\frac{\partial^2w_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2w_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2w_y}{\partial y^2}\bigg)=0\\
&\mu\nabla_1^2u_y+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}(\nabla_1\cdot\boldsymbol{u}_1)+\\
&\quad R\bigg(\frac{\partial^2w_y}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2w_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2w_y}{\partial y^2}\bigg)=0\\
&\mu\nabla_1^2u_z+R\bigg(\frac{\partial^2w_x}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2w_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2w_x}{\partial y^2}+\\
&\quad\nabla_1^2w_z\bigg)=0\\
&K_1\nabla_1^2w_x+K_2\bigg(\frac{\partial^2w_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2w_z}{\partial y^2}\bigg)+\\
&\quad R\bigg(\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2u_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}+\\
&\quad\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u_z}{\partial y^2}\bigg)=0\\
&K_1\nabla_1^2w_y-2K_2\frac{\partial^2w_z}{\partial x\partial y}+R\bigg(\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial y}-\\
&\quad\frac{\partial^2u_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2u_z}{\partial x\partial y}\bigg)=0\\
&(K_1-K_2)\nabla_1^2w_z+K_2\bigg(\frac{\partial^2w_x}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2w_y}{\partial x\partial y}-\\
&\quad\frac{\partial^2w_y}{\partial y^2}\bigg)+R\nabla_1^2u_z=0
\end{aligned}\tag{61}
$$

其中

$$
\nabla_1^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad\boldsymbol{u}_1=(u_x,u_y)
$$

$$
\nabla_1\cdot\boldsymbol{u}_1=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}
$$

这样方程组 (61) 虽然也是 6 个二阶偏微分方程, 但是比式 (59) 化简了许多. 引进位移势函数 $F(x,y)$, 即

$$
\begin{aligned}
u_x =\ & R\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\nabla^2\nabla^2[\mu\alpha\Pi_1+\beta(\lambda+2\mu)\Pi_2]F\\
&+c_0R\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Lambda\bigg[(3\mu-\lambda)\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\\
&10(\lambda+\mu)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}-(5\lambda+9\mu)\frac{\partial^4}{\partial y^4}\bigg]F\\
u_y =\ & R\nabla^2\nabla^2\bigg[\mu\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Pi_1-\beta(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Pi_2\bigg]F
\end{aligned}
$$

$$+c_0R\Lambda^2\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^6}{\partial x^6}-5(2\lambda+3\mu)\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+5\lambda\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4}+\mu\frac{\partial^6}{\partial y^6}\right]F$$

$$u_z=c_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[(\alpha-\beta)\Lambda^2\Pi_1\Pi_2+\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Pi_1^2+\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Pi_2^2\right]F$$

$$w_x=-\omega\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\nabla^2[2c_0\Lambda^2\nabla^2-(\alpha-\beta)\Pi_1\Pi_2]F$$

$$w_y=-\omega\nabla^2\left[c_0\Lambda^2\Lambda^2\nabla^2+\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Pi_1^2+\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Pi_2^2\right]F$$

$$w_z=c_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[(\alpha-\beta)\Lambda^2\Pi_1\Pi_2+\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Pi_1^2+\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Pi_2^2\right]F \tag{62}$$

那么方程组 (61) 化成一个 12 阶的六重调和方程如下

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2F(x,y)=0 \tag{63}$$

这一方程由 Fan 和 Guo [56] 于 2005 年首次发现.

如果不用位移势函数, 而用应力势函数 $G(x,y)$, 最终控制方程也是六重调和方程 [57]

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2G(x,y)=0 \tag{64}$$

但是推导从略. 可见这一方程的普遍性和重要性.

我们还得到其他高阶偏微分方程, 这里不一一介绍.

7 准晶弹性边值问题的解析解 — Fourier 分析

从历史上看, 准晶的第一个位错解是法国液晶学家 De 等 [58] 在 1987 年发表的, 这时距准晶发现的报道才 3 年, 这一个解发表最早因而十分珍贵, 他们是用交替法求解的. 但是后来再未见到他们发表新的解析解了, 这说明其方法并不具有普遍有效性. 我国武汉大学丁棣华等 [59-61] 发展了 Fourier 方法和 Green 函数法, 直接由方程组去求解位错问题, 得到若干分析解, 这也是比较早和很珍贵的工作. 但是他们的方法也只能求解比较简单的准晶系的和界条件比较简单的位错问题. 看来发展系统和直接的方法极为必要. 这给中国力学和应用数学工作者提供了一个机遇.

上一节介绍我们把数目庞大的准晶弹性方程组化简成一个或少数几个高阶偏微分方程, 已使求解极大地简化, 目的在发展系统和直接的方法, 以便求得更多更困难问题的分析解. 但是这些方程阶数很高, 相应的边界条件很复杂. 怎么求解这些高阶偏微分方程的复杂的边值问题, 是一个很大的难题. 分离变量法仍然是基本的方法, 其中 Fourier 分析又是最基本的技术路线. 我们用 Fourier 分析求解了许多问题. 下面举若干例子. 由于针对的是求解一个高价偏微分方程, 比 De 等以及丁棣华等的方法更有效, 得到许多他们未曾解决过的困难问题的解. 下面举若干具体实例.

7.1 二维准晶的位错

准晶位错的 Burgers 矢量为 $(b_1^{\parallel}, b_2^{\parallel}, b_3^{\parallel}, b_1^{\perp}, b_2^{\perp}, b_3^{\perp})$, 对于二维准晶则为 $(b_1^{\parallel}, b_2^{\parallel}, b_3^{\parallel}, b_1^{\perp}, b_2^{\perp}, 0)$, 因为 $w_3=0$. 在上一节已经把反平面问题同平面问题分离开来, 所以若仅考虑平面问题, 那么 Burgers 矢量为 $(b_1^{\parallel}, b_2^{\parallel}, 0, b_1^{\perp}, b_2^{\perp})$. 可见, 这时同时具有 4 个非零的 Burgers 矢量的分量, 求解相当复杂. 不过线性叠加原理成立, 可以对每一个分量先求解, 然后叠加, 便可以得到整个问题的解.

对方程 (44) 作 Fourier 变换, 即令

$$\hat{F}(\xi,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\xi \tag{65}$$

那么方程 (44) 化成

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-\xi^2\right)^4\hat{F}(\xi,y)=0. \tag{66}$$

常微分方程 (66) 的解, 很容易得到, 其中含有 4 个待定函数, 通过边界条件 (包括位错条件和无穷远处的条件) 确定这 4 个函数, 例如

$$\left.\begin{aligned}&A=9J\mathrm{sgn}\xi/4\xi^2,\quad B=2J\xi^2\\&C=J\mathrm{sgn}\xi/2\xi^2,\quad D=0\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

其中

$$J=\frac{b_1^{\parallel}}{8(n-m)}. \tag{68}$$

$$m=M\alpha+(L+2M)\beta,\ n=M\alpha-(L+2M)\beta \tag{69}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=R(L+2M)-\omega K_1,\quad \beta=RM-\omega K_1\\&\omega=M(L+2M)/R\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

再由 Fourier 变换的反演 (求逆变换), 得到问题的解, 例如

$$u_x=\frac{b_1^{\parallel}}{2\pi}\left[\arctan\frac{y}{x}+\right.$$

$$\frac{(L+M)K_1}{(L+M)K_1+(MK_1-R^2)}\frac{xy}{r^2}\Big] \tag{71a}$$

$$u_y=\frac{b_1^{\parallel}}{2\pi}\Big[-\frac{MK_1-R^2}{(L+M)K_1+(MK_1-R^2)}\ln\frac{r}{a}+\frac{(L+M)K_1}{(L+M)K_1+(MK_1-R^2)}\frac{y^2}{r^2}\Big] \tag{71b}$$

$$w_x=\frac{b_1^{\parallel}}{2\pi}\frac{(L+M)K_1}{(L+M)K_1+(MK_1-R^2)}\cdot\frac{2x^3y}{r^4} \tag{72a}$$

$$w_y=\frac{b_1^{\parallel}}{2\pi}\frac{(L+M)K_1}{(L+M)K_1+(MK_1-R^2)}\cdot\frac{2x^2y^2}{r^4} \tag{72b}$$

$$\sigma_{xx}=-A\frac{y(3x^2+y^2)}{r^4} \tag{73a}$$

$$\sigma_{yy}=A\frac{y(x^2-y^2)}{r^4} \tag{73b}$$

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=A\frac{x(x^2-y^2)}{r^4} \tag{73c}$$

$$H_{xx}=-A\frac{R(K_1-K_2)}{MK_1-R^2}\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{r^6} \tag{74a}$$

$$H_{yy}=-A\frac{R(K_1-K_2)}{MK_1-R^2}\frac{x^2y(3y^2-x^2)}{r^6} \tag{74b}$$

$$H_{xy}=A\frac{R(K_1-K_2)}{MK_1-R^2}\frac{xy^2(3x^2-y^2)}{r^6} \tag{74c}$$

$$H_{yx}=-A\frac{R(K_1-K_2)}{MK_1-R^2}\frac{x^3(3y^2-x^2)}{r^6} \tag{74d}$$

其中, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, a 代表位错核尺寸, 并且

$$A=\frac{b_1^{\parallel}}{\pi}\frac{(L-M)(MK_1-R^2)}{(L+M)K_1+(MK_1-R^2)}. \tag{75}$$

以上是声子位错分量引起的位移场和应力场. 类似的求解可以得到由相位子位错分量引起的位移场和应力场如下

$$u_x=\frac{b_1^{\perp}k_0}{2\pi c_2}\Big[\frac{xy}{r^2}-\frac{c_1-c_2}{2c_1}\frac{2xy^3}{r^4}\Big] \tag{76a}$$

$$u_y=\frac{b_1^{\perp}k_0}{2\pi c_2}\Big[-\frac{xy}{r^2}+\frac{c_1-c_2}{2c_1}\frac{y^2(x^2-y^2)}{r^4}\Big] \tag{76b}$$

$$w_x=\frac{b_1^{\perp}}{2\pi}\Big[\arctan\frac{y}{x}+\frac{c_0k_0}{2c_1c_2}\frac{xy(3x^2-y^2)(3y^2-x^2)}{3r^6}\Big] \tag{76c}$$

$$w_y=\frac{b_1^{\perp}}{2\pi}\Big[\Big(1-\frac{L+2M}{2c_1}-\frac{M}{2c_2}\Big)\ln\frac{r}{a}+\frac{c_0k_0}{2c_1c_2}\frac{y^2(3x^2-y^2)^2}{3r^6}\Big] \tag{76d}$$

$$\sigma_{xx}=-\frac{c_0b_1^{\perp}k_0}{\pi c_1R}\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{r^6} \tag{77a}$$

$$\sigma_{yy}=-\frac{c_0b_1^{\perp}k_0}{\pi c_1R}\frac{y^3(3x^2-y^2)}{r^6} \tag{77b}$$

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\frac{c_0b_1^{\perp}k_0}{\pi c_1R}\frac{2xy^2(y^2-x^2)}{r^6} \tag{77c}$$

$$H_{xx}=\frac{k_0b_1^{\perp}}{2\pi e_1}\Big[(e_1+e_2)\frac{y}{r^2}-\frac{2x^2y(3x^2-y^2)(3y^2-x^2)}{r^8}\Big] \tag{78a}$$

$$H_{yy}=-\frac{k_0b_1^{\perp}y}{2\pi e_1}\Big[\frac{2(x^2-y^2)}{r^4}+\frac{(x^2-y^2)(3x^2-y^2)(3y^2-x^2)}{r^8}\Big] \tag{78b}$$

$$H_{xy}=\frac{k_0b_1^{\perp}}{2\pi e_1}\Big[(e_1+e_2)\frac{x}{r^2}+\frac{2xy^2(3x^2-y^2)(3y^2-x^2)}{r^8}\Big] \tag{78c}$$

$$H_{yx}=-\frac{k_0b_1^{\perp}x}{2\pi e_1}\frac{2(x^2-y^2)}{r^4}+\frac{(x^2-y^2)(3x^2-y^2)(3y^2-x^2)}{r^8} \tag{78d}$$

其中

$$e_1=\frac{2c_1c_2}{c_0k_0},\quad e_2=\frac{c_1c_2}{c_0k_0}\Big(\frac{c_1'}{c_1}+\frac{c_2'}{c_2}\Big)$$

$$c_1'=(L+2M)K_2-R^2,\quad c_2'=MK_2-R^2$$

并且 c_0, c_1, c_2 和 k_0 为

$$c_0=(L+2M)R,\quad c_1=(L+2M)K_1-R^2$$

$$c_2=MK_1-R^2,\quad k_0=R(K_1-K_2)$$

以上结果表明声子与相位子场是相互耦合的, 比晶体复杂得多.

这里发展的方法是系统的, 直接的, 是构造性的, 按照确定的步骤, 问题的解一定能构造出来, 解的存在和唯一可以用直接代入法验证. 用以上方法不仅求得了二维五次, 十次对称, 还求得八次对

称, 十二次对称准晶的位错解. 这里不一一列举, 可以参考文献 [43-44].

7.2 二维准晶的裂纹

以上发展的方法论不仅求解了一系列准晶位错问题, 它的重要作用更在于成功地求解了前人从未求解过的准晶裂纹问题. 准晶在常温和低温下呈现脆性, 研究其裂纹和断裂问题很有意义. 但是裂纹问题比位错复杂得多. 位错是一维缺陷, 裂纹是二维或三维缺陷, 边界条件比位错问题要复杂得多. 使用 Fourier 变换之后, 未知函数不是化成代数方程, 而是化成对偶积分方程, 例如

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{d_{11}}\int_0^\infty [C(\xi)\xi - 6D(\xi)]\cos(\xi x)\mathrm{d}\xi = \\
&\qquad -p, 0<x<a \\
&\int_0^\infty \xi^{-1}[C(\xi)\xi - 6D(\xi)]\cos(\xi x)\mathrm{d}\xi = \\
&\qquad 0, x>a \\
&\frac{2}{d_{12}}\int_0^\infty D(\xi)\cos(\xi x)\mathrm{d}\xi = 0, \quad 0<x<a \\
&\int_0^\infty \xi^{-1}D(\xi)\cos(\xi x)\mathrm{d}\xi = 0, \quad x>a
\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

这个积分方程可以得到精确解, 即

$$2C(\xi)\xi = d_{11}p\alpha \mathrm{J}_1(a\xi),\ D(\xi) = 0 \tag{80}$$

其中 $\mathrm{J}_1(a\xi)$ 为第一类 Bessel 函数, 因而问题得解. 进而从 Fourier 变换空间返回物理空间的逆变换 (即 Fourier 反演) 也可以得到精确解, 因而问题被完全精确求解 [51], 这在准晶研究中是第一次. 结果列写如下

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -p[1+\overline{r}(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-3/2}\cos(\theta-\overline{\theta})] - \\
&\quad p\overline{r}(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-3/2}\sin\theta\sin 3\overline{\theta} \\
\sigma_{yy} &= -p[1-\overline{r}(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-3/2}\cos(\theta-\overline{\theta})] + \\
&\quad p\overline{r}(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-3/2}\sin\theta\sin 3\overline{\theta} \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = p\overline{r}(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-3/2}\sin\theta\cos 3\overline{\theta} \\
H_{xx} &= -4d_{21}p\overline{r}(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-3/2}\sin\theta\cos 3\overline{\theta} - \\
&\quad 6d_{21}p\overline{r}^3(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-5/2}\sin^2\theta\cos(\theta-5\overline{\theta}) \\
H_{yy} &= -6d_{21}p\overline{r}^3(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-5/2}\sin^2\theta\cos(\theta-5\overline{\theta}) \\
H_{xy} &= 6d_{21}p\overline{r}^3(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-5/2}\sin^2\theta\sin(\theta-5\overline{\theta}) \\
H_{yx} &= 4d_{21}p\overline{r}(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-3/2}\sin\theta\cos 3\overline{\theta} + \\
&\quad 6d_{21}p\overline{r}^3(\overline{r_1}\,\overline{r_2})^{-5/2}\sin^2\theta\sin(\theta-5\overline{\theta})
\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

其中这些极坐标的意义见图 6.

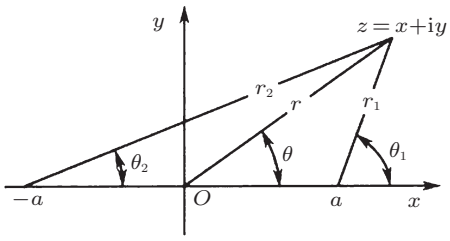


图 6 裂纹坐标系

断裂理论中最重要的物理参量, 例如应力强度因子和能量释放率都可以计算得到, 例如 [51]

$$K_I^{\parallel} = \lim_{x\to a^+}\sqrt{2\pi(x-a)}\sigma_{yy}(x,0) = \sqrt{\pi a}p \tag{82}$$

$$G_I = \frac{1}{2}\frac{\partial W_1}{\partial a} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{L+M} + \frac{K_1}{MK_1-R^2}\right)(K_I^{\parallel})^2 \tag{83}$$

从能量释放率可见, 声子场, 相位子场和声子–相位子耦合场都有贡献. 这些新物理量对准晶的断裂研究意义很大. 这是准晶裂纹问题的第一个解, 同时是精确解.

以上结果是针对五次, 十次对称准晶计算出来的, 对八次, 十二次对称准晶裂纹问题的解也已经得到 [43-44].

7.3 三维准晶的位错

二十面体准晶无论在理论或实际应用上都是最重要的. 它的位错问题也极其重要. Yang 等 [62] 得到一个近似解, 即假设声子场与相位子场不耦合, 也就是令 $R=0$.

我们认为这个假设不符合实际情况, 必须排除, 因而需要重新求解. 这一求解只能从方程 (63) 出发.

对方程 (63) 作 Fourier 变换 (65), 那么它化成一个 6 阶常微分方程, 含有 6 个待定函数. 由边界条件 (包括位错条件和无穷远处的条件), 确定这 6 个待定函数, 因而得到问题的解如下

$$u_x = \frac{1}{2\pi}\left(b_1^{\parallel}\arctan\frac{y}{x} + c_{12}\frac{xy}{r^2} + c_{13}\frac{xy^3}{r^4}\right)$$

$$u_y = \frac{1}{2\pi}\left[-c_{21}\ln\frac{r}{r_0} + c_{22}\frac{y^2}{r^2} + c_{23}\frac{y^2(y^2-x^2)}{2r^4}\right]$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi}\left(-c_{31}\arctan\frac{y}{x} + c_{32}\frac{xy}{r^2} + c_{33}\frac{xy^3}{r^4}\right)$$

$$
\begin{aligned}
w_x &= \frac{1}{2\pi}\left(b_1^{\perp}\arctan\frac{y}{x}+c_{42}\frac{xy}{r^2}+c_{43}\frac{xy^3}{r^4}\right)\\
w_y &= \frac{1}{2\pi}\left(-c_{51}\ln\frac{r}{r_0}+c_{52}\frac{y^2}{r^2}+c_{53}\frac{y^2(y^2-x^2)}{2r^4}\right)\\
w_z &= \frac{1}{2\pi}\left(-c_{61}\arctan\frac{y}{x}+c_{62}\frac{xy}{r^2}+c_{63}\frac{xy^3}{r^4}\right) \qquad (84)
\end{aligned}
$$

其中 $r^2=x^2+y^2$, r_0 为位错和半径, c_{ij} 为常数, 确定如下

$$
\begin{aligned}
c_{12} &= 2c_0\{\mu(2R^2+c_0\mu)(\lambda^2+3\lambda\mu+2\mu^2)b_1^{\parallel}+\\
&\quad R[-e(\lambda+\mu)+2\mu c_0(\lambda+2\mu)^2]b_1^{\perp}\}/\\
&\quad\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{13} &= 2c_0R(\lambda+\mu)[2R\mu(\lambda+\mu)b_1^{\parallel}+\\
&\quad 2\mu c_0(\lambda+2\mu)b_1^{\perp}]/\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{21} &= [2c_0^2\mu^3(\lambda+2\mu)-2e^2]b_1^{\parallel}+\\
&\quad 2c_0R(\lambda+3\mu)eb_1^{\perp}/\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{22} &= 2c_0\{-\mu^2(\lambda+\mu)[-2R^2+c_0(\lambda+2\mu)]b_1^{\parallel}+\\
&\quad R[-(\lambda+\mu)e+2c_0\mu^2]b_1^{\perp}\}/\{-e[2e+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\mu c_0(\lambda+2\mu)\cdot\\
&\quad[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{23} &= 2c_0R(\lambda+\mu)[2R\mu(\lambda+\mu)b_1^{\parallel}+2c_0\mu^2b_1^{\perp}]/\\
&\quad\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{31} &= -3c_1e\{2(c_0\mu+7e)\mu c_0(\lambda+2\mu)b_1^{\parallel}+\\
&\quad R\{54c_0^2(\lambda^2+3\lambda\mu+\mu^2)-2(\alpha-\beta)[e+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}b_1^{\perp}\}/\{4c_0R\{-e[2e+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+\\
&\quad 2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\}\\
c_{32} &= 3c_1e\{2\mu[-e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]b_1^{\parallel}+\\
&\quad R[-2e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]b_1^{\perp}\}/\\
&\quad\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\mu c_0(\lambda+2\mu)\cdot\\
&\quad[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{33} &= -3ec_1[2R\mu(\lambda+\mu)b_1^{\parallel}+2\mu c_0(\lambda+2\mu)b_1^{\perp}]/\\
&\quad\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{42} &= -2e[2R\mu(\lambda+\mu)b_1^{\parallel}+2\mu c_0(\lambda+2\mu)b_1^{\perp}]/\\
&\quad\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{43} &= 0\\
c_{51} &= \{-4e\mu^2c_0(\lambda+2\mu)b_1^{\parallel}+\\
&\quad R(2(\lambda+2\mu)(e+0.5\mu c_0)+\\
&\quad\mu\{2\beta^2\mu+2c_0^2(\lambda+2\mu)^2+\\
&\quad c_0(\lambda+2\mu)[-\beta\mu+R^2(\lambda+\mu)]\}b_1^{\perp}\}/\\
&\quad\{R\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\}\\
c_{52} &= -2e[2R\mu(\lambda+\mu)b_1^{\parallel}+2\mu c_0(\lambda+2\mu)b_1^{\perp}]/\\
&\quad\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{53} &= 0\\
c_{61} &= -3c_2e\{(2(c_0\mu+7e)\mu c_0(\lambda+2\mu)b_1^{\parallel}+\\
&\quad R\{54c_0^2(\lambda^2+3\lambda\mu+\mu^2)-\\
&\quad 2(\alpha-\beta)[e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}b_1^{\perp})\}/\\
&\quad 4c_0R\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{62} &= 3ec_2\{2\mu[-e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]b_1^{\parallel}+R[-2e+\\
&\quad 2\mu c_0(\lambda+2\mu)]b_1^{\perp}\}/\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\}\\
c_{63} &= -3ec_2[2R\mu(\lambda+\mu)b_1^{\parallel}+2\mu c_0(\lambda+2\mu)b_1^{\perp}]/\\
&\quad\{-e[2e+\mu c_0(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad\mu c_0(\lambda+2\mu)[e+2\mu c_0(\lambda+2\mu)]\} \qquad (85)
\end{aligned}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
e &= -(\lambda+\mu)R^2\\
c_0 &= \omega\frac{\mu K_2^2+(K_1-3K_2)R^2}{\mu(K_1-K_2)-R^2}\\
\omega &= \mu(\lambda+2\mu)
\end{aligned}
$$

式 (84) 只列举了位错分量 $b_1^{\parallel}$, $b_1^{\perp}$ 引起的位移场, 其他分量激发的位移场可以类似地得到.

当相位子场和声子–相位子耦合场不存在时,

以上的解还原为晶体的刃型位错的解, 即

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{b_1^{\parallel}}{2\pi}\left(\arctan\frac{y}{x}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{xy}{r^2}\right)+\\
&\quad \frac{b_2^{\parallel}}{2\pi}\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\ln\frac{r}{r_0}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{x^2}{r^2}\right)\\
u_y &= -\frac{b_1^{\parallel}}{2\pi}\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\ln\frac{r}{r_0}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{x^2}{r^2}\right)+\\
&\quad \frac{b_2^{\parallel}}{2\pi}\left(\arctan\frac{y}{x}-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{xy}{r^2}\right)\\
u_z &= \frac{b_3^{\parallel}}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

图 7 和图 8 给出了准晶位错解与晶体位错解的对比, 计算中使用了材料常数 $\lambda = 74.9$, $\mu = 72.4$ GPa, $K_1 = 72$, $K_2 = -73$ MPa, 而耦合常数取了 3 种不同的数值, 即 $R/\mu = 0$, $R/\mu = 0.004$ 和 $R/\mu = 0.006$, 其中头一种情形对应晶体的解.

此工作由 Zhu, Fan 和 Guo [63] 作出.

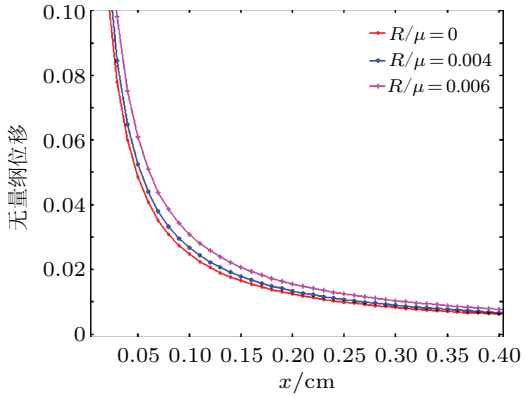


图 7 二十面体准晶位错的解 (x 方向的变化) 及其和晶体的解的对比

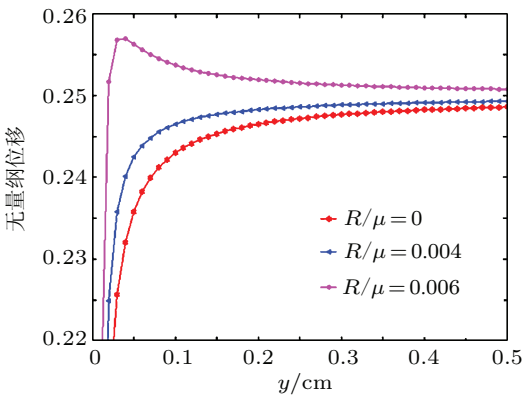


图 8 二十面体准晶位错的解 (y 方向的变化) 及其和晶体的解的对比

7.4 三维准晶的裂纹

三维准晶的裂纹自然比位错问题复杂得多, 也更难求解. Zhu 和 Fan [64] 用 Fourier 变换和对偶积分方程求解了二十面体准晶的裂纹问题, 这里仅列出解的位移场

$$
\begin{aligned}
u_x/p &= c_{11}[(r_1r_2)^{1/2}\cos\bar{\theta}-r\cos\theta]+\\
&\quad c_{12}r^2(r_1r_2)^{-1/2}\sin\theta\sin(\theta-\bar{\theta})+\\
&\quad 1/2c_{13}r^2(r_1r_2)^{-3/2}a^2\sin^2\theta\cos3\bar{\theta}\\
&\quad -1/2c_{14}r^4(r_1r_2)^{-5/2}a^2\sin^3\theta\sin(\theta-5\bar{\theta})-\\
&\quad 1/8c_{15}r^4(r_1r_2)^{-7/2}a^2\sin^4\theta h_{21}+\\
&\quad 1/8c_{16}r^6(r_1r_2)^{-9/2}a^2\sin^5\theta h_{22}\\
u_y/p &= c_{21}[(r_1r_2)^{1/2}\sin\bar{\theta}-r\sin\theta]+\\
&\quad c_{22}r[1-r(r_1r_2)^{-1/2}\cos(\theta-\bar{\theta})]\sin\theta-\\
&\quad 1/2c_{23}r^2(r_1r_2)^{-3/2}a^2\sin^2\theta\sin3\bar{\theta}+\\
&\quad 1/2c_{24}r^4(r_1r_2)^{-5/2}a^2\sin^3\theta\cos(\theta-5\bar{\theta})+\\
&\quad 1/8c_{25}r^4(r_1r_2)^{-7/2}a^2\sin^4\theta h_{11}-\\
&\quad 1/8c_{26}r^6(r_1r_2)^{-9/2}a^2\sin^5\theta h_{12}\\
u_z/p &= c_{31}[(r_1r_2)^{1/2}\cos\bar{\theta}-r\cos\theta]+\\
&\quad c_{32}r^2(r_1r_2)^{-1/2}\sin\theta\sin(\theta-\bar{\theta})+\\
&\quad 1/2c_{33}r^2(r_1r_2)^{-3/2}a^2\sin^2\theta\cos3\bar{\theta}-\\
&\quad 1/2c_{34}r^4(r_1r_2)^{-5/2}a^2\sin^3\theta\sin(\theta-5\bar{\theta})-\\
&\quad 1/8c_{35}r^4(r_1r_2)^{-7/2}a^2\sin^4\theta h_{21}+\\
&\quad 1/8c_{36}r^6(r_1r_2)^{-9/2}a^2\sin^5\theta h_{22}\\
w_x/p &= c_{41}[(r_1r_2)^{1/2}\cos\bar{\theta}-r\cos\theta]+\\
&\quad c_{42}r^2(r_1r_2)^{-1/2}\sin\theta\sin(\theta-\bar{\theta})+\\
&\quad 1/2c_{43}r^2(r_1r_2)^{-3/2}a^2\sin^2\theta\cos3\bar{\theta}-\\
&\quad 1/2c_{44}r^4(r_1r_2)^{-5/2}a^2\sin^3\theta\sin(\theta-5\bar{\theta})-\\
&\quad 1/8c_{45}r^4(r_1r_2)^{-7/2}a^2\sin^4\theta h_{21}+\\
&\quad 1/8c_{46}r^6(r_1r_2)^{-9/2}a^2\sin^5\theta h_{22}\\
w_y/p &= c_{51}[(r_1r_2)^{1/2}\sin\bar{\theta}-r\sin\theta]+\\
&\quad c_{52}r[1-r(r_1r_2)^{-1/2}\cos(\theta-\bar{\theta})]\sin\theta-\\
&\quad 1/2c_{53}r^2(r_1r_2)^{-3/2}a^2\sin^2\theta\sin3\bar{\theta}+\\
&\quad 1/2c_{54}r^4(r_1r_2)^{-5/2}a^2\sin^3\theta\cos(\theta-5\bar{\theta})+\\
&\quad 1/8c_{55}r^4(r_1r_2)^{-7/2}a^2\sin^4\theta h_{11}-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&1/8c_{56}r^6(r_1r_2)^{-9/2}a^2\sin^5\theta h_{12}\\
w_z/p = {}& c_{61}[(r_1r_2)^{1/2}\cos\bar{\theta} - r\cos\theta] +\\
&c_{62}r^2(r_1r_2)^{-1/2}\sin\theta\sin(\theta-\bar{\theta}) +\\
&1/2c_{63}r^2(r_1r_2)^{-3/2}a^2\sin^2\theta\cos 3\bar{\theta} -\\
&1/2c_{64}r^4(r_1r_2)^{-5/2}a^2\sin^3\theta\sin(\theta-5\bar{\theta}) -\\
&1/8c_{65}r^4(r_1r_2)^{-7/2}a^2\sin^4\theta h_{21} +\\
&1/8c_{66}r^6(r_1r_2)^{-9/2}a^2\sin^5\theta h_{22}
\end{aligned}
\tag{87}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= a^2\sin 7\bar{\theta} - 4r^2\sin(2\theta - 7\bar{\theta})\\
h_{12} &= 3a^2\cos(\theta - 9\bar{\theta}) + 4r^2\cos(3\theta - 9\bar{\theta})\\
h_{21} &= a^2\cos 7\bar{\theta} + 4r^2\cos(2\theta - 7\bar{\theta})\\
h_{22} &= 3a^2\sin(\theta - 9\bar{\theta}) + 4r^2\sin(3\theta - 9\bar{\theta})
\end{aligned}
\tag{88}
$$

常数 c_{ij} 如下

$$
\begin{aligned}
c_{i1} &= \sum_{j=1}^{6} a_{j1}b_j, c_{i2} = \sum_{j=1}^{5} a_{j1}b_{j+1},\\
c_{i3} &= \sum_{j=1}^{4} a_{j1}b_{j+2},\\
c_{i4} &= \sum_{j=1}^{3} a_{j1}b_{j+3},\\
c_{i5} &= \sum_{j=1}^{2} a_{j1}b_{j+4},\\
c_{i6} &= \sum_{j=1}^{1} a_{j1}b_{j+5},\quad i = 1, 2, \cdots, 6
\end{aligned}
\tag{89}
$$

$\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$, a_{ij} 为弹性常数, 见下面公式

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= R[2c_0(5\lambda + 9\mu) - \alpha\mu]\\
a_{12} &= R(\alpha\mu - 2c_0(39\lambda + 67\alpha\mu))\\
a_{13} &= 2R(-6\alpha\mu + 8\beta(\lambda + 2\mu) +\\
&\quad c_0(111\lambda + 179\mu))\\
a_{14} &= -2R(157c_0\lambda + 28\beta\lambda + 249c_0\mu -\\
&\quad 16\alpha\mu + 56\beta\mu)\\
a_{15} &= 5R(-7\alpha\mu + 16\beta(\lambda + 2\mu) +\\
&\quad c_0(50\lambda + 82\mu))\\
a_{16} &= R(21\alpha\mu - 58\beta(\lambda + 2\mu) -\\
&\quad 8c_0(15\lambda + 26\mu))\\
a_{21} &= c_0R(32\lambda + 27\mu)\\
a_{22} &= -14c_0R(8\lambda + 5\mu)\\
a_{23} &= R(c_0(176\lambda + 59\mu) +\\
&\quad 16(\beta\lambda - \alpha\mu + 2\beta\mu))\\
a_{24} &= -8(c_0(20\lambda - 2\mu) - 7\alpha\mu +\\
&\quad 5\beta(\lambda + 2\mu))\\
a_{25} &= 10R(c_0(9\lambda - 7\mu) +\\
&\quad 4(-2\alpha\mu + \beta(\lambda + 2\mu)))\\
a_{26} &= R(62\alpha\mu - 18\beta(\lambda + 2\mu) +\\
&\quad c_0(-30\lambda + 62\mu))\\
a_{31} &= 2c_1(24\alpha - 5\beta)\\
a_{32} &= c_1(-192\alpha + 78\beta)\\
a_{33} &= c_1(340\alpha - 226\beta)\\
a_{34} &= c_1(-352\alpha + 306\beta)\\
a_{35} &= 5c_1(47\alpha - 43\beta)\\
a_{36} &= c_1(-103\alpha + 85\beta)\\
a_{41} &= 0\\
a_{43} &= -16\omega c_0\\
a_{43} &= -16\omega c_0\\
a_{44} &= -24\omega(2c_0 - \alpha + \beta)\\
a_{45} &= 60\omega(c_0 - \alpha + \beta)\\
a_{46} &= -2\omega(20c_0 - 27(\alpha - \beta))\\
a_{51} &= 0\\
a_{52} &= 32\omega(\alpha - \beta)\\
a_{53} &= -16\omega(c_0 + 7\alpha - 7\beta)\\
a_{54} &= 24\omega(2c_0 + 7\alpha - 7\beta)\\
a_{55} &= -4\omega(17c_0 + 37\alpha - 33\beta)\\
a_{56} &= 2\omega(28c_0 + 43\alpha - 27\beta)\\
a_{61} &= 2c_2(24\alpha - 5\beta)\\
a_{62} &= c_2(-192\alpha + 78\beta)\\
a_{63} &= c_2(340\alpha - 226\beta)\\
a_{64} &= c_2(-352\alpha + 306\beta)\\
a_{65} &= 5c_2(47\alpha - 43\beta)\\
a_{66} &= c_2(-103\alpha + 85\beta)
\end{aligned}
\tag{90}
$$

而 b_j 定义如下

$$
b_j = (-1)^j\frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, \cdots, 6 \tag{91}
$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{vmatrix} \tag{92}$$

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} b_{21} & \cdots & b_{2,j-1} & b_{2,j+1} & \cdots & b_{26} \\ b_{31} & \cdots & b_{3,j-1} & b_{3,j+1} & \cdots & b_{36} \\ b_{41} & \cdots & b_{4,j-1} & b_{4,j+1} & \cdots & b_{46} \\ b_{51} & \cdots & b_{5,j-1} & b_{5,j+1} & \cdots & b_{56} \\ b_{61} & \cdots & b_{6,j-1} & b_{6,j+1} & \cdots & b_{66} \end{vmatrix}$$

元素 b_{ij} 为

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -R[\alpha\lambda\mu + c_0(22\lambda^2 + 73\lambda\mu + 54\mu^2)] \\
b_{12} &= R[32\omega(\alpha-\beta) + \alpha\lambda\mu + \\
&\quad c_0(66\lambda^2 + 215\lambda\mu + 194\mu^2)] \\
b_{13} &= -R\{c_0(32\omega + 66\lambda^2 + 347\lambda\mu + 258\mu^2) + \\
&\quad 4\{36\omega(\alpha-\beta) + \mu[8\beta(\lambda+2\mu) - \alpha(\lambda+8\mu)]\}\} \\
b_{14} &= R\{c_0(112\omega + 22\lambda^2 + 217\lambda\mu + 86\mu^2) + \\
&\quad 8\{32\omega(\alpha-\beta) + \mu[14\beta(\lambda+2\mu) - \\
&\quad \alpha(5\lambda+18\mu)]\}\} \\
b_{15} &= R\{-4c_0[44\omega + (\lambda-43\mu)\mu] + \\
&\quad 16\omega(16\beta-15\alpha) + \mu[-160\beta(\lambda+2\mu) + \\
&\quad \alpha(101\lambda+272\mu)]\} \\
b_{16} &= R\{4c_0[41\omega - (25\lambda+66\mu)\mu] - \\
&\quad 12\omega(11\beta-15\alpha) + \mu[116\beta(\lambda+2\mu) - \\
&\quad \alpha(121\lambda+284\mu)]\} \\
b_{21} &= 2(c_2K_2 + c_1R)(24\alpha-5\beta) + \\
&\quad R^2[-c_0(21\lambda+8\mu) + \beta(\lambda+2\mu) - 2\alpha\mu] \\
b_{22} &= (c_2K_2 - c_1R)(-288\alpha+98\beta) + \\
&\quad R^2[c_0(109\lambda-10\mu) - \beta(\lambda+2\mu) + 14\alpha\mu] \\
b_{23} &= 4(c_2K_2 + c_1R)(193\alpha-98\beta) - \\
&\quad 54\alpha\mu R^2 - c_0[16K_1\omega + \\
&\quad R^2(220\lambda-239\mu)] \\
b_{24} &= 2[-(c_2K_2 - c_1R)(612\alpha-418\beta) - \\
&\quad 12K_1\omega(\alpha-\beta) + 59\alpha\mu R^2] + \\
&\quad 5c_0[16K_1\omega + R^2(44\lambda-157\mu)] \\
b_{25} &= (c_2K_2 - c_1R)(1279\alpha-1053\beta) + \\
&\quad 108K_1\omega(\alpha-\beta) - 145\alpha\mu R^2 + c_0[-172K_1\omega - \\
&\quad 5R^2(22\lambda-216\mu)] \\
b_{26} &= -(c_2K_2 - c_1R)(925\alpha-821\beta) - \\
&\quad 198K_1\omega(\alpha-\beta) + 99\alpha\mu R^2 + \\
&\quad c_0[208K_1\omega + R^2(22\lambda-1325\mu)] \\
b_{31} &= -2[c_2(K_1-K_2) + c_1R](24\alpha-5\beta) + \\
&\quad RK_2[c_0(42\lambda+45\mu) - \alpha\mu] \\
b_{32} &= 2[c_2(K_1-K_2) + c_1R](144\alpha-49\beta) - \\
&\quad RK_2[c_0(242\lambda+267\mu) - 3\alpha\mu] \\
b_{33} &= -4[c_2(K_1-K_2) + c_1R](193\alpha-98\beta) + \\
&\quad RK_2[c_0(676\lambda+773\mu) - 31\alpha\mu + 32\beta(\lambda+2\mu)] \\
b_{34} &= 4[c_2(K_1-K_2) + c_1R](306\alpha-209\beta) - \\
&\quad RK_2[c_0(1172\lambda+1391\mu) - 129\alpha\mu + \\
&\quad 144\beta(\lambda+2\mu)] \\
b_{35} &= -[c_2(K_1-K_2) + c_1R](1279\alpha-1053\beta) + \\
&\quad RK_2[2c_0(675\lambda+839\mu) - 247\alpha\mu + \\
&\quad 288\beta(\lambda+2\mu)] \\
b_{36} &= [c_2(K_1-K_2) + c_1R](925\alpha-821\beta) + \\
&\quad RK_2[34c_0(31\lambda+41\mu) - 265\alpha\mu + \\
&\quad 332\beta(\lambda+2\mu)] \\
b_{41} &= -2(c_2R + c_1\mu)(24\alpha-5\beta) \\
b_{42} &= -4[(c_2R + c_1\mu)(96\alpha-39\beta) + \\
&\quad R\omega(20\alpha-16\beta+2c_0)] \\
b_{43} &= -4[19(c_2R + c_1\mu)(7\alpha-4\beta) + \\
&\quad 28R\omega(\alpha-\beta)] \\
b_{44} &= 4[(c_2R + c_1\mu)(61\alpha-49\beta) - \\
&\quad R\omega(64\alpha-36\beta-24c_0)] \\
b_{45} &= (c_2R + c_1\mu)(587\alpha-521\beta) - \\
&\quad R\omega(232\alpha-216\beta-40c_0) \\
b_{46} &= (c_2R + c_1\mu)(338\alpha-300\beta) + \\
&\quad R\omega(200\alpha-168\beta-44c_0) \\
b_{51} &= R\mu[-c_0(42\lambda+45\mu) + \alpha\mu] \\
b_{52} &= -2R\{-4\omega(7\alpha-5\beta) + \\
&\quad \mu[11\alpha\mu - 4\beta(\lambda+2\mu)] + \\
&\quad c_0[4\omega + \mu(76\lambda+93\mu)]\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_{53} &= R\{112\omega(\alpha-\beta)+\mu[29\alpha\mu-32\beta(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad c_0[32\omega-\mu(476\lambda+551\mu)]\}\\
b_{54} &= 4R\{-\omega(92\alpha-120\beta)+\\
&\quad \mu[31\alpha\mu-56\beta(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad 2c_0[28\omega+\mu(17\lambda-7\mu)]\}\\
b_{55} &= R\{16\omega(4\alpha-3\beta)+\\
&\quad \mu[147\alpha\mu-176\beta(\lambda+2\mu)]+\\
&\quad 2c_0[88\omega-\mu(327\lambda+419\mu)]\}\\
b_{56} &= 2R\{2\omega(7\alpha-15\beta)-\\
&\quad \mu[59\alpha\mu-78\beta(\lambda+2\mu)]-\\
&\quad c_0[78\omega-\mu(200\lambda+278\mu)]\}\\
b_{61} &= -2(c_2K_2+c_1R)(24\alpha-5\beta)-\\
&\quad \omega(\alpha+c_0)(K_1+R)+Rc_0(42\lambda+46\mu)\\
b_{62} &= 6(c_2K_2+c_1R)(32\alpha-13\beta)+\\
&\quad \omega(9R\alpha-23K_1\alpha+32K_1\beta)-8R^2\alpha\mu+\\
&\quad 3c_0[3K_1\omega+R(3\omega-74R\lambda-80R\mu)]\\
b_{63} &= -2(c_2K_2+c_1R)(170\alpha-113\beta)+\\
&\quad \omega(-36R\alpha+108K_1\alpha+144K_1\beta)+\\
&\quad 8R^2(\alpha\mu+\beta\lambda)+c_0[-20K_1\omega++\\
&\quad R(-36\omega+510R\lambda+523R\mu)]\\
b_{64} &= 2(c_2K_2+c_1R)(176\alpha-153\beta)+\\
&\quad 2\omega(42R\alpha-98K_1\alpha+140K_1\beta)+\\
&\quad 4R^2(5\alpha\mu-56\beta\lambda-112\beta\mu)+\\
&\quad c_0[20K_1\omega+R(84\omega-650R\lambda-625R\mu)]\\
b_{65} &= -5(c_2K_2+c_1R)(47\alpha-43\beta)+\\
&\quad 2\omega(-63R\alpha+95K_1\alpha+150K_1\beta)+\\
&\quad 5R^2(-9\alpha\mu+32\beta\lambda+64\beta\mu)-\\
&\quad 2c_0\{5K_1\omega+R[63\omega-25R(10\lambda+9\mu)]\}\\
b_{66} &= (c_2K_2+c_1R)(103\alpha-85\beta)+\\
&\quad 6\omega(21R\alpha-18K_1\alpha+31K_1\beta)+\\
&\quad R^2(37\alpha\mu-116\beta\lambda-232\beta\mu)+\\
&\quad 2c_0[K_1\omega+R(63\omega-120R\lambda-101R\mu)] \qquad (93)
\end{aligned}
$$

裂纹的能量释放率见图 9, 裂纹张开位移见图 10.

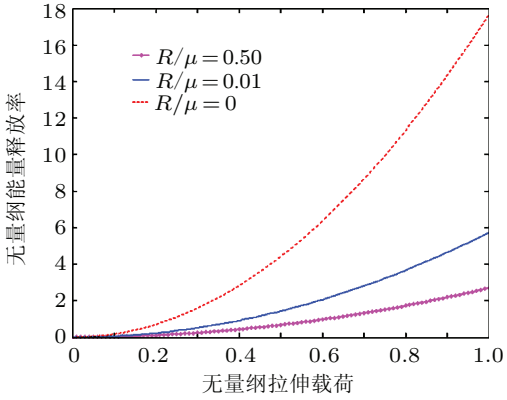


图 9　裂纹能量释放率随外载荷的变化以及声子–相位子耦合作用的影响

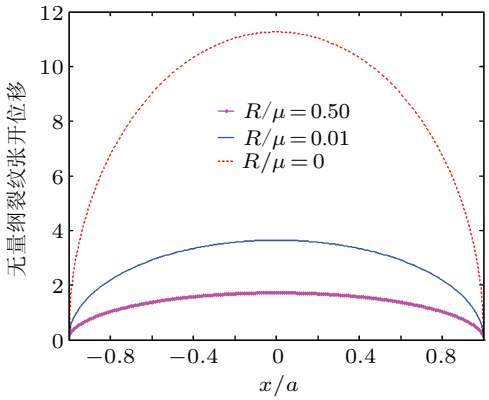


图 10 相位子和声子–相位子耦合对裂纹张开位移的影响

以上工作不仅获得了准晶弹性和缺陷问题精确解的重要信息, 而且大大拓广和发展了国际著名数学力学家, 英国皇家学会会员 Sneddon [65] 在 Fourier 分析及其应用方面的工作.

参 考 文 献

1 Shechtman D, Blech I, Gratias D, et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, 53(20): 1951-1953

2 Ye H Q, Wang D, Kuo K H. Five-fold symmetry in real and reciprocal space. *Ultramicrossopy*, 1985, 16(2): 273-277

3 Zhang Z, Ye H Q, Kuo K H. A new icosahedral phase with m35 symmetry. *Phil. Mag. A*, 1985, 52(6): L49-L52

4 Landau L D, Lifshitz M E. Theoretical Physics V: Statistical Physics, 3rd Edition, Pergamon Press, Oxford. 1980

5 Anderson P W. Basic Notations of Condensed Matter Physics, Menlo Park: Benjamin-Cummings, 1984

6 Einstein A. Die plackschen theorie der strahlung und die theorie der spezifischen waerme. *Ann. d. Phys.*, 1907, 22(4): 180-190

7 Debye P. Die Eigentuemlichkeit der spezifischen waermen bei tiefen temperaturen. *Arch de Genéve*, 1912, 33(4): 256-258

8 Born M, von Kármán Th. Zur theorie der spezifischen waermen. *Physikalische Zeitschrift*, 1913, 14(1): 15-19

Born M, Huang K. Dynamic Theory of Crystal Lattices, Clarendon Press, Oxford. 1954
9 Blinc B, Lavanyuk A P. Incommensurate Phases in Dielectrics I, II,. Amsterdam: North Holand, 1986
10 Penrose R. The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bull. Inst. Math. Appl.*, 1974, 10: 266-271
11 Bak P. Phenomenological theory of icosahedral incommensurate ("quaisiperiodic") order in Mn-Al alloys. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 54(8): 1517-1519
12 Bak P. Symmetry, stability and elastic properties of icosahedral incommensurate crystals. *Phys. Rev. B*, 1985, 32(9): 5764-5772
13 Levine D, Lubensky T C, Ostlund S, et al. Elasticity and dislocations in pentagonal and icosahedral quasicrystals. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 54(8): 1520-1523
14 Lubensky T C, Ramaswamy S, Toner J. Hydrodynamics of icosahedral quasicrystals. *Phys. Rev. B*, 1985, 32(11): 7444-7452
15 Lubensky T C, Ramaswamy S, Toner J. Dislocation motion in quasicrystals and implications for macroscopic properties. *Phys. Rev. B*, 1986, 33(11): 7715-7719
16 Lubensky T C, Socolar J E S, Steinhardt P J, et al. Distortion and peak broadening in quasicrystal diffraction patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, 57(12): 1440-1443
17 Lubensky T C. Introduction to Quasicrystals, Boston: Academic Press, 1988
18 Kalugin P A, Kitaev A, Levitov L S. 6-dimensional properties of $Al_{0.86}Mn_{0.14}$ alloy. *J. Phys. Lett.*, 1985, 46(13): 601-607
19 Torian S M, Mermin D. Mean-field theory of quasicrystalline order. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 54(14): 1524-1527
20 Jaric M V. Long-range icosahedral orientational order and quasicrystals. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 55(6): 607-610
21 Duneau M, Katz A. Quasiperiodic patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 54(25): 2688-2691
22 Socolar J E S, Lubensky T C, Steinhardt P J. Phonons, phasons, and dislocations in quasicrystals. *Phys. Rev. B*, 1986, 34(5): 3345-3360
23 Gahler F, Rhyner J. Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tilings. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1986, 19(2): 267-277
24 Ding D H, Yang W G, Wang R H, et al. Generalized elasticity theory of quasicrystals. *Phys. Rev. B*, 1993, 48(10): 7003-7010
25 Janssen T. The symmetry operations for n-dimensional periodic and quasi-periodic structures. *Zeitschrift fuer Kristall*, 1992, 198(1): 17-32
26 Yang W G, Ding D H, Wang R H, et al. *Phys. Rev. B*, 1994, 49: 12616-12621
27 Hu C Z, Wang R H, Ding D H. Rezoelectric effects in quasicrystals. *Phys. Rev. B*, 1997, 56: 2463-2468
28 Hu C Z, Wang R H, Ding D H. Symmetry groups physical property tensors, elastricity and disolcations in quasicrystals. *Rep Prog Phys*, 2000, 63(1): 1-39
29 Reynolds G A M, Golding B, Kortan A R, et al. Isotropic elasticity of the Al-Cu-Li quasicrystal. *Phys. Rev. B*, 1990, 41(2): 1194-1195
30 Spoor P S, Maynard J D, Kortan A R. Elastic isotropy and anisotropy in quasicrystalline and cubic AlCuLi. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 75(19): 3462-3465
31 Tanaka K, Mitarai, Koiwa M. Elastic constants of Al-based icosahedral quasicrystals. *Phil. Mag. A*, 1996, 73(6): 1715-1723
32 Duquesne J Y, Perrin B. Elastic wave interaction in icosahedral AlPdMn. *Physics B*, 2002. 316: 317-320
33 Foster K, Leisure R G, Shaklee A, et al. Elastic moduli of a Ti-Zr-Ni icosahedral quasicrystal and a 1/1 bcc crystal approximant. *Phys. Rev. B*, 1999, 59(17): 11132-11135
34 Schreuer J, Steurer W, Lograsso T A, et al. Elastic properties of icosahedral i-$Cd_{84}Yb_{16}$ and hexagonal h-$Cd_{51}Yb_{14}$. *Phil. Mag. Lett.*, 2004, 84(10): 643-653
35 Sterzel R, Hinkel C, Haas A, et al. Ultrasonic measurements on FCI Zn-Mg-Y single crystals. *Europhys. Lett.*, 2000, 49(6): 742-747
36 Letoublon A, de Boissieu M, Boudard M, et al. Phason elastic constants of the icosahedral Al-Pd-Mn phase derived from diffuse scattering measurements. *Phil. Mag. Lett.*, 2001, 81(4): 273-283
37 de Boissieu M, Francoual S, Kaneko Y, et al. Diffuse scattering and phason fluctuations in the Zn-Mg-Sc icosahedral quasicrystal and its Zn-Sc periodic approximant. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95(10): 105503/1-4
38 Edagawa K, So GI Y. Experimental evaluation of phonon-phason coupling in icosahedral quasicrystals. *Phil. Mag.*, 2007, 87(1): 77-95
39 Chernikov M A, Ott H R, Bianchi A, et al. Elastic moduli of a single quasicrystal of decagonal Al-Ni-Co: evidence for transverse elastic isotropy. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 80(2): 321-324
40 Jeong H C, Steinhardt P J. Finite-temperature elasticity phase transition in decagonal quasicrystals. *Phys. Rev. B*, 1993, 48(13): 9394-9403
41 Love A E H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th Edition, New York: Dover. 1944
42 Courant R, Hilbert D. Mathematical Physics Method, New York: Interscience, 1954
43 范天佑. 准晶数学弹性理论及应用. 北京: 北京理工大学出版社, 1999
44 Fan T Y. Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications. Beijing: Science Press/Heidelberg: Springer-Verlag, 2010
45 Peng Y Z, Fan T Y. Elastic theory of 1D quasiperiodic stacking of 2D crystals. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2000, 12(45): 9381-9387
46 Liu G T, Fan T Y, Guo R P. Governing equations and general solutions of plane elasticity of one-dimensional quasicrystals. *Int. J. Solid and Structures*, 2004, 41(14): 3949-3959
47 Chen W Q, Ma Y L, Ding H J. On three-dimensional elastic problems of one-dimensional hexagonal quasicrystal bodies. *Mech. Res. Commun.*, 2004, 31(5): 633-641
48 Wang X. The general solution of one-dimensional hexagonal quasicrystal. *Appl. Math. Mech.*, 2006, 33(4): 576-580
49 Gao Y, Zhao Y T, Zhao B S. Boundary value problems of holomorphic vector functions in one-dimensional hexagonal quasicrystals. *Physica B*, 2007, 394(1): 56-61
50 Li X F, Fan T Y. New method for solving elasticity problems of some planar quasicrystals and solutions. *Chin. Phys. Letter.*, 1998, 15(4): 278-280
51 Li X F, Fan T Y, Sun Y F. A decagonal quasicrystal with a Griffith crack. *Phil Mag A*, 1999, 79(8): 1943-1952
52 Li X F, Fan T Y, Sun Y F. Elastic field for a straight dislocation in a decagonal quasicrystal. *J Phys.: Condens Matter*, 1999, 11(3): 703-711
53 Guo Y C, Fan T Y. Mode II Griffith crack in decagonal quasicrystals. *Appl. Math. Mech.*, English Edition. 2001, 22(10): 1311-1317

54 Zhou W M, Fan T Y. Axisymmetric elasticity problem of cubic quasicrystal. *Chinese Physics B*, 2000, 9(4): 294-303
55 Zhou W M, Fan T Y. Plane elasticity and crack problem of octagonal quasicrystals. *Chin. Phys.*, 2001, 10(6): 277-284
56 Fan T Y, Guo L H. Final governing equation of plane elasticity of icosahedral quasicrystals. *Phys. Lett. A*, 2005, 341(5): 235-239
57 Li L H, Fan T Y. Final governing equation of plane elasticity of icosahedral quasicrystals–stress potential method. *Chin. Phys. Lett.*, 2006, 24(9): 2519-2521
58 De P, Pelcovits R A. Linear elasticity theory of pentagonal quasicrystals. *Phys. Rev. B*, 1987, 35(16): 8609-8620
59 Ding D H, Wang R H, Yang W G, et al. General for the elastic displacement fields induced by dislocations in quasicrystals. *J. Phys: Condens Matter*, 1995, 7(28): 5423-5436
60 Ding D H, Wang R H, Yang W G, et al. Elasticity theory of straight dislocations in quasicrystals. *Phil. Mag. Lett.*, 1995, 72(2): 352-359
61 杨顺华, 丁棣华. 晶体位错理论, 第 2 卷. 北京: 科学出版社, 1998
62 Yang W G, Ding D H, Feuerbacher U, et al. Atomtic model of dislocation in Al-Pd-Mn icosahedral quasicrystals. *Phil. Mag. A*, 1998, 77(6): 1481-1497
63 Zhu A Y, Fan T Y, Guo L H. A straight dislocation in an icosahedral quasicrystal. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2007, 19(23): 236216
64 Zhu A Y, Fan T Y. Elastic analysis of a Griffith crack in icosahedral Al-Pd-Mn quasicrystal. *Int. J. Mod. Phys. B*, 2009, 23(10): 1-16
65 Sneddon I N. Fourier Transforms. New York: McGrow-Hill, 1952

DEVELOPMENT ON MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY OF QUASICRYSTALS AND SOME RELEVANT TOPICS*

FAN Tianyou†

School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract This paper gives an introduction to the development on mathematical theory of elasticity of quasicrystals and some relevant topics, in which the physical framework of elasticity is discussed first, the measuremental data of material constants for quasicrystals in solid phase are one of the most important basis to the theory and applications and are listed in detail. As the fundamental points, the analytic methods and exact solutions for various boundary value or boundary-initial value problems are summarized, the Chinese researchers contributed the effort in this respect. Apart from elasticity, dynamics and plasticity of the novel material are also discussed. At last the paper offers a simple description on a possible theoretical treatment, from the view point of elasticity and hydrodynamics, to quasicrystals in soft matter phase observed very recently.

* The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (10372016, 10672022).

† E-mail: tyfan2006@yahoo.com.cn