力学进展
Advances in Mechanics

从几何分形到物理分形: 分数阶力学的概念、模型与方法

渐徵墨，王 兵，李群仰，蒋知臻，周天弈，蒋瑞恒，辛健强，殷雅俊

From geometric fractals to physical fractals: Concepts, models, and methods of fractional-order mechanics

JIAN Zhimo, WANG Bing, LI Qunyang, JIANG Zhizhen, ZHOU Tianyi, JIANG Ruiheng, XIN Jianqiang, and YIN Yajun

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/1000-0992-26-035

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

可编程多物理机制的力学超材料

Programmable multi-physical mechanics of mechanical metamaterials

力学进展. 2024, 54(4): 823-871

虚单元计算方法的最新理论与应用进展

Virtual element method: Theory and applications

力学进展. 2022, 52(4): 874-913

定常升阻力普适理论的特色和升力的物理来源

The universal steady lift and drag theory and the physical origin of lift

力学进展. 2021, 51(1): 106-129

基于准点缺陷理论探索非晶合金黏弹性行为

Viscoelastic behaviors of amorphous alloys in the framework of the quasi-point defect theory

力学进展. 2026, 56(1): 203-259

基于状态空间离散的非线性动力系统全局分析方法进展: 从模型驱动到数据驱动

State space discretization based methods for global analysis of nonlinear dynamic systems from model-driven to data-driven: A review

力学进展. 2025, 55(3): 455-496

固体力学中复杂性的智能解析

Resolving physical complexities with machine intelligence

力学进展. 2026, 56(1): 1-50

关注微信公众号，获得更多资讯信息

研究综述

从几何分形到物理分形: 分数阶力学的概念、模型与方法

渐徵墨[1]　王　兵[1]　李群仰[2]　蒋知臻[2]　周天弈[2]
蒋瑞恒[3]　辛健强[1,*]　殷雅俊[2,†]

[1] 清华大学航空发动机研究院, 北京 100084
[2] 清华大学航天航空学院, 北京 100084
[3] 北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191

摘　要 自 Newton 和 Leibniz 时代以来, 连续介质力学中的微元体概念一直发挥着基础性作用. 当研究视域从传统工程材料拓展至生命体时, 由于生命体的多尺度、多层级特征, 微元体这一经典概念面临新的挑战. 本文聚焦于分形与分数阶微积分的交叉融合, 分析了生物多级结构中分形雪花与物理分形空间的抽象过程, 回顾了分数阶力学的探索历程. 本文从两个经典问题——即“Mandelbrot 之问”与“L'Hospital 之问”——出发, 展示了如下探索路径: (a) 从几何分形到物理分形, (b) 从运动学到动力学, (c) 从分形维数到分数阶次. 具体内容包括: (a) 从生物体中抽象出的分形雪花及其生长运动学, (b) 从生命体中抽象出的分数阶算子及其理论建构; (c) 分数阶算子理论的应用. 在此基础上, 本文梳理了微元体概念从经典单元、代表性体积单元 RVE、点阵单胞、力学超材料单胞到分形胞元的演化脉络, 探讨了分数阶次的多重来源与分形–分数阶的时空关联性. 本文认为, 物理分形空间中的力学呈现非整数阶、非有理、非初等与非局部化的特征, 这为拓展力学的新疆界提供了全新的思路.

收稿日期: 2026-08-28; 录用日期: 2026-10-08; 在线出版日期: 2026-11-11

* E-mail: xinjq@tsinghua.edu.cn
† E-mail: yinyj@tsinghua.edu.cn

引用方式: 渐徵墨, 王兵, 李群仰, 蒋知臻, 周天弈, 蒋瑞恒, 辛健强, 殷雅俊. 从几何分形到物理分形: 分数阶力学的概念、模型与方法. 力学进展, 待出版

Jian Z M, Wang B, Li Q Y, Jiang Z Z, Zhou T Y, Jiang R H, Xin J Q, Yin Y J. From geometric fractals to physical fractals: Concepts, models, and methods of fractional-order mechanics. *Advances in Mechanics*, in press

© 2026《力学进展》版权所有

关键词 微元体，分形雪花，物理分形空间，分数阶微积分，分数阶算子理论

中图分类号：O34 **文献标识码**：A

DOI: 10.6052/1000-0992-26-035 CSTR: 32046.14.1000-0992-26-035

1 引 言

1.1 分形与分数阶微积分的两个经典问题

科学史上，一些重要发现往往起源于看似简单的提问. Mandelbrot (1967) 在 *Science* 上发表了一篇短文，题为《英国的海岸线有多长？统计自相似和分数维度》. 文章一经发表便震动科学界. Mandelbrot (1977, 1982) 指出，英国海岸线的测量长度取决于所用尺子的精度：尺子越短，测量结果越长；若尺子无限精细，测量结果趋于无穷. 换言之，海岸线的长度竟然不是个定值，根本测不准. 这彻底颠覆了人们的直觉，连长度都不可度量了！Mandelbrot 揭示了悖论的根源，即人们熟悉的空间是具有整数维数的 Euclid 空间，而海岸线是一种具有分数维数的新空间：分形空间. 用 Euclid 空间的尺子度量分形空间，自然会出现测不准的现象. 分形概念的诞生极大地拓展了人们的空间观，随后分形几何逐步发展，并迅速渗透到了众多学科之中，从物理学到生物学，从材料科学到经济学，无不留下分形思想的印记 (Vulpiani 2016, Patiño-Ortiz et al. 2024, Diliūnas et al. 2026, Sotomayor-del-Moral et al. 2026).

早在分形诞生前 3 个世纪，1695 年，L'Hospital 在致 Leibniz 的私人通信中提出了一个匪夷所思的问题：“你定义了 n 阶导数 $\mathrm{d}^n/\mathrm{d}t^n$，如果 n 取 1/2 会如何？”猛一听，这问题似乎有点异想天开. 但睿智的 Leibniz 丝毫没有轻视 L'Hospital 之问，他说这可能导致悖论，但也预言性地补充道：“有朝一日它将产生有用的结果，因为还没有无用的悖论”. 此后，Euler、Laplace、Fourier、Abel、Riemann、Liouville 等数学大师相继在这一方向上做出了贡献，他们纷纷登场、接力探索，携手开创了分数阶微积分的辉煌时代 (Podlubny 1999, Machado et al. 2011). 这些伟大先驱们的远见卓识，为后世留下了一笔丰厚的思想遗产.

Mandelbrot 与 L'Hospital 之问给予后世研究者一个深刻启示：好的问题本身就是最强大的引擎. 问了一个好问题，往往就意味着开启了一个新的学科方向. 分形与分数阶微积分各自经历了漫长的发展历程，一个自然而然的问题是：分形涉及分数维，分数阶微积分有分数阶，二者之间是否存在某种内在联系？如果存在，这种联系又意味着什么？这些问题构成了本文的出发点.

1.2 分数阶的物理起源之问

2000 年，本研究组问了第一个有趣的“小问题”：“分形涉及分数维；分数阶微积分涉及分数阶. 分数维与分数阶，都是分数，二者有关联吗？”提这个问题完全是基于直觉和联想，当时并没有意识到它有多重要. 2010 年，又问了第二个问题：“分数阶的阶次取决于什么因素？”在这“小问题”背后还隐藏着一个“不算小”的问题：“分数阶到底起源于何处？”提出这样的问题，是因为深

切地意识到了其背后的重大科学价值.

力学和物理学的基本方程, 大都是由算子刻画的守恒律微分方程 (邱志平 等 2025). 其导数算子应该追溯到 Newton 和 Leibniz 的质点力学

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1}$$

一般多维空间中, 力学和物理学的基本规律, 大都由不变量微分算子刻画. 例如, 固体力学中的平衡微分方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

流体力学中的 N-S 方程

$$-\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) \tag{3}$$

波动力学中的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u \tag{4}$$

式中, 最常见的是整数阶微分算子, 如梯度算子 $\nabla(\cdot)$ (1 阶矢量微分算子)、Laplace 算子 $\Delta(\cdot)$ (2 阶标量微分算子)、双调和算子 $\Delta\Delta(\cdot)$ (4 阶标量微分算子) 等. 这些整数阶算子具有明确的数学与物理含义, 其阶次的决定因素既有数学的也有物理的. 经典整数阶算子及其阶次都有清晰的数学力学起源和物理力学背景 (Katsikadelis 2019).

然而, 从 L'Hospital 之问可知, 1/2 阶导数最初完全是好奇心和想象力的产物. 换言之, 1/2 分数阶在很长一段时间里更像是"基于直觉的设想", 缺乏明确的物理实在. 这就带来了不可调和的矛盾: 一方面, 数学家们随心所欲地定义了各种各样的分数阶导数和分数阶积分, 迄今已有数十种定义; 另一方面, 力学和物理学学者在探索具体问题时, 由于不清楚分数阶算子的物理来源, 往往不知道应该选用哪一种定义. 这种不确定性在一定程度上制约了分数阶微积分在力学与物理学中的精准应用. 造成这种不确定性的深层原因在于: 分数阶算子的物理起源尚不够清晰, 决定分数阶次的因素也有待进一步认识.

分数阶的物理起源之问, 实际上是在追问一个更为根本的问题: 为什么经典力学中长期占据主导地位的是整数阶算子? 答案隐藏在微元体这个概念的深处 (**图 1**). 欧几里得空间是连续、光滑、平坦、整数维的空间形式, 微元体就是微小尺度上的欧几里得空间. 而连续介质力学和物理学的基本方程都是建立在微元体之上的守恒律方程 (刘敬喜和李国清 2018). 在经典框架中, 整数阶算子与微元体概念是深度捆绑的: 前者定义在后者之上, 后者为前者提供了不可替代的物理承载. 微元体是封闭的、局部的、连续的、整数维的, 其上的力学行为只能用局域性的微分算子来描述, 而局域性微分算子的阶次必然是整数. 这种捆绑是如此自然, 以至于极少意识到它其实是一个需要被审视的"默认设置". 因此, 在经典框架内追问分数阶的起源, 几乎不可能得到令人满意的答案: 因为分数阶算子既没有对应的微元体承载, 也没有守恒律方程的物理根基. 若分数阶确实存在于物理世界中, 那么需要改变的或许不是分数阶的定义方式, 而是研究者对"微元体"的想象. 发现一种新的算子, 往往意味着需要发现一种新的微元体. 分数阶的物理起源之问与微

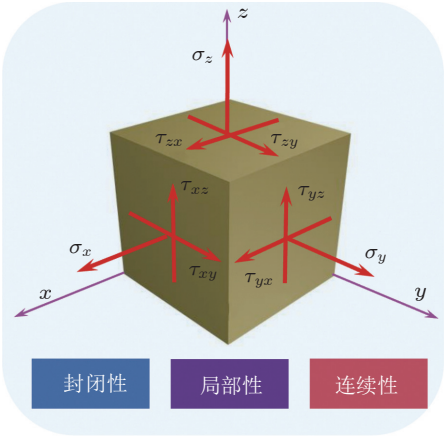


图 1

经典微元体的概念

元体的演化之问, 本就是同一个硬币的两面.

1.3 从几何分形到物理分形的探索之路

2018 年, 本研究组在分析肌腱等多级生物材料时迎来了一次重要转机 (Guo et al. 2019, 2020). 肌腱具有明显的多级纤维结构: 从宏观到微观通常包含数个结构层次, 如果“个性化地”逐级分析, 力学模型将变得极其复杂. 研究组曾尝试从肌腱横截面的分形特征入手, 希望能揭示分形维数与分数阶次之间的关联, 但未能成功. 困惑之际, 意识到探索的方向可能偏了: 力和变形是沿着肌腱纵向传递的, 真正重要的应当是纵向信息而非横向信息.

于是, 研究方向转向分析力和变形沿肌腱纵向的传递. 研究组采取了一条“反其道而行之”的思路: 不再逐级分析每一层的细节, 而是寻求不同层级之间的共性. 经过一系列抽象尝试, 从纤维束到单条纤维链, 从有限层级到无穷层级的理想化操作, 从力和变形的逐级传递到等效网络的建立, 一套新的概念逐渐形成: 物理分形、分形胞元、分形算子 (Yin et al. 2022b).

特别值得注意的是, 从有限到无穷这一看似“不合理”的反常操作, 使问题变得超常清晰. 正如幂级数所示

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots (|x| < 1) \tag{5}$$

有限项求和时, 项数越多计算越繁. 而无穷项求和若收敛, 则可得到简洁的封闭形式. 可谓物极必反, 量变引起质变. 正是这一理想化操作, 使得原本隐藏在纤维链中的分形结构透过“抽象化的透镜”, 被呈现了出来.

这些概念的引入, 使得原本复杂的多级结构力学分析变得相对简洁. 更重要的是, 它们揭示了分形与分数阶之间一条可能的内在联系通道. 这些探索构成了本文所述“分数阶生命体力学”的雏形. 值得一提的是, 分形维数的深刻性远不止于描述海岸线的曲折. 2025 年, 王虹与 Zahl 合作证明的三维挂谷猜想显示 (Wang & Zahl 2025a, 2025b): 一个集合在 Lebesgue 测度下可以任

意小, 其 Hausdorff 维数却必须等于空间维数. 体积可以忽略, 维度却不可压缩. 挂谷猜想中的集合与本文讨论的物理分形共享一个深层逻辑: 正如 Kakeya 集需要用 Hausdorff 维数而非普通测度来度量, 生命体中的多级结构也需要用分数阶算子而非整数阶方程来描述. 分形雪花让研究者看见了这种“语言不匹配”的现象, 而物理分形则为它找到了“新的语法”.

本文旨在回顾本研究组近 20 余年来的探索历程, 内容包括从生物多级结构中抽象出的分形雪花与物理分形空间以及分数阶生命体力学. 这一历程分为 2 条主线: 第一条主线是研究组从生物多级结构中抽象出分形雪花, 建立了分形结构的生长运动学, 回答了结构“怎样”生长的问题 (杨帆 2014); 第二条主线是研究组从生命体中抽象出物理分形空间与分形胞元, 建立了分数阶生命体力学, 回答了“为什么”会长成这样以及“分数阶从何而来”的问题 (Guo et al. 2019; Peng et al. 2021; Yin et al. 2022a, 2022b, 2025a, 2025b; 渐徵墨 2026). 2 条主线从运动学到动力学、从几何分形到物理分形层层递进, 最终汇合于对连续介质力学最基础概念“微元体”的深刻反思, 如 **图 2** 所示.

全文在结构上遵循“概念层→理论层→方法层”的三级递进逻辑. 第 2 章属于概念层, 从生物多级结构中抽象出分形雪花, 引入比例运动、比例运动变换群等概念, 将分形生长还原为“压缩–平移”基本运动的交替循环, 为后续动力学分析奠定运动学基础. 第 3 章进入理论层, 从生命体的物理结构中抽象出物理分形空间与分形胞元, 建立分形算子与分数阶力学的基本框架; 第 3.4 节进一步提出基于算子化思想的分数阶系统设计方法, 将理论落地为可操作的分析工具. 第 4 章则

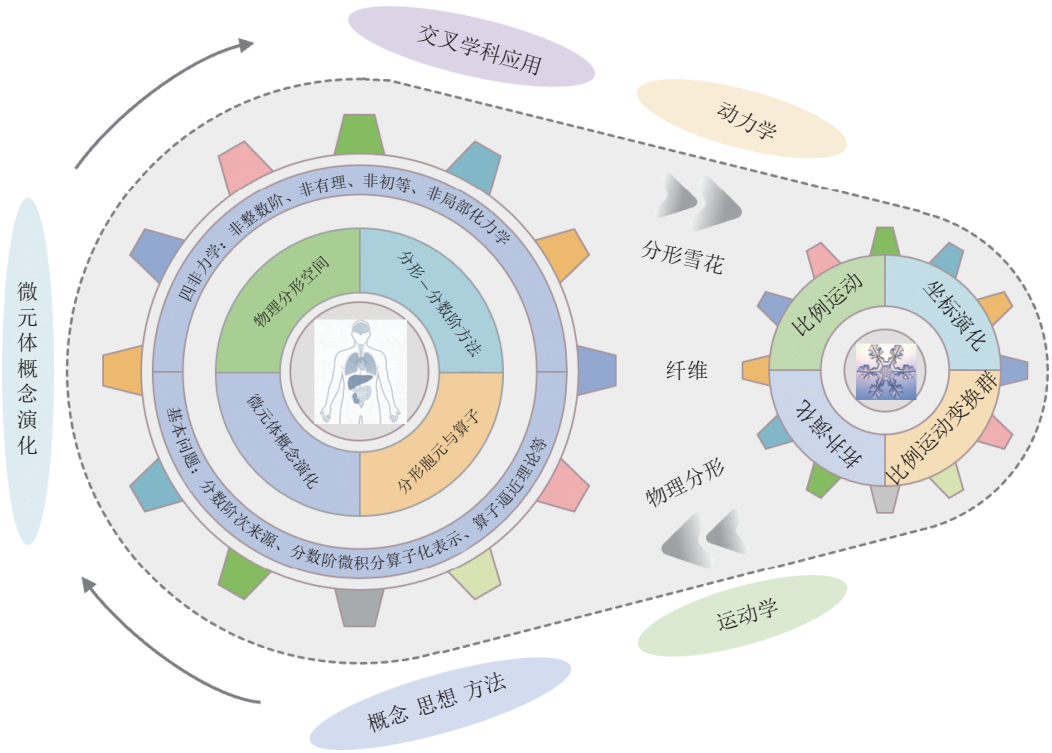


图 2

本文的结构安排

将分形胞元置于材料力学基本分析单元的历史演化脉络中, 阐明其对经典微元体概念的拓展意义. 第 5 章在交叉力学视域下, 探讨分数阶次的多重来源与分形–分数阶的时空关联性, 第 6 章给出总结与展望. 整条线索从“描述结构如何生长”到“解释响应为何呈现分数阶”, 再到“如何设计与计算”, 层层深入.

本文综述了研究组为力学学科贡献的一批新概念: 物理分形, 区别于几何分形, 是由物理元件组装而成的无穷级自全等拓扑结构; 分形胞元, 物理分形的最少重复单元, 具有开放性、非局部性与离散性; 分形算子, 刻画物理分形本构关系的核心数学对象, 表观上呈现为分数阶非有理算子; 以及算子化思想, 将系统的内蕴结构、记忆与非局部关联全部凝结于算子之中, 与外部激励解耦. 这些概念均有明确的力学实体作为对应, 无一凭空而来, 它们是从真实生物结构中层层抽象、反复提炼而得的. 在这些概念基础上, 进一步综述了研究组提出的一系列新思想: 从“分而治之”的分析思维转向“合而观之”的综合思维, 以“局部=整体”的无穷嵌套公理取代欧几里得“整体大于局部”的第五公理, 并揭示出物理分形空间中的力学具有“四非”特征: 非整数阶、非有理、非初等、非局部. 这意味着, 大自然的本征语言并非牛顿–莱布尼茨的整数阶微积分, 而是一种更贴近其自身结构的分数阶描述.

在新方法层面, 物理分形的建模遵循“4 次抽象 (3.2.1 节) →算子代数方程→数值逼近”的路径: 先从生物结构中抽象出无穷级自全等拓扑, 再利用分形胞元的“局部=整体”等价关系建立算子域中的不动点方程, 求解得到分形算子 (即分数阶非有理算子). 本文以肌腱纤维为例, 完整呈现了这一抽象过程的全部细节: 从纤维束到单条纤维链, 从有限层级到无穷层级, 从力学元件网络到分形胞元, 为链状纤维结构及其长时程黏弹性力学行为的精准建模提供了可推广的方法示范. 工程实现时, 采用深度截断将无穷级结构化为有限维整数阶系统, 并将其响应核展开为高效的 Prony 级数, 从而将时域计算复杂度由直接卷积的二次量级降至线性量级, 存储需求也大幅降低. 针对肌腱/韧带纤维、密质骨纤维、动脉血流、神经信号传导等典型场景, 研究组建立了分形胞元标准库 (渐徵墨 等 2026), 研究者可根据材料的多级特征选用相应模板, 通过实验数据拟合元件参数, 借助开源数值工具包即可在有限元分析中高效获得分数阶本构响应. 这些方法的具体细节和数值验证将在第 3.4 节和第 5.1 节中展开.

综上, 本文的章节安排既反映了认识深化的自然顺序, 也兼顾了从理论建构到工程落地的完整闭环, 力图为读者呈现一条从“几何分形”通往“物理分形”与“分数阶力学”的清晰路径.

2 从生物体中抽象出的分形雪花及其生长运动学

2.1 几何分形与维数

分形是一门描述自然界中不规则事物的规律性的学科, 其原意是“不规则的、分数的、支离破碎的”物体 (Mandelbrot 1967). 分形这一概念由 Mandelbrot 在其系列研究中逐步确立. 他在 *Science* 上那篇划时代的论文发表后, 进一步将分形的概念系统化. Mandelbrot 指出, 对于一个集合, 若其 Hausdorff 维数 D_{H} 严格大于其拓扑维数 D_{T}, 即 $D_{\mathrm{H}} > D_{\mathrm{T}}$, 则该集合可称为分形集. 随后, Mandelbrot 进一步提出了一个更为实用的定义: 组成部分以某种方式与整体相似的形体叫

分形. 需要注意的是, 这里的“某种方式”是指“自相似”, 与欧氏几何中的“相似性”是 2 个相关但又不同的概念.

为定量刻画分形, 需要引入维数的概念. 维数不仅仅是一个数, 它刻画了分形集合的“复杂度”或“填充空间的能力”. 但仅凭单一维数指标去刻画各类复杂形态, 仍远不足以揭示其全部特征. 例如, 3 次 Koch 曲线的相似维数是 1.2618, 但仅凭 1.2618 并不能知晓几何系统的复杂程度, 甚至都不能确定研究对象是线还是面. 因此, 这在一定程度上凸显了扩展分形维数的必要性. 根据研究对象和领域的不同, 产生了其他类型的维数定义. 相似维数 D_{S} 的提出是把经验维数扩大为非整数值的划时代进展. 设分形整体 S 是由 N 个非重叠的部分 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 组成, 如果每一个部分 S_i 经过放大 $1/r_i$ 倍后可与 S 全等 $(0<r_i<1,\ i=1,2,\cdots,N)$, 并且 $r_i=r$, 则相似维数为

$$D_{\mathrm{S}}=\frac{\ln N}{\ln\left(\dfrac{1}{r}\right)} \tag{6}$$

如果 r_i 不全等, 则定义

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^{D_{\mathrm{S}}}=1 \tag{7}$$

相似维数 D_{S} 只能应用在具有严格自相似的有规分形, 而定义包括随机图形在内的任意图形, 需要采用 Hausdorff 维数 D_{H}, 其数学表达式如下

$$D_{\mathrm{H}}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln N(\delta)}{\ln\left(\dfrac{1}{\delta}\right)} \tag{8}$$

式中, 的 $N(\delta)$ 表示 $\delta-$ 覆盖 $\{U_i\}$ 的个数, D_{H} 又可称为覆盖维数和量规维数. 简单来说, 相似维数 D_{S} 是 Hausdorff 维数 D_{H} 的一种特例, 专门用来处理整体与局部自相似的集合. 但 D_{S} 不能考虑几何边界比较粗糙, 处处连续但处处不可导的情况, 此时 D_{H} 的作用彰显出来. 类似地, 还可以定义适用于不同情况和场景下的各类维数, 如信息维数 D_i、关联维数 D_{g}、谱维数 D 等 (李后强和汪富泉 1992, 文志英和井竹君 1995, 张济忠 2011).

可以根据相似维数 D_{S} 的定义求得常见分形几何花样的维数, 如**图 3** 所示. 在计算过程中, 可以证实, 一些表面上很相似的维数定义, 它们具有的性质可能差别很大. 不应当假定不同的定义对同一集合能给出相同的维数值, 即使对十分“规则”的集也是如此. 建立一种“维数”的核心思想在于寻找反映研究对象特征属性的参数表达形式. 该特征可以是几何形貌, 同样也可以拓展至物理功能. 研究者总希望当分形的“维数”给定后, 该集合的某项特征信息也就随之确定了. 在分形研究中, 很难找到一个对任何事物都适用的分形维数的定义. 对于不同的测维对象, 某一种维数定义并不一定适用于所有测维对象. 因此, 对于不同的分形体系, 将分形维数的概念进行扩展显得尤为必要. 需要强调的是, 经典分形几何中的规则分形集: Cantor 集、Koch 曲线、Sierpinski 垫片等均满足上述维数定义. 这些几何分形虽具有分数维数, 但仍可在 Euclid 空间的框架下加以描述 (Fernández-Martínez et al. 2016). 当研究对象从静态几何图形拓展到具有物理功能的系统时, 是否会出现新的分形形态, 这构成了本文后续讨论的重要背景.

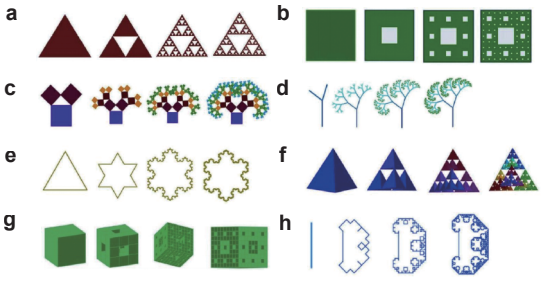


图 3

常见的分形几何花样 (周扬杰 等 2024). (a) 谢尔宾斯基三角形, (b) 谢尔宾斯基地毯, (c) 勾股树, (d) 迭代树, (e) 科赫雪花曲线, (f) 三维谢尔宾斯基三角形, (g) 谢尔宾斯基海绵, (h) 莱维 C 形曲线

2.2 生物多级结构及其生长

生物体的一个普遍特征是具有多级结构 (Fung 1993, 1996). 冯元桢先生曾提出“分层次、分级别、分尺度定义生物力学的基本概念”的观点 (冯元桢 1983). 这一思路对于理解生物体的复杂性具有指导意义, 但在具体实施中也会遇到新的问题 (冯西桥 2017, Stupp & Braun 1997, Chen et al. 2012, Rho et al. 1998, Vincent 2012, Wegst & Ashby 2004). 例如, 花椰菜与人类头发均由多级子结构组成, 若在不同层级上分别定义密度等物理量, 同一物体上将出现多个不同的数值, 仅密度一个物理量就具有如此复杂性, 生物多级结构的力学描述必将更加复杂.

以人类头发 (**图 4(a)**) 与羊毛纤维 (**图 4(b)**) 为例, 它们通常包含六至七级子结构. 其中, 第二级子结构 (原纤维) 的横截面可抽象为 3 分圆, 第三级子结构 (微纤维) 的横截面可抽象为 (9 + 2) 分圆. 两者可视为 2 种单重分形胞元, 经过混合排列可形成 (3,9 + 2) 与 (9 + 2,3) 2 种双重分形结构 (**图 4(c)** ~ **图 4(d)**) . (9 + 2) 分圆作为一种稀疏结构, 在毛发纤维中较为普遍, 这可能与其输运及保温功能有关. 该拓扑结构有 2 种互为同素异构体的形式, 对应着 2 种不同的对称性破缺模式 (Yin et al. 2009). 由于对称性破缺是自然界中普遍存在的客观实在, 对这类具有对称性破缺的分形花样的研究具有重要的科学意义.

文献中曾推导出规则双重分形集的分形维数公式 (Yin et al. 2010a). 对于 (3,9 + 2) 双重分形结构, 其分形维数约为 1.6379, 接近黄金数 1.618, 因此也被称为黄金分形. 有研究表明, 羊毛纤维的优化传热性能可能与其分形维数接近黄金数有关: 数学中黄金数通常与某种优化性质相关联, 这提示这类分形纤维力学性质的优化可能是一个值得深入研究的课题 (Fan & Liu 2013).

协调生长是生物体正常活动的重要保证 (Robert et al. 2023). 在协调生长过程中, 存在一个特殊的比例生长阶段. 以人类为例, 0 ~ 3 岁阶段即为等比例生长阶段, 头部尺寸与身高保持恒定比例. 这一阶段的生物多级结构究竟如何生长, 是一个看似简单却难以回答的问题. 为探讨这一问题, 可以将生物多级结构的生长与分形几何学以及力学中的运动学相结合, 这正是本章的核心.

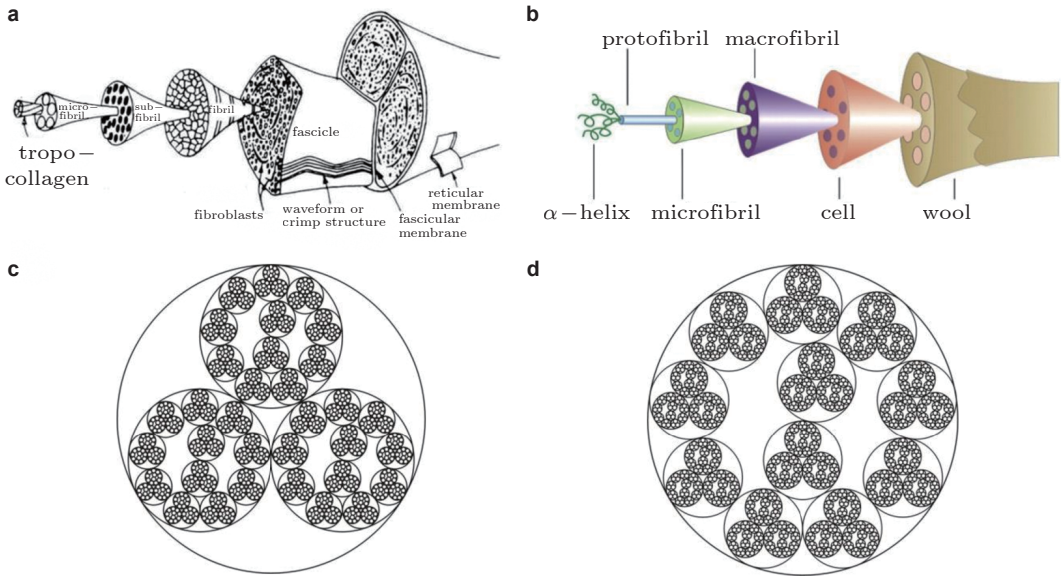


图 4

从生物多级结构中抽象出的分形结构 (Fan et al. 2008, He et al. 2009). (a) 人类头发纤维, (b) 羊毛纤维的多级结构, (c)(3,9 + 2) 双重分形结构, (d)(9 + 2,3) 双重分形结构

2.3 分形生长运动学

2.3.1 超级分形雪花的漂亮性质

从人类小肠绒毛 (**图 5(a)**) 中可抽象出 (6 + 1) 分圆与 (9 + 2) 分圆交替排列构成的超级分形雪花. 之所以冠以“超级”之名, 是因为与经典规则分形雪花 (**图 5(b)**) 相比, 它具有独特的“超级不变性质”: 超级均匀性、超级守恒性和超级连通性 (Yin et al. 2010b).

超级分形雪花 (**图 5(c)** ~ **图 5 (d)**) 的自相似比为 $r_{\mathrm{s}}=\dfrac{1}{3}$. 第 i 级结构的第 j 级子结构中的最短距离为

$$d_{(i,j)}=\frac{r_{\mathrm{s}}^{j-1}\left(1-3r_{\mathrm{s}}\right)+2r_{\mathrm{s}}^{i+1}}{1-r_{\mathrm{s}}}r_0=\frac{1}{3^i}r_0 \tag{9}$$

这一表达式看似简单, 却蕴含着令人惊叹的信息: $d_{(i,j)}$ 与上指标“j”无关, 意味着同一级结构内所有子结构之间的最短距离完全相等: 这就是超级均匀性. 同时, 宏观生长速度等于微观生长速度、宏观稠密度等于微观稠密度: 这就是超级守恒性. 当级数趋于无穷时, $\lim\limits_{i\to\infty}d_{(i,j)}=0$, 所有最短距离同时趋于零: 这就是超级连通性, 结构从微观到宏观同时连通.

弥散型超级分形雪花 (**图 5(d)**) 的奥妙之处, 远不止于其视觉上的精致. 与经典的 Koch 雪花不同: 后者只是在边界上不断添加锯齿, 而内部始终保持空旷; 弥散型超级分形雪花的每一级结构都在填充上一级留下的空隙, 是一种真正意义上的“内部生长”. 它的超均匀性意味着, 无论从哪一级、哪一个局部去观察, 结构都具有相同的致密程度; 它的极限连通性则意味着, 当级数趋于无穷时, 整个结构中任意相邻的 2 点都同时连成一片: 不是局部的接触, 而是全局的贯通. 这

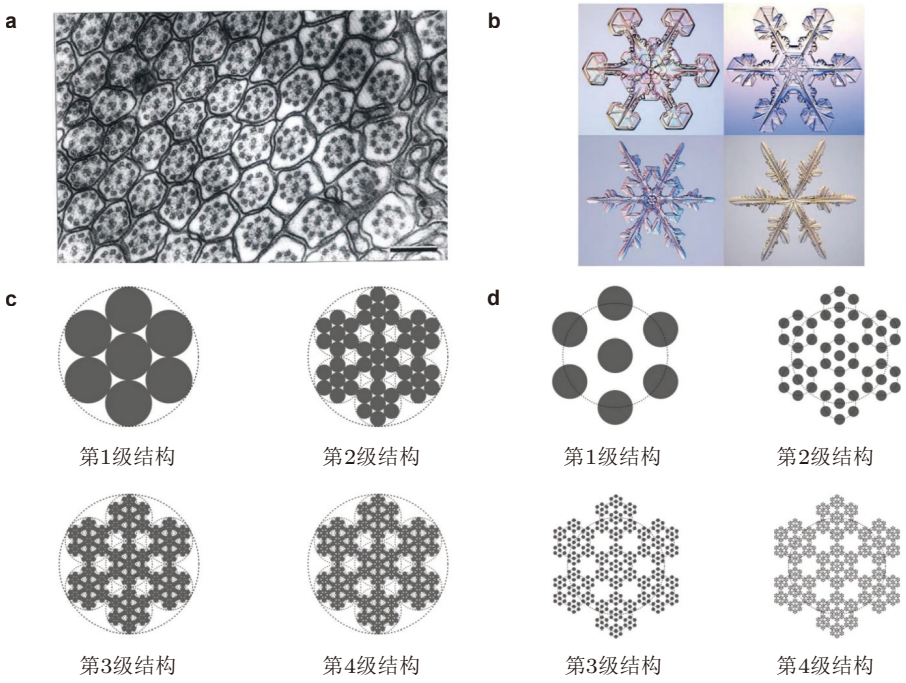


图 5

超级分形雪花 (Yin et al. 2010b). (a) 人类的小肠绒毛, (b) 千姿百态的雪花, (c) 密排型超级分形雪花, (d) 弥散型超级分形雪花

种将“均匀”与“连通”推向极致的性质, 在经典分形几何中几乎从未出现过. 更加令人惊叹的是, 实现这种性质的路径并非唯一. 弥散型超级分形雪花在生长过程中, 每一次压缩与平移的比例都固定为 1/3: 这个不变性如同一道无形的“规则”, 约束着结构的每一次演化. 改变初始构型、调整平移方式, 都可以生成不同的弥散型雪花, 但只要 1/3 这个比例不变, 最终呈现的雪花就共享同一种深层秩序. 换句话说, 生成方式可以有无数种, 但归宿却是同一个. 这种“殊途同归”的美妙现象, 在本质上是一种深刻的不变性: 它不是某个几何量的不变, 而是一种生成法则的不变, 一种结构逻辑的不变. 从经典分形的视角看, 这已经超越了分形几何的范畴, 进入了某种更为本质的层面: 结构如何通过规则的重复来逼近一个理想状态. 与 Koch 雪花的边界分形相比 (Lapidus & Pearse 2006), 弥散型超级分形雪花的内部连通真正揭示了分形的另一面: 它不再是表面上的锯齿与褶皱, 而是空间本身被一种隐秘的规则不断重构、不断精细化的过程. 正是在这个意义上, 分形雪花不仅是一个数学构造, 更是一种关于“生长”的哲学隐喻.

2.3.2 生长过程中的若干奇异现象

然而, 在深入研究分形雪花的过程中, 几类奇异现象逐渐浮现出来 (Yin et al. 2010b).

奇异现象一: 满足超级性质的分形雪花并非独一无二. 改变参数后, 仍然可以得到具有类似“同时趋于连通”性质的结构. 这说明超级性质并非某个特定结构的专利, 而是一类结构所共有的性质, 构成一个集合而非单元素集.

奇异现象二: 当参数变化超过某一范围后, 结构的生长可能在有限级数内终止. 在某些参数下分形雪花只生长到第四级, 相邻单元就发生了连通, 堵塞了继续生长的空间. 这一现象打破了“规则分形必然无限生长”的经典预期, 引出了“什么条件决定生长极限”这一根本问题.

奇异现象三: 在某些条件下, 结构的自相似性可能不再保持. 一旦打破某些限制条件, 局部与整体的相似性便不复存在. 这说明自相似性并非分形结构的固有属性, 而是需要在特定条件下才能维持的“脆弱”性质.

奇异现象四: 这类分形雪花的生成模式与经典分形几何中的“凿去”模式或“外生”模式不尽相同. 它既不完全属于“向里凿”的范畴, 也不完全属于“向外长”的范畴, 似乎暗示着经典分形几何的生成模式分类可能并不完备, 存在第三类生成模式等待被发现.

这四类奇异现象看似各不相干, 却指向同一个结论: 经典分形几何的描述框架在面对生长过程时存在边界. 有限生长、自相似丧失、生成模式无法归类: 这些都不是偶然的例外, 而是系统性的信号, 提示研究者需要一种新的语言来刻画分形结构的动态行为. 现象的“奇异”往往不是现象本身的缺陷, 而是既有概念框架的边界标志. 正是在这些边界处, 新的概念才得以萌芽. 上述现象的共同指向是: 分形的本质或许不在于它的最终形态, 而在于它是如何到达那里的. 从这种意义上说, 这些奇异现象并非对经典分形理论的否定, 而是对其的补充与拓展: 它们将注意力从“结构是什么”引向“结构如何成为”. 这一视角的转换, 正是后续比例运动理论得以建立的认知前提.

2.3.3　比例运动与比例运动变换群

精细地解剖分形雪花的生长运动过程, 可以从其纷繁复杂的表象中提炼出新概念. 以弥散型分形雪花 (**图 6(a)**) 为例, 其形成过程可分解为 2 种基本运动的交替循环 (Yang et al. 2015).

第一种是压缩运动: 将直径为 d_0 的胞元进行中心对称压缩, 压缩后的小圆盘直径为 $d_1 = (1/3)\,d_0$. 第二种是平移运动: 保持中心小圆盘不动, 原位复制后, 将复制品的圆心分别沿六等分的径向方向中心对称地平移至轮廓线上, 平移距离为 $D_1 = 2d_1$, 从而得到第 1 级结构的 (6 + 1) 花样. 然后按照同样的 1/3 固定比例生成 $d_2 = (1/3)\,d_1$ 、 $D_2 = (1/3)\,D_1$ 的第 2 级结构. 重复上述过程, 经无穷多次循环, 即得弥散型分形雪花.

上述 2 种基本运动具有如下特征: (a)“压缩运动/平移运动”交替出现, 形成循环; (b) 每次循

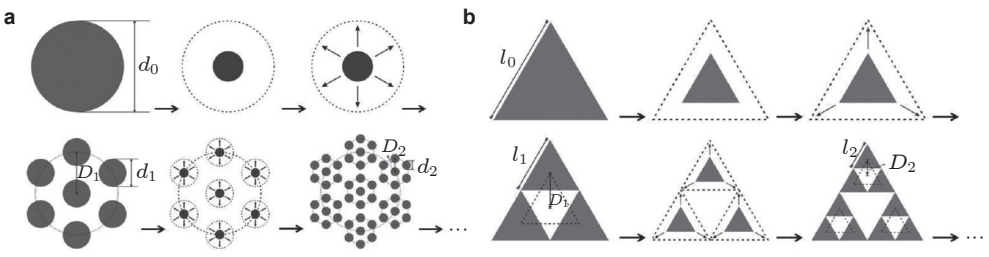


图 6

比例生长运动模式 (Yang et al. 2015). (a) 弥散型分形雪花的比例生长运动过程, (b) Sierpinski 垫片的比例生长运动过程

环生成分形雪花的某一级结构; (c) 压缩运动序列和平移运动序列各自成比例. 由此可以定义比例运动的概念: 在“压缩运动/平移运动”的循环中, 若压缩运动序列特征度量之比为定值 $r_{s(1)}$, 平移运动序列特征度量之比也为定值 $r_{s(2)}$, 则称为比例运动. 这 2 个比例运动变换群定义了一种具有普遍意义的比例运动模式. 这一概念不仅适用于分形雪花, 也适用于其他规则分形集, 如借助比例运动概念可以解释 Sierpinski 垫片的生成过程 (图 6(b)) . 比例生长运动学的任务, 就是研究多级结构在比例运动变换群下的不变性质.

比例运动的提炼, 其奥妙在于它揭示了一个看似矛盾的事实: 分形雪花令人眼花缭乱的复杂形态, 竟源于压缩与平移这 2 种再简单不过的基本运动. 正如音乐中的 7 个音符可以编织出无穷无尽的旋律, 2 种操作的交替循环, 竟能生成千姿百态的分形结构. 这种“极简规则生成极丰形态”的特征, 正是分形世界中最迷人的悖论之一. 更值得一提的是, $r_{s(1)}$ 与 $r_{s(2)}$ 这 2 个比例: 一个刻画缩小的速率, 一个刻画疏密的演化, 各自独立, 却协同决定了结构的最终面貌. 两者相等时, 结构自相似; 不等时, 自相似随之消失. 比例运动概念的普适性同样值得深思: 它不只属于分形雪花, 任何通过重复“压缩–平移”循环生成的多级结构都可以纳入这个框架. 分形雪花之所以特别, 不在于它本身的形态, 而在于它第一次让研究者清晰地“看见”了这种深层秩序的存在. 秩序是普遍的, 而看清秩序的眼睛, 却往往需要一朵恰到好处的雪花来唤醒.

2.3.4 自相似性的充分必要条件

不变性质之一是自相似性. 基于比例运动变换群, 可以回答一个关键问题: 怎样才能保证一个多级结构的自相似性?

为揭示问题的本质, 构造一个最简单的多级结构: 二分形线段 (图 7). 其生成过程如下: 将长度为 d_0 的初始线段中心对称压缩至 $d_1 = r_{s(1)}d_0$; 原位复制后分别向左、右平移 $D_1/2$ 得第 1 级结构; 再按比例运动模式生成 $d_2 = r_{s(1)}d_1$ 、 $D_2/2 = r_{s(2)}D_1/2$ 的第 2 级结构; 无限循环即得二分形线段.

若该二分形线段具有自相似性, 则需满足: (a) 表观特征长度之比为定值 $L_2/L_1 = L_3/L_2 = \cdots$ (图 8(a)); (b) 间隙特征长度之比也为定值 $l_2/l_1 = l_3/l_2 = \cdots$ (图 8(b)); (c) 这 2 个定值必须相等.

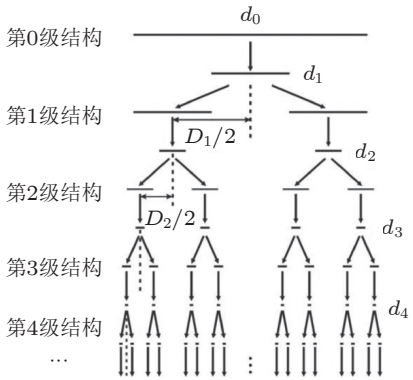


图 7

由比例运动生成的二分形线段

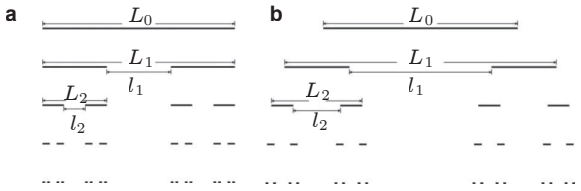


图 8

自相似的充分必要条件

由此可导出 $r_{s(1)}=r_{s(2)}$. 反之若该等式成立则结构必然具有自相似性. 由此得到核心命题: 由比例运动生成的多级结构具有自相似性, 当且仅当 2 个比例运动变换群相似, 即 $r_{s(1)}=r_{s(2)}$.

这一命题具有深远意义. 从力学角度看, 2 个比例运动之间可以毫无关联、完全独立; 从几何角度看, 要生成自相似结构, 2 个比例运动变换群必须是相似群. 由此还可得到一个推论: 任何规则分形集一般都存在 2 个相等的自相似比. 以经典三分 Cantor 集为例 (Pedersen & Phillips 2014), 长期以来人们认为它只有一个自相似比 $r_s=1/3$, 但从比例运动的观点来看, 它实际上包含 2 个相等的自相似比: “有 2 个相等的根”与“只有一个根”在数学上并不是一回事.

2.3.5 N 分形线段的拓扑演化

为确保研究结果的普适性, 可直接研究 N 分形线段的拓扑演化. 其生成过程为: 初始线段 d_0 压缩为 $d_1=r_{s(1)}d_0$, 复制 N 份后平移排列 (相邻中心距 D_1) 得第 1 级结构, 依此类推 (**图 9**).

设第 i 级结构第 j 级子结构之间的间隙为 $g_{(i,j)}$, 利用比例运动变换群可推导出其无量纲表达式

$$g_{(i,j)}=r_{\mathrm{d}}\frac{r_{s(2)}^{j-1}\left(1-Nr_{s(2)}\right)+(N-1)\,r_{s(2)}^{i}}{1-r_{s(2)}}-r_{s(1)}^{i}\qquad(1\leqslant j\leqslant i)\tag{10}$$

式中, N 为拓扑不变量, $r_{\mathrm{d}}=D_1/d_0$. 该表达式显示出拓扑演化的框架: 4 个参数 $r_{s(1)}$、$r_{s(2)}$、r_{d} 与 N 以及 2 个变量 i、j 共同控制着结构的演化. 若 $g_{(i,j)}=0$ 表示结构连通, $g_{(i,j)}<0$ 表示重叠, 据此可精确判断结构能否无限生长.

N 分形线段能够无限生长的条件为

$$r_{s(1)}\leqslant r_{s(2)}\leqslant\frac{1}{N},\quad r_{\mathrm{d}}=\frac{D_1}{d_0}\geqslant r_{s(1)}\tag{11}$$

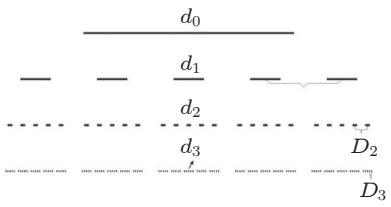


图 9

N 分形线段 (以五分形为例)

这些条件揭示了一个重要事实: 拓扑不变量 N 界定了无限生长的上界. 当 $r_{s(2)} < 1/N$ 时, 结构优先在小尺度上发生微观连通; 当 $r_{s(2)} > 1/N$ 时, 结构优先在大尺度上发生宏观连通. 拓扑不变量 N 不仅决定了结构"能否"无限生长, 还决定了结构"如何"生长.

当 $r_{s(1)} = r_{s(2)} = r_s$ 时, N 分形线段具有严格自相似性. 若 $r_s < 1/N$ 且 $r_d \geqslant r_s$, 结构可自由生长到无穷级, 即成为分形线段. 给定一个 r_s 值、变动 r_d 的值便得到一个分形线段家族, 取不同的 r_s 值则对应不同的家族.

特别地, 当 $r_s = 1/N$ 时得到"超级家族": 它具有实体长度守恒、同一级结构内间隙均匀分布、相邻两级结构间隙自相似 (比值 $1/N$)、极限连通等四重超级性质. 当 $r_d = 1/N$ 时, N 分形线段退化为连续线段, 间隙恒为零. 这一结果有力地诠释了一个令人深思的命题: 连续的 Euclid 空间在分形空间的谱系中处于一个特殊的极值位置, 看似最简单的连续空间恰恰是最特殊的分形空间 (Balka et al. 2015).

2.3.6 N 分形线段的坐标演化

分形结构的生长运动学不仅涉及间隙的演化, 也涉及实体部分的坐标演化. 在经典分形几何中, 关于分形集合中点的坐标及其演化规律的研究相对较少 (Rak & Rak 2023).

在经典"凿去"模式下, 分形结构不存在坐标演化: 被凿去的点永久消失, 保留下来的点静止不动. 而在比例运动模式下, 原始胞元上的点逐级传递至各级结构, 所有的点都被保留并遗传下去, 因此坐标演化具有明确的意义.

虽然生长路径 (如"顺序串联" (图 10(b)) 或"交替循环" (图 10(a))) 可以有多种选择, 但最

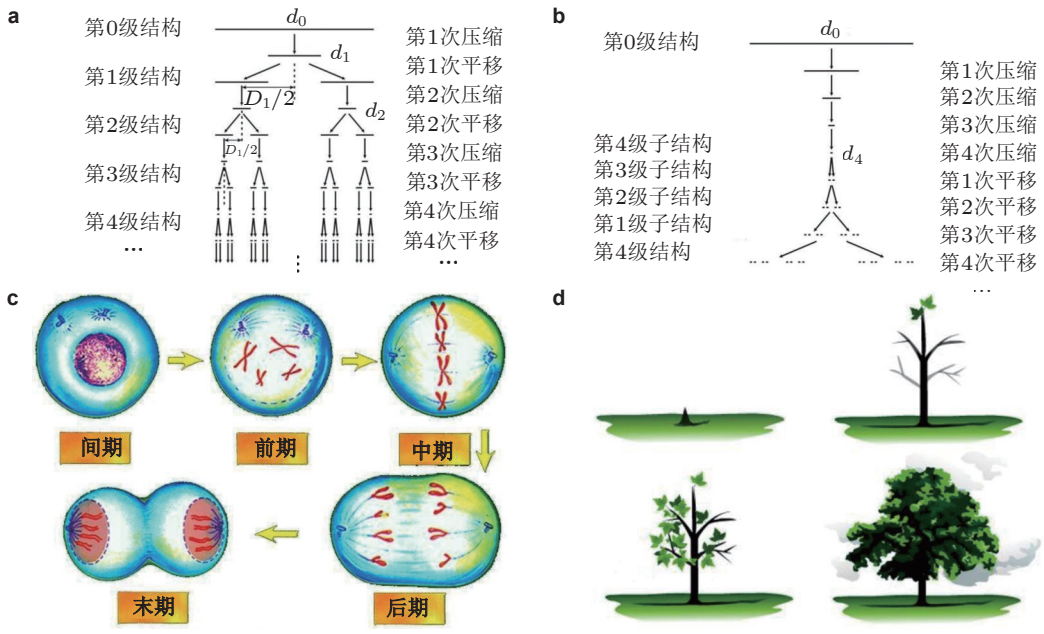


图 10

生长路径的多样性 (杨帆 2014). (a) 由交错循环路径生成的 Cantor 集, (b) 由顺序串联路径生成的 Cantor 集, (c) 细胞有丝分裂, (d) 树木的生长过程

终的坐标值与路径无关. 就物理意义来说, 2 种生长路径均对应真实的科学背景. 二者均与生物的生长过程极为相像. 细胞一分为二的分裂和复制过程 (**图 10(c)**) , 可归结为“交错循环”路径的特例; 而木本植物由单枝不断分叉形成多枝多级结构的过程 (**图 10(d)**) , 可以由“顺序串联”路径来诠释.

在“顺序串联”路径下, N 分形线段第 i 级结构中任意线段的坐标为

$$X_i = r_{\mathrm{s}(1)}^{i} X_0 + D_1 \sum_{k=1}^{i} \alpha_{\mathrm{k}} r_{\mathrm{s}(2)}^{k-1} \tag{12}$$

式中, α_{k} 为平移系数. 当 $N=2$、 $r_{\mathrm{s}(1)} = r_{\mathrm{s}(2)} = 1/3$ 且 $D_1 = 2d_0/3$ 时, 该式退化为经典三分 Cantor 集的坐标表达式

$$X_i = \frac{1}{3^1} X_0 + \frac{2}{3} d_0 \sum_{k=1}^{i} \frac{\alpha_{\mathrm{k}}}{3^{k-1}} \tag{13}$$

进一步可建立坐标与线段编码之间的对应关系: N 分形线段第 i 级结构中第 m 条线段的坐标为

$$X_i^{(m)} = r_{\mathrm{s}(1)}^{i} X_0 + \sum_{k=1}^{i} \left(j_k - \frac{N+1}{2} \right) r_{\mathrm{s}(2)}^{k-1} D_1 \tag{14}$$

式中, j_{k} 为逐级定位的编码参数. 这一编码–坐标对应关系为分形结构的精确定位提供了数学基础, 使得“在分形结构的某一级某一条线段上施加特定载荷”这类操作成为可能.

2.3.5 节和 2.3.6 节分别从 2 个互补的视角完成了对 N 分形线段的刻画: 前者侧重于间隙演化的分析, 后者侧重于坐标定位的刻画 (Yin et al. 2010b, Yang et al. 2015). 二者合在一起, 才构成对分形结构完整的运动学描述. 经典分形几何通常将分形视为静态的极限集合, 间隙与坐标在最终形态中被视为固定不变的; 而比例运动框架则揭示了这些量在生长过程中的动态演化规律. 间隙的表达式给出了结构能否无限生长以及在何级发生连通的条件, 坐标的表达式则给出了各级线段的空间位置及其与初始胞元之间的映射关系. 编码–坐标对应关系的建立进一步表明, 每一级结构中的每一条线段都具有明确的可追溯性, 可从初始胞元上的对应位置逐级定位. 这种信息的完整传递是比例运动模式的一个重要特征: 所有点在不同级结构之间保持可追踪的对应关系, 而非在逐级操作中遗失. N 分形线段的分析表明: 分形结构的生长可以在运动学框架下进行逐级演算与预测, 间隙与坐标的协同演化构成了从初始胞元到极限集合的完整路径.

分形雪花的生长运动学研究表明: 分形结构的拓扑演化并非不可捉摸, 而是受制于清晰的比例运动变换规律. 拓扑不变量 N 影响着结构的无限生长能力及其生长方式, 2 个比例运动变换群是否相似则决定了结构的自相似性. 这些运动学规律为理解分形结构“怎样”生长提供了一条清晰的线索. 至于“为什么”会呈现这样的生长行为, 则需要进一步从动力学的角度加以探讨.

2.4 小　结

回望分形雪花的研究, 它所揭示的规律在今天看来似乎清晰明了, 但在当时却迈出了极为关键的一步. 分形雪花研究的核心贡献, 在于它将“生长”这个看似模糊的概念转化为受清晰数学规

律支配的运动学框架. 在这一框架下, 比例运动变换群提供了刻画多级结构生成的精确语言, 拓扑不变量 N 揭示了结构演化的深层约束, 而自相似性的充分必要条件则澄清了一个长期被默认却从未被证明的直觉: 局部的重复如何构成整体的相似. 这些发现的价值不仅在于它们本身的美感与简洁性, 更在于它们为后续探索提供了一套可操作的概念工具. 当研究者将一个复杂的分形结构分解为压缩与平移 2 种基本运动的交替循环时, 实际上获得了一种“语言”, 一种可以精确描述结构“怎样”生长的语言.

然而, 真正的转折点恰恰在于: 运动学虽然能够精确描述“怎样”, 却无法回答“为什么”. 为什么拓扑不变量 N 决定了无限生长的上界? 为什么 2 个比例运动变换群的相似性决定了自相似性? 为什么这些看似纯粹的几何规律背后, 隐藏着如此丰富的物理内涵? 这些问题在运动学的框架内无法得到根本性的回答, 但它们的提出本身就意味着认识的深化: 从“描述现象”迈向了“追问本质”.

分形雪花研究最大的贡献, 或许正在于此: 它让一个原本只能被欣赏的数学奇观, 变成了一个可以被追问、被分析、被理解的力学问题. 它架起了一座桥梁: 一端是几何分形的静态之美, 另一端是生命体动力学的动态之秘. 站在分形雪花的基础上, 接下来的问题已经呼之欲出: 如果分形结构的“生长”可以用运动学精确描述, 那么生命体多级结构的“响应”, 它的力学行为, 是否也能用类似的语言来刻画? 这个追问将把研究者引向一个更为深刻的层面: 动力学. 在那里, 分形与分数阶的关联将第一次真正显露出来. 从运动学到动力学, 从几何分形到物理分形, 看似跨越了不同的研究对象, 但若以更长的学科视角来看, 先研究运动、再研究动力, 恰恰是认知深化的自然顺序. 正如伽利略通过斜面运动为牛顿力学铺平了道路, 运动学的研究总是动力学的先修课. 分形雪花是这条探索之路的起点, 而起点往往决定了整条路径的方向.

3 从生命体中抽象出的分数阶算子理论及其应用

3.1 分数阶微积分及其算子化表示

3.1.1 分数阶微积分的历史溯源

经典教科书中的微积分运算, 通常是指整数阶微分与积分 (吴强和黄建华 2016). 而分数阶微积分, 顾名思义, 就是将通常意义下的整数阶微积分运算由整数阶推广至分数阶微分与积分, 可视为经典整数阶微积分理论的拓展. 需要指出的是, 此处的“分数阶”不仅涵盖有理分数, 也包括阶次为无理数与复数的情形. 相较于分形, 分数阶微积分的历史要早得多: 与 Newton-Leibniz 微积分几乎同期.

分数阶微积分萌芽阶段, 因缺乏物理学与力学等相关学科支撑, 长期被视为数学领域的纯理论从而被数学家们研究 (Diethelm et al. 2022). 换言之, 研究者们主要从经典微积分出发, 进行公式化概念研究. 直至 1823 年, Abel 运用分数阶算子解决了等时降落问题, 不仅验证了摆线的等时性, 更开创了积分方程理论的先河, 也标志着分数阶微积分理论开始走向具体应用 (Podlubny et al. 2017). Abel 积分方程的数学表达式如下

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\phi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{t-\tau}} \tag{15}$$

Abel 通过能量守恒定律, 将下滑时间表达为一个与曲线几何特性相关的积分表达式, 并引入未知函数来描述曲线的弧长变化. 在求解式 (15) 时, Abel 发现这一积分形式与“分数阶积分”密切相关. 这种运算介于传统积分与微分之间, 类似于“半次积分”. 通过逆向操作, 从积分结果中推导出未知函数的具体形式, 最终证明了对应的曲线正是摆线, 从而以更普适的数学方法重新验证了惠更斯的结论. 这一工作不仅解决了物理问题, 更开创了积分方程理论的原型, 启发了后世对分数阶微积分的系统研究, 并成为量子力学、泛函分析等领域的重要工具 (Machado & Kiryakova 2017).

分数阶微积分的研究热潮是在 20 世纪 70 年代, 主要原因是分形概念的兴起. 研究表明, 分数阶微积分能有效刻画分形几何与幂律现象 (Werner 2010). 作为分形几何与分形动力学的数学根基, 分数阶算子理论尤其是分数阶微分与积分方程的研究取得了长足进展, 但很少有与工程相关的工作或学科能从具体实例出发, 讨论分形与分数阶微积分的关联性, 尤其是在固体力学方面的应用 (朱克勤 2009a, 2009b, 2010; Zhou et al. 2015). 随着各学科的不断发展, 分数阶微积分理论与方法已被广泛地应用到自然科学的各个领域 (薛定宇和赵春娜 2007, 黄果 等 2012, 徐明瑜和谭文长 2006, 王振滨和曹广益 2004, 白占兵 2017). 例如, 岩石力学 (**图 11(a)**) 、自动控制 (**图 11(b)** ~ **图 11(c)**) 、计算机、信号处理 (**图 11(d)**) 、材料学 (Zhou et al. 2017)、反常扩散 (Chechkin et al. 2005, Obembe et al. 2017)、生物医学 (Caputo & Cametti 2016, Tenreiro Machado et al. 2011)、非达西渗流 (Wei et al. 2020, Garra & Salusti 2013)、电路设计 (蒲亦非 等 2005, 刘崇新 2007)、航空航天 (邓立为和宋申民 2013, 时中 等 2016) 等等. 可以预见, 分数阶微积分的应用前景广阔且充满活力, 其独特的非局部性与记忆效应特性为复杂系统建模提供了革命性工具 (Tenreiro Machado 2011, Mainardi 2010).

3.1.2 运算微积理论的贡献与局限性

注意到, 分数阶积分和微分的定义众多, 导致其长期发展过程中并未形成统一的研究范式. 最为常见的做法, 是针对每一种分数阶刻画的常微分或偏微分方程进行逐一研究, 但上述系统并不完善. 一种更自然的处理方法是采用运算微积法 (Bengochea 2014).

Heaviside (1893) 在研究电路与电磁理论时, 提出了用符号 p 代替微分算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的想法, 并且可以对该符号进行加、减、乘、除等各种代数化操作标志着运算微积理论的诞生. 在处理热传导方程 (也称电报方程) 时, 他形式地写出了方程的解. 电报方程为

$$\left(p-a^2D_x^2\right)u(x,t)=0,\quad 0\leqslant x<+\infty,\quad u(0,t)=u_0,\quad u(\infty,t)=0 \tag{16}$$

其中

$$p=\frac{\partial}{\partial t},\quad D_x^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{17}$$

借助算符 p, Heaviside 极其大胆地写出了方程的解

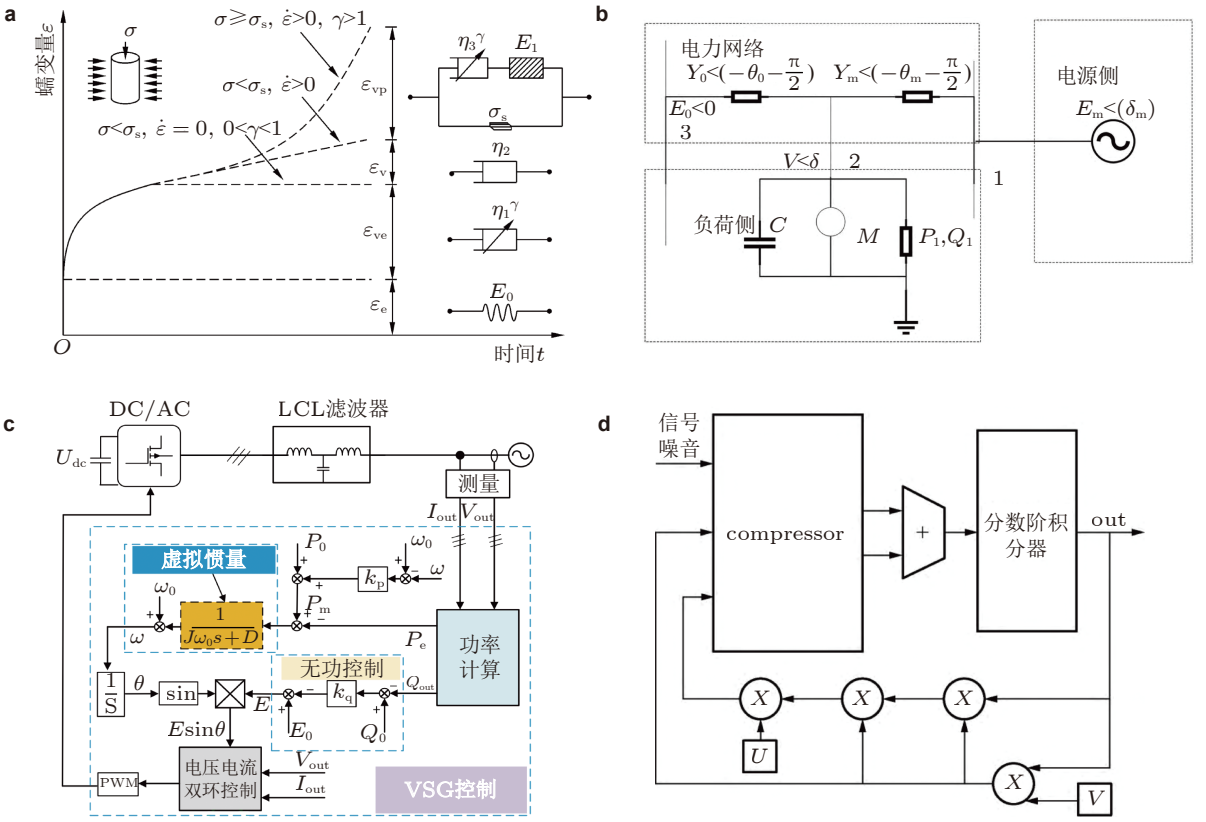


图 11

分数阶微积分的应用. (a) 岩石分数阶黏弹塑性损伤蠕变模型研究 (虎积元 等 2024), (b) 电力系统混沌振荡的分数阶自适应滑模控制 (孙政章 2024), (c) 基于 RBF 神经网络的分数阶虚拟同步机控制策略 (张赟宁 等 2025), (d) 分数阶双稳系统随机共振现象研究及 FPGA 实现 (竺佐 等 2022)

$$u(x,t) = u_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} \tag{18}$$

这一做法在当时引起了巨大争议. 不少学者对此持怀疑态度, 他们普遍认为 $\sqrt{p}$ 已经够怪异了, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}$ 更是个无法理解的“怪物”. 但 Heaviside 坚持认为该式满足方程和边值条件, 因此它必然是方程的解. 然而, 如果 $\sqrt{p}$ 是 1/2 阶导数, 那 $\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}$ 又是什么? 面对这一尖锐质疑, Heaviside 当时未能给出解释.

尽管整个过程饱受数学家们的争议, Courant 和 Hilbert 仍在他们的著作 (柯朗和希尔伯特 2012) 中给出了如下评价: “这个方法处理问题直捷惊人, 往往能给出不能以其他方法同样简单地获得的明确解答”. 不仅如此, Hilbert 对 Heaviside 的工作给出了出人意料的评价: 他断言“Heaviside 运算微积是近百年来最伟大的数学发现之一”. Hilbert 发挥了他一贯独到的研究风格: 重新塑造问题的提法. 他将问题重新表述为

$$u(x,t) = T(x,p)u(0,t) = T(x,p)f(t) \tag{19}$$

其中, $T(x,p)$ 满足算子微分方程

$$\left(p - a^2 D_x^2\right) T(x,p) = 0 \tag{20}$$

其中, $T(0,p)=1$, $T(\infty,p)=0$, 其形式解为

$$T(x,p)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} \tag{21}$$

Hilbert 这一重构深刻而优雅, 他实际上推广了分离变量法, 将 2 变量函数 $u(x,t)$ 分解为算子 $T(x,p)$ 与 1 变量函数 $f(t)$ 的“乘积”. 然而, 如何理解这类包含 $\sqrt{p}$ 的算子的具体含义, 在当时仍是一个悬而未决的问题. Courant 和 Hilbert 虽然承认该方法“处理问题直接惊人”, 却也不得不承认“无法解释 $\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}f(t)$ 等一系列非有理算子的含义”, 未形成根本性突破 (Haar 1910, Bromwich 1916, Carson 1922, Cooper 1952). 无法解释的原因很简单: 非有理性. 历史上 $\sqrt{2}$ 的出现标志着无理数的诞生, 从有理数到无理数是人类认识的伟大飞跃. 类比而言, 从整数阶算子到分数阶算子, 是从有理算子到非有理算子的大飞跃, 是从局部到非局部的大飞跃. 因此, Courant 和 Hilbert 庄严地判断: 鉴于 Heaviside 运算微积如此强大且有效, 人们必须搞清楚其中的道理!

直至 1959 年, 波兰数学家 Mikusiński (1983) 也承认 Heaviside 运算微积的局限性, 并为运算微积赋予了一整套全新的规则: 引入了一种新的算子作用方式, 即算子的作用结果由对应核函数的卷积积分表示. 上述操作一定程度上将运算微积奠定在代数理论的基础上, 极大地推动了该学科的发展 (Berg 2013, Glaeske et al. 2006). 尽管 Mikusiński 敏锐地认识到需要为运算微积建立代数运算规则, 并试图通过重新定义算子来解决这一问题. 然而, Mikusiński 的处理方式 (尤其在算子的定义) 上存在若干含混之处. 其一, 混淆了算子和函数. 他注意到关系式 (19), 并引入命题: 2 个函数之比 $u(x,t)/f(t)$, 如果不是一个函数, 那就是一个算子. Mikusiński 想用一个否命题定义什么是算子, 但并不令人满意, 因为否命题只说明了算子不是什么, 没有说明算子到底是什么. 其二, 用含混的方式重新定义了 Heaviside 算符 p. Mikusiński 注意到了一个被人们忽视的细节: Heaviside 微分算符 p 与积分算符 $1/p$ 的乘法运算不可交换, 即 $p\dfrac{1}{p}(\cdot)\neq\dfrac{1}{p}p(\cdot)$. 他认为, 要想让算子乘法满足交换律, 必须重塑 Heaviside 算符 p

$$pu\triangleq u'+u(0) \tag{22}$$

式中, Mikusiński 试图通过引入初值项来使算子乘法满足交换律, 但其符号系统存在含混之处. 然而, 令人困惑的是, 为解说式 (22) 中的符号, Mikusiński 又引入了更加含混的符号 $\{\cdot\}$. 他特意注明: $u=\{u(t)\}$, $u'=\{\mathrm{d}u(t)/\mathrm{d}t\}$, 并规定: 带 $\{\cdot\}$ 的对象为函数, 遵循卷积乘法; 不带 $\{\cdot\}$ 的对象为常数, 遵循代数乘法. 如此令人费解的操作引起许多混乱和误解, 这极大地限制了 Mikusiński 理论的应用. 很显然, 精准地定义算子, 牢固地建立分形/分数阶非有理算子理论具有不可替代的重要性和必要性.

3.1.3 修正 Heaviside 微分符号与 Laplace 变换群下的形式不变性公设

基于 3.1.2 节的分析, 本研究组引入颇具颠覆性的操作 (Yin et al. 2025b), 修正 Heaviside 微分符号 p, 将其重新定义为

$$pf(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+f(0^+)\delta(t) \tag{23}$$

式中, $\delta(t)$ 是 Dirac 函数, 是非常重要的广义函数. 式 (23) 表明, 仅当初值 $f(0)=0$ 时, 修正的

Heaviside 微分符号 p 才退化到 Heaviside 的原始形式, 即 $p=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 需要说明的是, 式 (22) 是 Mikusiński 著作中最原始的表达形式, 容易让读者产生困惑. 实际上, 式 (22) 与本文式 (23) 具有等价性. 二者在运算上并无差异, 但在符号表达上, 式 (22) 未明确引入 Dirac 函数, 而式 (23) 通过 $\delta(t)$ 项将初值的影响显式地纳入算子定义之中. Mikusiński 年代广义函数论尚未广泛推广, 故其符号表述略显模糊: 运算上没错, 符号上不够清晰.

特别要强调的是, $p=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是局部性的概念, 只能刻画一个点的邻域内的性质. 而函数 $f(t)$ 及其各阶导函数 $f^{(m)}(t)$ 的初值, 对修正微分符号 p 有重大影响 (Luo et al. 2024). 这种影响, 正是时间非局部性的表现形式. 这里的时间非局部性, 是指过去发生的事件对当前有影响. 积分算子 l 定义为

$$lf(t)=p^{-1}f(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

由式 (23) 和式 (24) 定义的基本微分算子 p 和积分算子 l 互为逆算子, 且这 2 个基本算子的组合的作用结果与作用次序无关. 在 Mikusiński 算子域中, 有式 (25) 成立, 这是算子代数理论的重要基础

$$p\cdot l=p\cdot p^{-1}=p^{-1}\cdot p=l\cdot p=1 \tag{25}$$

基于式 (25), 本文讨论的微分算子和积分算子均可视为式 (23) 所定义的基本微分算子 p 的函数, 即算子型函数 $T(p)$.

分数阶微积分的算子化表示是连接分数阶理论与工程应用的核心纽带, 更是本文后续分形算子相关研究的重要理论基石. 其中, Laplace 变换群下的形式不变性公设 (Yin et al. 2025b), 基于 Felix Klein“变换群下的不变性 (Klein 1893)”思想 (埃尔朗根纲领) 归纳确立, 为各类算子统一理论体系构建提供根本依据, 在算子理论与力学交叉领域具有不可替代的地位. 该公设是整数阶算子不变性特征的推广, 核心如下:

公设 Laplace 变换群下, 算子域上的函数型算子 $T(p)$ 与 Laplace 域上的像函数 $T(s)$, 在表观形式上具有完全的一致性

$$\mathscr{L}\left[T(p)f(t)\right]\triangleq T(s)\hat{f}(s) \tag{26}$$

式中, 符号“$\triangleq$”表示: 式 (26) 中不仅左右两端相等, 而且左端通过右端定义. 其核心突破在于无需区分算子阶次与类型, 只需将参数算符 p 替换为复变量 s 即可得到像函数, 兼具形式对称性与逻辑简洁性. 而算子的核函数作为算子本质的直观体现, 其定义可由该公设直接演绎. 如果形式上将式 (26) 的原函数 $f(t)$ 取为 Dirac 函数 $\delta(t)$, 则有

$$\mathscr{L}\left[T(p)\delta(t)\right]=T(s) \tag{27}$$

该式是公设 (26) 的推论. 式 (27) 对所有算子都成立, 对其做 Laplace 逆变换, 有

$$T(p)\delta(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[T(s)\right]\triangleq K(t) \tag{28}$$

$\mathscr{L}^{-1}(\cdot)$ 表示 Laplace 逆变换. $K(t)$ 称为算子 $T(p)$ 的核函数 (或卷积核函数). 式 (28) 可以视为算子 $T(p)$ 的核函数 $K(t)$ 的定义式, 该定义式对所有算子都成立. 式 (27) 和式 (28) 表明, 算子

$T(p)$ 与其核函数 $K(t)$ 之间存在一一对应关系.

核函数的卷积定理　亦依托公设 (26) 得以严谨推导, 成为算子运算的核心支撑, 具体如下

$$T(p)f(t) = K(t) * f(t) = \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{29}$$

式 (29) 清晰地显示出了算子 $T(p)$ 的本质: 算子 $T(p)$ 作用于函数 $f(t)$, 可以视为二者的乘积, 这个乘积就是核函数 $K(t)$ 与函数 $f(t)$ 的卷积. 式 (29) 对所有算子都成立. 需要强调的是, 式 (29) 曾作为算子 $T(p)$ 的定义出现在 Mikusiński 的论著 Operational Calculus 中, 也被视为算子理论的逻辑基础. 但在本文中, 式 (29) 是由公设 (26) 导出的一个定理. 有关“Laplace 变换群下的形式不变性公设”的详细推导和证明过程参见文献 (Yin et al. 2025b).

注意到, Dirac 函数 $\delta(t)$ 或广义函数, 被置于了理论基础的地位. 特别要说明的是, Courant 和 Hilbert 的著作也曾尝试过公理化思想. Courant 和 Hilbert 为解决算子的可计算性, 引入了 Duhamel 积分原理, 这正是公理化思想的体现. 同时, 他们采用了 Heaviside 阶跃函数 $H(t)$, 从而完美地避开了 Dirac 函数 $\delta(t)$. 他们这么做, 是因为当时广义函数论尚未成熟, $\delta(t)$ 尚未得到广泛应用. 现在, Hilbert 难以解释的, 可以解释清楚了. Heaviside 和 Mikusiński 的含混模糊之处, 全部理清楚了. 算子 (包括分形/分数阶非有理算子) 的可计算性, 彻底解决了. 研究内容清晰地展现了 Noether 思想的力量: 任何对称性, 都对应了某种形式的守恒律. 公设规定了算子的对称性 (形式不变性), 随后, 即可演绎出算子一系列新的不变性质.

作为算子理论的重要突破, 该公设的重要性体现在其奠定了算子理论统一逻辑基础, 澄清了算子本质内涵. 而引入公设的必要性, 源于前期研究的理论瓶颈: 此前算子运算无统一标准、初值约束苛刻, 定义模糊且逻辑繁琐, 算子级数收敛性缺乏依据, 公设 (26) 则填补了这一空白, 为各类算子提供统一标准. 该公设具有极强通用性与拓展性, 可适配各类型算子, 用于算子级数收敛性分析、微分方程求解等问题, 并支持相关交叉领域的研究. 从学科发展角度来看, 该公设突破传统研究模式, 将 Laplace 变换纳入算子概念核心, 完善了算子定义的逻辑闭环, 搭建起积分变换与力学的桥梁, 推动了力学与算子理论的协同发展.

3.2　从生命体中抽象出的物理分形空间与分形胞元

有了算子化表示这一工具, 便可以回到那个根本问题: 分形与分数阶之间究竟存在怎样的关联? 答案来自生命体 (Guo et al. 2019; Peng et al. 2021; Yin et al. 2022a, 2022b, 2025a, 2025b; 渐徵墨 2026).

近年来, 本研究组从肌腱/韧带纤维 (Guo et al. 2019)、神经纤维 (Guo et al. 2020)、密质骨纤维 (Jian et al. 2023a, 2023b) 中抽象出了具有多级拓扑的链状结构, 从动脉血流中抽象出了流/固耦合多级微弹性腔结构 (Peng et al. 2021), 在物理分形空间上建立了以力学元件为基本组元的分数阶生物力学, 如**图 12** 所示. 对于光滑神经纤维, 研究组从神经索模型的功能结构出发, 抽象出具有非对称阶梯拓扑的离散电阻−电容分形电路, 如**图 12(a)** 所示. 神经纤维的胞元, 是指其等效分形电路的最小重复单元, 这里的“胞元”是黏弹性胞元概念向神经元对应的功能电路的推广. 将胞元化思想进一步拓展至神经冲动动力学, 实现了神经纤维的功能结构分形化. 对于血流

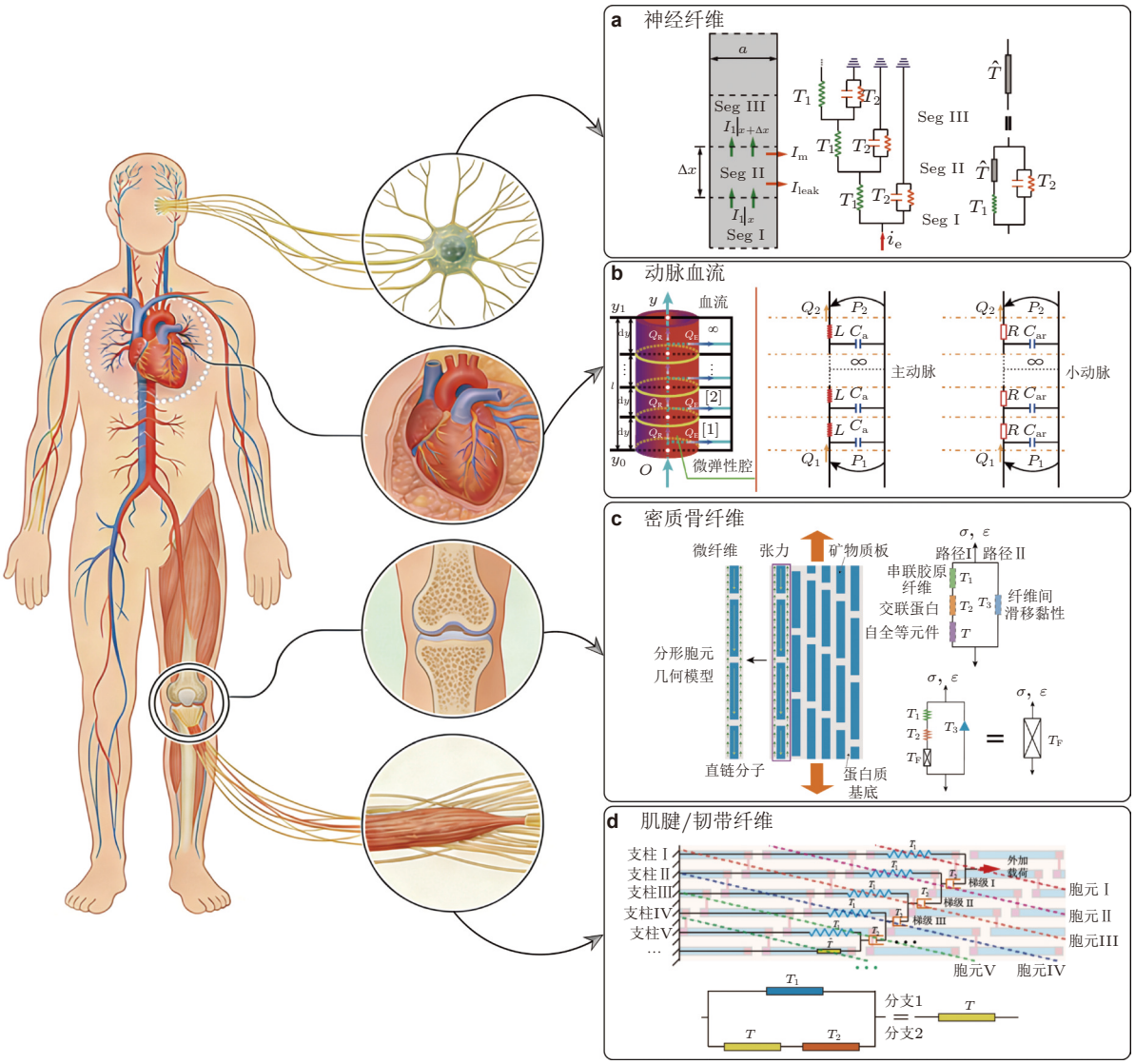


图 12

物理分形空间上的分数阶生物力学 (Guo et al. 2019, Peng et al. 2021, Jian et al. 2026a). (a) 基于光滑神经纤维抽象的阶梯型胞元, (b) 基于主动脉和小动脉血管段抽象的无穷级微弹性腔物理结构模型和对应的比拟电路, (c) 基于密质骨纤维抽象的阶梯型胞元, (d) 基于肌腱/韧带原纤维抽象的阶梯型胞元

动力学, 借助微分化分析思想, 将单段弹性腔微分化为无穷级微弹性腔的组合, 从主动脉和小动脉的无穷级微弹性腔物理结构模型中抽象出自全等物理分形电路, 如图 12(b) 所示. 上述操作建立了无穷级微弹性腔结构与分数阶血流动力学响应之间的联系, 为体外模拟血流动力学材料的仿生设计提供结构上的理论启示. 对于密质骨纤维, 研究组根据其微纳米复合结构, 自下而上地抽象出了链状微纤维的分形胞元, 建立了胞元的分数阶本构, 如图 12(c) 所示. 物理分形空间中骨分形算子为刻画生物材料的力学行为提供了新的方式. 对于肌腱/韧带纤维, 从其自相似物理

结构出发, 抽象出了两类具有阶梯拓扑的弹簧–黏壶网络, 建立了分形胞元的黏弹性本构, 如**图 12**(d) 所示. 该模型不仅能精确描述膝关节及脊柱肌腱/韧带的黏弹性松弛响应, 更建立了黏壶弹簧自相似结构 (阶梯分形结构) 与其分数阶黏弹性响应的内在关联性. 本节以肌腱 (**图 12**(d)) 为例, 展示物理分形与分形胞元的抽象过程.

3.2.1 四次抽象: 从生物纤维到物理分形

本研究组前期注意到, 肌腱的横截面具有分形特征 (Guo et al. 2019). 受材料力学梁/杆结构力学的启发, 聚焦于肌腱横截面上的应力分析, 企图以横截面上的分形几何为载体, 揭示分形维数与分数阶次之间的关联. 上述操作未能成功, 理由是力和变形沿着肌腱纵向传递, 故真正重要的不是横向信息, 而是纵向信息. 于是, 立即改变方向, 尝试分析力和变形沿肌腱纵向的传递. 问题是如何分析? 肌腱是“束状”多级相似结构—从宏观到微观, 一般包含 5 ~ 7 级结构. 如果“个性化地”逐级分析, 力学模型将无与伦比得复杂. 因此, 放弃“穷举式、个性化”的逐级分析策略, “反其道而行之”, 最大限度地寻求各级结构之间的共性. 这个转折是决定性的, 因为后续进程颇具抽象性和颠覆性.

本节以肌腱为例展开讨论, 整个抽象过程可分为 4 个递进层次 (Yin et al. 2022a, 2022b, 2025a, 2025b).

第一次抽象: 采用“思想试验”. 从任意级中取出任意纤维束, 将纤维束沿纵截面剖开后再展开 (微分几何中, 柱面是可展曲面), 立即看到“拓扑共性”: 周期状的、近乎平行的纤维链嵌入在组织凝胶中, 生成了“纤维链/凝胶”复合材料 (**图 13**). 纤维链具有弹性, 组织凝胶具有黏性, 二者组装起来, 就是纤维增强的黏弹性复合材料. 至此, 完成了物理力学模型的第一次抽象. 但如果就在这个物理力学模型上建立数学模型, 那就回到了经典力学常规分析之路. 更令人不满意的是, 从中没看到心心念念的分形.

第二次抽象: 打破常规, 单独把其中的一条纤维链隔离出来研究 (**图 13**). 纤维链中的“弹性棒”被抽象为弹簧 k. 弹簧 k 在力作用下运动时, 受到黏性基底 (组织凝胶) 的黏滞阻力 (黏度系数 μ). 真实的纤维链是有限的, 而有限纤维链的科学价值也是有限的: 因为每条链都是个性化的, 从个性化的链中很难得到普遍性的规律. 因此, 我们发挥想象力, 激发思维跃迁, 强力实现从“有限链到无限 ∞ 链”的飞跃. 于是, 第二次抽象的物理力学模型, 就是无穷级黏弹性纤维链 (**图 13**). 特别要说明的是, 无穷 ∞ 是一个纯粹理性化的数学概念. 不论是自然界还是工程界, 无穷 ∞ 都是不存在的. 然而, 正是这个想象的“ ∞ 级链结构”, 引出了新的力学概念和新的力学研究对象, 开辟了力学的新道路. 一般多级结构, 级数越多, 力学模型越复杂. 直觉告诉我们, 结构级数无穷多, 力学模型必然无限复杂. 因此, 很少研究者将研究对象向极端无穷 ∞ 方向抽象. 然而直觉错了.

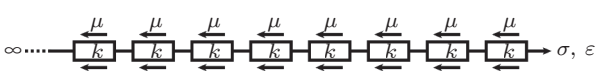


图 13

无穷级黏弹性纤维链 (Yin et al. 2022b)

真正推向无穷 ∞ 后, 力学模型不仅没有无限复杂, 而是变得至精至简. 类比一下, 这很像式 (5) 的幂级数展开. 如果计算有限项之和, 则计算量随项数增多急剧增长. 但如果计算无穷项之和, 幂级数收敛到函数, 计算量急剧减小至"极小". 可谓物极必反, 量变到质变! 当然, 如果直接在如**图 13** 所示的物理力学模型上建构数学模型, 仍然摆脱不了常规的束缚.

第三次抽象: 分析图中力和变形从右往左的逐级传递. 将凝胶对弹簧 k 的黏滞作用抽象为黏壶 (黏性元件) μ. 由于变形协调, 故每一级的弹簧 k 与黏壶 μ 并联 $(k\|\mu)$. 由于力平衡, 故每一级的弹簧 k 都与下一级"并联的弹簧和黏壶 $(k\|\mu)$"串联, 即 $k-(k\|\mu)$. 无限次重复上述抽象化操作之后, 出人预料的"新现象"出现了: 图中的"∞ 级链", 竟然被变换成了**图 14(a)** 中的阶梯状"∞ 级自全等分形"! 不是 ∞ 级自相似分形, 而是 ∞ 级自全等分形! 我们朝思暮想的分形, 终于露出了真容! 如此简单的纤维链中, 竟然隐藏着分形. 但只有抽象到足够的高度 (∞), 才能透过"抽象化的透镜"看到分形. 注意到, 链状结构在自然界和生物世界普遍存在. 因此, **图 14(a)** 中的分形, 在自然界中极具普遍性. 更出人预料的是, **图 14(a)** 的分形与教科书中的分形, 完全不是一回事: 分形几何中最基本的概念, 例如分形维数, 在**图 14(a)** 的分形上竟然不存在. 这意味着, 一种全新的分形出现了, 我们称之为"物理分形", 即由物理元件组装而成的无穷级自全等拓扑结构. 物理分形不是几何空间, 而是拓扑结构. 几何空间上可定义度量, 拓扑结构上没有度量. 这样即可对分形进行分类: 分形几何中的自相似分形, 称为"几何分形"; 物理元件组装的自全等拓扑, 称为"物理分形". 力学史上, 用物理元件刻画黏弹性效应, 早有先例, 例如著名的 Kelvin 模型, Maxwell 模型等. 但这些经典黏弹性模型, 只涉及有限个物理元件, 只构成有限集合. 像**图 14** 那样由无穷个物理元件构成的无穷集合, 十分罕见. 奇妙的是, 类似图中的物理分形极具普遍性. 研究表明, 它不仅仅存在于纤维链中, 而且存在于完全无关的学科之中: 从神经纤维的信号发放运动中, 抽象出了物理分形; 从动脉血流动力学中, 抽象出物理分形; 从密质骨纤维中, 抽象出物理分形; 注意到, 最优控制中的分形或分数阶电路 (Tian et al. 2024, Liu 1985, Kaplan & Liu 1986, Bates et al. 1988), 也是物理分形. ..... 如此普遍的存在性带来启示: 物理分形完全可以成为联通不同学科的桥梁. 更奇妙的是, 我们从**图 14** 中发现了极具颠覆性的奥秘: 物理分形中隐藏了分数阶! 为揭开分数阶的面纱, 尚需做第四次抽象.

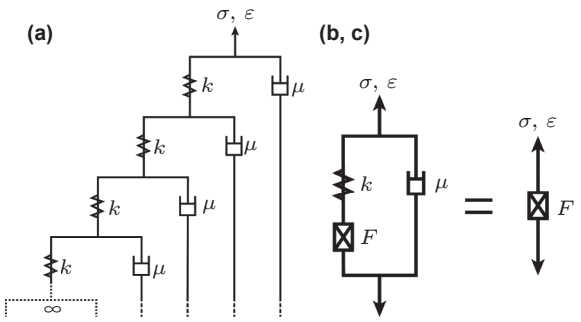


图 14

物理分形、分形胞元和分形元件 (Yin et al. 2022b)

第四次抽象: 整体上看, **图 14(a)** 中的物理分形可以被集成一个物理分形元件 F (**图 14(c)**). 局部地看, 即从第一级弹簧 k 往下看, 也可以看到一个物理分形元件 F (∞ 级的魔力！). 立即可知, **图 14(a)** 中的物理分形完全等价于**图 14(b)**: 其中第一级弹簧 k 与物理分形元件 F 串联, 再与第一级黏壶 μ 并联. 于是我们定义新概念 (**图 14(b)**) : 与物理分形等价且只包含第一级的最少重复单元, 称为“分形胞元”.

3.2.2 分形胞元对微元体概念的拓展

分形胞元与经典微元体在若干基本特征上有所不同. 经典微单元体是封闭系统、局部性、连续的; 分形胞元是开放系统 (能量可耗散至环境)、非局部性 (无穷级内部结构)、离散的 (物理元件组装). 从 Newton 和 Leibniz 时代以来, 微单元体一直是数学、物理学和力学的基础性概念: 守恒律方程大都被奠定在微单元体概念之上. 一旦用分形胞元代替微单元体, 立即发现了“新天地”. **图 14** 给出了两大等价关系 (Yin et al. 2022b)

$$\text{物理分形(图14(a))} = \text{分形元件}F\text{(图14(c))}$$

$$\text{物理分形(图14(a))} = \text{分形胞元(图14(b))}$$

立即导出第三大等价关系: 分形胞元 (**图 14(b)**) = 分形元件 F (**图 14(c)**). 这三大等价关系背后的思想极其深刻, 它蕴含了 Cantor 无穷集合的基本公理, 即局部 = 整体. 分形元件 F (**图 14(c)**) 是整个物理分形的等价物, 因而是“整体”; 而分形胞元 (**图 14(b)**) 中的分形元件 F 又是“局部”. “局部 = 整体”正是无穷集合上的公理 (Cantor 公理). 很显然, “局部=整体”公理是对“整体 > 局部”公理 (即有限集合上或 Euclid 几何中的第五公理) 彻底的颠覆. 总之, 分形胞元的提出为处理具有显著多级自相似特征的生物黏弹性材料提供了一条新的思路.

3.3 物理分形空间中的分形算子与分数阶力学

非常奇妙的是, 正是 3.2.2 节中颠覆性的等价关系, 导向了颠覆性的本构方程 (Jian et al. 2023a, 2023b)

$$\sigma = T_F \varepsilon = \left(T_{\mu} + \frac{1}{\dfrac{1}{T_k} + \dfrac{1}{T_F}} \right) \varepsilon \tag{30}$$

式中, T_{k}、T_{μ} 分别是弹簧元件 k 和黏壶元件 μ 的刚度算子: $T_{\mathrm{k}} = k$, $T_{\mu} = G\mu p$. T_{F} 是分形元件 F (或物理分形) 的刚度算子. 我们顺势引入新概念, 称 T_{F} 为“分形算子”. 式 (30) 中, T_{F} 是未知量. 由未知分形算子 T_{F} 刻画本构, 是一种很罕见的新“现象”.

运用 Heaviside 运算微积思想, 并引入算子代数, 便可将本构方程 (30), 转化为以分形算子 T_{F} 为未知量的算子代数方程

$$T_{\mathrm{F}} = T_{\mu} + \frac{1}{\dfrac{1}{T_{\mathrm{k}}} + \dfrac{1}{T_{\mathrm{F}}}} \tag{31}$$

于是, 分形算子 T_{F} 满足二次代数方程

$$T_{\mathrm{F}}^2 - T_{\mu} T_{\mathrm{F}} - T_{\mu} T_{\mathrm{k}} = 0 \tag{32}$$

其根式解为

$$T_{\mathrm{F}}(p) = \frac{T_{\mu} \pm \sqrt{T_{\mu}^2 + 4 T_{\mu} T_{\mathrm{k}}}}{2} = \frac{G\mu}{2} \left[p \pm \sqrt{p^2 + \frac{4k}{G\mu} p} \right] \tag{33}$$

也可以换一个角度看式 (31). 式 (31) 右端可以视为未知分形算子 T_{F} 的函数 $f(T_{\mathrm{F}})$. 则式 (31) 就是不动点方程 $T_{\mathrm{F}} = f(T_{\mathrm{F}})$, 式 (33) 中的 $T_{\mathrm{F}}(p)$ 就是不动点方程的解.

至此, 经过漫长的抽象之路, 我们终于拨开了神秘的面纱, 看到了惊艳的“新现象”: 分形算子 T_{F} 竟然是分数阶算子, 表观形式上具有 1/2 阶次! 如此简单的整数阶物理元件, 竟然组合出了诡异的分数阶“现象”. 无穷集合与有限集合的本质性差异, 在力学中展现得淋漓尽致.

为保证能量的正定性, 式 (33) 中的“±”号, 一般取“+”号. 然而, 其中的“−”号是否刻画了材料的左手性? 这是一个值得深入研究的科学问题. 至此, 可以回答有趣的“小问题”了: 分形与分数阶确实有深刻的内在关联, 分形确实是分数阶的源泉. 然而, 这里的分形不是常规的几何分形 (Gao et al. 2003, Shao et al. 2012, Parisis et al. 2022, Ji & Gao 2004a, Zhao et al. 2023), 而是超常规的物理分形 (渐徵墨 等 2026, 周天弈 等 2026, 蒋瑞恒 等 2026). 这个结果, 完全颠覆了研究者们的认知.

目前, 生物纤维、神经信号发放、动脉血流运动、骨纤维中, 都抽象出了物理分形, 如**图 15(a)** 所示. 除此之外, 生命体内的运动, 例如, 血液流动, 淋巴液流动, 组织液流动, 脑脊液流动, 神经信号发放等, 虽然差异很大, 但都具有一个共性: 棘轮运动, 即周期性往复运动转换为单向运动. 不仅如此, 运动中伴随着耗散和与环境的物质能量交换. 正如我们从动脉血流运动中抽象出了物理分形, 这种共同的运动转换模式的背后, 都存在着控制运动的物理分形. 不仅生命体, 还有大型工程. 高速列车隧道降噪, 沿隧道布置周期状赫姆霍兹谐振腔. 声波陷入谐振腔, 能量耗尽, 即可起到降噪效果. 隧道降噪与神经信号传导, 看似风马牛不相及, 但二者之间存在出人预料的共性. 神经纤维上分布周期状棘突. 离子沿神经纤维传导, 陷入棘突, 能量耗尽, 即可起到调控神经效果. 神经信号传导可类比声波沿隧道传播, 棘突可类比谐振腔. 我们从神经信号传导抽象出了物理分形电路, 如**图 15(b)** 所示. 类比可知, 从隧道声波降噪也可以抽象出物理分形, 如**图 15(c)** 所示.

物理分形是一个具有一定普适性的建模概念, 它普遍存在于自然界. 研究组从页岩油渗流 (Liu et al. 2024a, 2024b, 2024c, 2025a, 2025b) 现象中抽象出了物理分形, 文献 (Yin et al. 2026) 对页岩油稳态渗流现象抽象如下. 主裂缝各处表面的压力–流量关系

$$Q(x) = T(\Delta) P(x) \tag{34}$$

页岩层具有天然层级结构 (谢和平 1992, 周宏伟 等 2024, 马斌文 等 2024). 借助无穷微分思想, 将总渗流过程分为无穷片薄页岩片层中渗流过程的复合, 如**图 15(d)** 所示. 薄页岩片层中的渗流可分为 3 种. 一是法向上的层级间输运渗流, 二是面内切向上的层内渗流, 三是面内储层自身产出的油气流, 其中, 层内渗流可简化为 Darcy 流动.

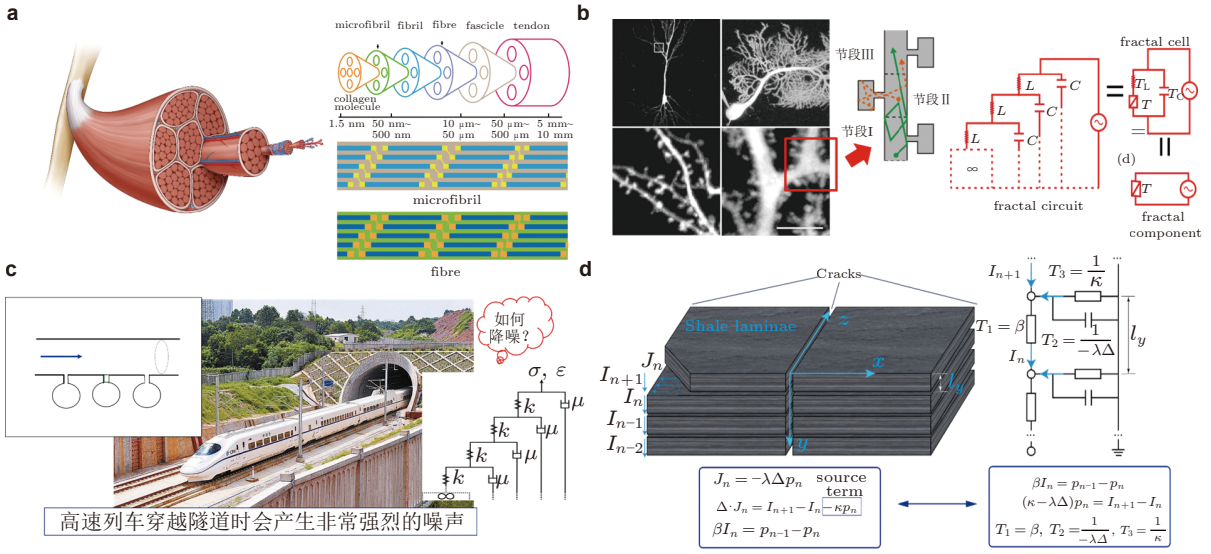


图 15

物理分形的应用场景 (Yin et al. 2022b). (a) 生物力学建模 (以从肌腱中抽象出的“纤维链/组织凝胶”复合材料为例), (b) 神经信号传导, (c) 隧道噪声控制, (d) 页岩油渗流

借助质量守恒律与 Darcy 渗流方程, 可建立层间流量 I、层内流量 J 与压力 P 的转换关系式. 引入力电比拟法, 法向层间流与储层内的油气流分别被等效为电阻元件, 切向层内渗流被等效为电感元件. 根据 3 种渗流间的复合关系, 可确定元件间串并联关系. 利用无穷级嵌套迭代关系, 可建立分形电路. 根据分形电路的自全等性, 可建立不动点方程, 解方程可导出分形电路的分形算子

$$T(\Delta)=-\frac{\beta}{2}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{4}{\beta(\kappa-\lambda\Delta)}}\right) \tag{35}$$

这是空间域上的分形算子, 它是非整数阶的, 奇异的, 非有理的, 非局部的, 非初等的.

将上述算子罗列在一起并分类. 一类是时间域上的分数阶算子, $T(x,p)$, $T(p)$; 另一类是空间域上的分数阶算子, $T(t,\Delta)$, $T(\Delta)$. 可以断定, 力学中, 出现了过去不曾出现过的“量”！它们不仅难以理解, 而且难以计算. 如何理解? 如何计算? 一位伟大人物的思想引起了我们的关注. 德国数学家 Klein 是哥廷根学派的领袖. “变换群下的不变性”思想, 来自于他那著名的《埃尔兰根纲领》. 1872 年, 克莱因 (Felix Christian Klein, 1849—1925) 在论文《Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen》中, 提出以变换群下的不变量来区分非欧几何的思想. 后来被称为 Erlangen program (爱尔兰根纲领). 而“变换群下的不变性”思想, 可以引导上述分形/分数阶非有理算子研究.

注意到, 力学中, 常见的变换有代数变换、微分变换和积分变换. 积分变换是求解微分方程的利器, 而算子又是描述微分方程的核心. 因此, 将 Klein 思想与积分变换相结合, 就可能为分形/分数阶非有理算子探索开辟新道路. 实际上, 对于时间域上的分数阶算子, 3.1.3 节中给出的基本

策略是公理化: 从整数阶有理算子性质中找到不变性. 借助公设, 将整数阶有理算子的不变性推广到所有分形/分数阶非有理算子. 对于时间域算子 $T(p)$, 时间域 $[0,\infty)$ 适配 Laplace 变换的积分域. 对于空间域算子 $T(\Delta)$, 空间域 $(-\infty,\infty)$ 适配 Fourier 变换的积分域. 这样, 两类算子, 正好匹配两类积分变换.

Laplace 变换下, 时间域上的有理分式型算子具有漂亮的形式不变性 (Yin et al. 2025b)

$$\mathcal{L}\left[\frac{Q_{\mathrm{m}}(p)}{P_{\mathrm{n}}(p)}f(t)\right]=\frac{Q_{\mathrm{m}}(s)}{P_{\mathrm{n}}(s)}\hat{f}(s),\quad s=\sigma+\mathrm{i}\omega \tag{36}$$

我们称之为 $p\sim s$ 对称性.

Fourier 变换下, 空间域上的有理分式型算子也具有漂亮的形式不变性 (Yin et al. 2026)

$$\mathcal{F}\left[\frac{Q_{\mathrm{m}}(D_x)}{P_{\mathrm{n}}(D_x)}f(x)\right]=\frac{Q_{\mathrm{m}}(s)}{P_{\mathrm{n}}(s)}\tilde{f}(s),\quad s=\mathrm{i}\omega \tag{37}$$

我们称之为 $D_x\sim s$ 对称性.

十分美妙的是, $p\sim s$ 对称性与 $D_x\sim s$ 对称性之间也存在优美的对称性!

将 Klein 变换群下的不变性思想与 Laplace 变换相结合, 可提出 3.1.3 节中的“Laplace 变换下时间域算子的形式不变性”公设. 同理, 将 Klein 变换群下的不变性思想与 Fourier 变换相结合, 可提出“Fourier 变换下空间域算子的形式不变性”公设.

公设 Fourier 变换下, 空间域算子, $T(D_x)$, 与 Fourier 域上的像函数, $T(s)$, 在表观形式上具有完全的一致性

$$\mathcal{F}\left[T(D_x)f(x)\right]\triangleq T(s)\tilde{f}(s),\quad s=\mathrm{i}\omega \tag{38}$$

注意到, 2 个公设规定了两类对称性. 而 2 个公设之间也显示出了漂亮的对称性.

上述公设回答了一个基本问题: 分形/分数阶非有理算子到底是什么? 积分变换下, 形式变化的是函数, 形式不变的是算子. 上述公理化思想, 力学中并不算出格, 但数学家们可能不会赞成, 因为不够严谨. 尽管如此, 仍然有理由认为, 公设为理解和计算分形/分数阶非有理算子, 提供了突破口.

公设解决了一个基本问题: 分形/分数阶非有理算子如何计算? 从公设出发, 可以演绎出如下理论架构

$$\begin{cases}\mathcal{L}\left[T(p)f(t)\right]\triangleq T(s)\hat{f}(s)\\ T(p)f(t)=K(t)*f(t)\\ T(p)\delta(t)\triangleq K(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[T(s)\right]\end{cases},\quad \begin{cases}\mathcal{F}\left[T(D_x)f(x)\right]=T(s)\tilde{f}(s)\\ T(D_x)f(x)=K(x)*f(x)\\ T(D_x)\delta(x)\triangleq K(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[T(s)\right]\end{cases},\cdots. \tag{39}$$

式中, $K(\cdot)$ 是算子 $T(\cdot)$ 的核函数. $\delta(\cdot)$ 是 Dirac 函数. 很显然, 核函数就是系统的脉冲响应函数.

左侧是时间域算子 $T(p)$ 的计算架构, 右侧是空间域算子 $T(D_x)$ 的计算架构. 于是, 两座完全对称的理论大厦露出了轮廓. 两类算子的对称性, 本质上体现了时间域与空间域的对称性. 而时空对称性, 是物理学、力学和哲学中的重大问题.

基于式 (39) 所示的架构, 难以理解的算子, 可以理解了; 难以计算的算子, 可以计算了. 例如, Heaviside 的算子解, 通过上述架构, 通向了经典解

$$u(x,t)=T(x,p)f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}f(t)=\int_0^t K(x,t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t \frac{x}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{40}$$

在一定条件下, 空间域算子 $T(\Delta)$ 的计算架构, 与数学中的 Fourier 乘子理论和拟微分算子理论, 完全兼容. 这是令人欣慰的兼容性: 至少说明, 公设大体上是靠谱的.

依托本章的算子理论, 就可以系统探索“四非力学”. “四非”的含义是: 非整数阶, 非有理, 非初等, 非局部. 目前, 基于大量案例验证, 我们已经能够有把握地确信: 分形算子/非整数阶算子, 大都是非有理算子, 其核函数大都是非初等函数, 其“行为”大都具有非局部性. 历史上, 无理数出现之后, 人们认识到, 数轴上的有理数是非常稀少的. 分形出现之后, 伟大先驱们做出论断: 大自然本质上是不规则、不连续、不光滑的. 具有规则性、连续性、光滑性的研究对象是非常稀少的. 现在, 基于分形/分数阶非有理算子探索, 有理由认为: 大自然本质上是非整数阶、非有理、非初等、非局部的. 具有整数阶、有理性、初等性、局部性的研究对象是非常稀少的. 需要说明的是, “四非力学”并非独立的学术术语, 而是对上述特征系统的简称.

3.4 基于算子化思想的分数阶系统设计框架

第 1.2 节提到: 1/2 分数阶是“基于直觉的设想”, 并非物理实在. 这种巨大的不确定性, 极大地束缚了分数阶微积分的精准应用. 因此, 厘清分数阶次来源, 并借助算子理论设计和调控分数阶系统具有基本的重要性和必要性. 需要指出的是, 仅有分形算子的代数式 (例如式 (33)) , 尚不足以刻画和计算系统的力学响应. 为此, 需要构造分形算子的卷积化表达: 将算子作用于输入函数的过程, 转化为其核函数与输入函数的卷积积分. 式 (29) 给出的卷积定理提供了这一计算方法, 使得分形算子从抽象的代数符号转化为可计算的积分核, 从而为后续的响应求解和系统设计奠定基础.

第 3.1.3 节提到的系列研究综合运用了伟大先驱们的思想观念, 包括: 公理化思想, Klein 变换群下的不变性以及“结构化, 公理化, 统一性”等观念. 当研究对象是全新的且极具挑战性的时候, 靠单一的思想已经无力处理, 需要将伟大先驱们的思想联合起来. “算子化思想”, 算得上是研究组的新思想. 算子化思想丰富了力学的时空观, 既看到时空对称性, 又看到时空对称性破缺. 时空对称性, 即时间域算子理论与空间域算子理论的数学结构完全同构; 时空对称性破缺, 即时空微分阶次错配. 其“后果”是, 强化了算子的非有理性, 诱导了分数阶效应, 深化了研究者对时空的理解. 对于一个具有分形特征的力学系统, 通常的求解方式是根据每一段结构的受力分析建立线性微分方程组, 最后求得复频域上的分数阶本构, 这与研究组提出的算子化思想截然不同. 算子化思想的优势在于省去了先列出完整线性微分方程组的步骤, 直截了当地将研究对象算子化, 并将全部问题转化到算子域上进行计算. 其最大特点是将研究系统的内蕴与外蕴相互独立, 分别计算. 这样的操作至精至简, 避免了在求解系统响应时需要反复利用拉氏变换或逆拉氏变换的繁琐步骤. 上述思想与经典分数阶系统设计理论存在根本区别: 算子化思想是建立在算子域上的操作, 而经典理论往往是建立在复频域上的. 因此, 在计算分形系统的响应时, 只需要借助算子化思想来计算整体系统算子的核函数与输入函数的卷积即可, 这也是算子化思想的核心 (Ji-

an et al. 2025).

基于近年来的研究, 研究组提出了一种基于算子化思想的分数阶系统设计框架, 如**图 16** 所示 (Jian et al. 2026a). 该框架以“基础重构–逻辑确立–应用落地”为递进式核心逻辑链, 构建起一套从理论到实践的完整闭环体系. 在“基础重构”模块, 针对 Mikusiński 单一算子域概念含混 (3.1.2 节)、算子与函数边界界定模糊的问题, 研究组重构了运算微积的代数基石, 确立了双域并行的严谨结构 (Jiang et al. 2025). 算子域 (新 Heaviside 域) 以微分算子 p 为核心, 将经典加法和乘法界定为基本运算, 兼具明确的幺元与零元; 卷性域依托 Mikusiński 函数集构建, 以加法和卷积为核心运算, 通过积分变换与 L-同态搭建起双域互通的桥梁, 结合卷积核函数定理, 实现了卷性域元素 (卷积核函数) 与算子域元素 (算子) 的精准定量耦合映射, 从根源上夯实了理论体系的逻辑自洽性. 在“逻辑确立”模块, 研究组为破解经典方法中非零初值条件约束、非有理算子难以诠释的核心难题, 引入“变换下的不变性”思想, 完成了微分算子 p 的重构定义 (第 3.1.3 节). 在此基础上, 提出“Laplace 变换群下的形式不变性公设 (Yin et al. 2025b)”, 明确算子 $T(p)$ 在 Laplace 变换作用下与像函数 $T(s)$ 保持形式完全同构, 仅需将 p 替换为复变量 s 即可实现等价映射. 由该公设进一步演绎出完整的算子代数规则, 结合卷积核函数的定义, 清晰地阐明了算子作用的核心是其核函数与输入函数的卷积运算, 成功厘清 $\mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}$ 等非有理算子的数学内涵, 为后续工程应用提供了严密普适的逻辑依托. 在“应用落地”模块, 研究组以“算子化思想”为核心, 摆脱了经典方法依赖复频域反复变换的繁琐操作. 通过连分数理论将分数阶特性融入系统拓扑设计, 以整数阶物理元件 (力学领域的弹簧–黏壶、电路领域的电阻–电感–电容等元件) 为基础, 搭建无穷级分形拓扑结构, 实现了系统内蕴结构化算子与外蕴输入函数的解耦, 输出响应可通过算子

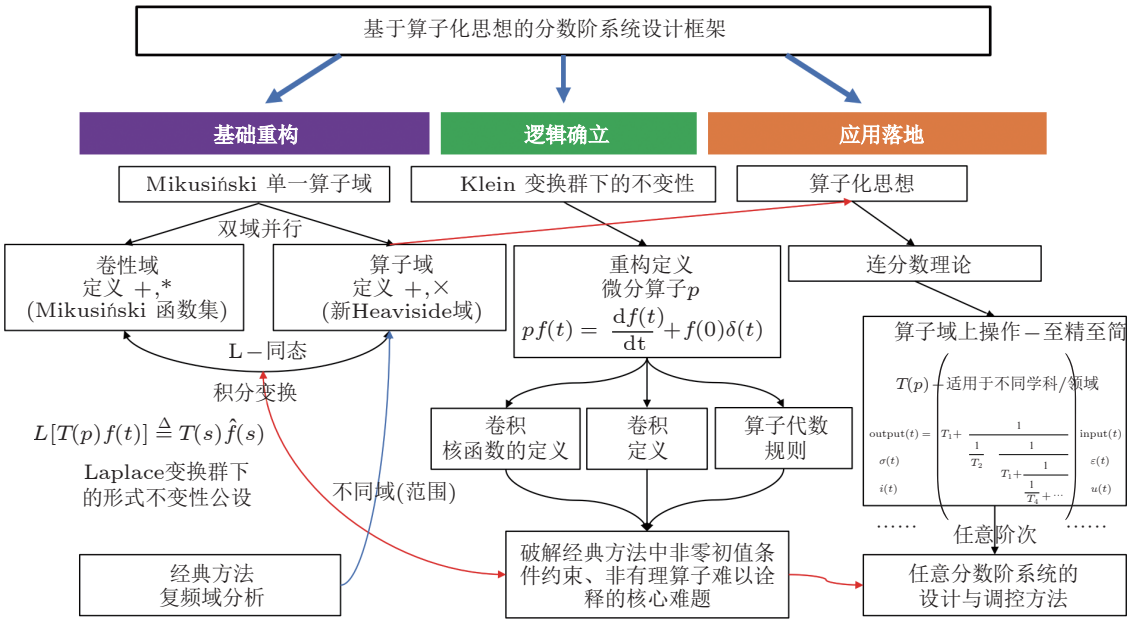


图 16

基于算子化思想的分数阶系统设计框架

与输入函数的直接作用高效求解. 这一设计路径不仅突破了任意阶次分数阶系统的构建瓶颈, 更以简洁的算子域运算替代复杂的复频域变换, 从根本上解决了传统方法的计算冗余问题, 最终形成兼具理论严谨性与工程可行性的通用分数阶系统设计与调控方案. 该框架既彰显了算子化思想的创新价值, 更为后续跨领域拓展 (如电路优化 (He et al. 2020, Ruiz & Felice 2015, Sen & Kircay 2025, Hassan et al. 2024, Deng et al. 2022)、智能材料调控、数值逼近 (Müller et al. 2013, Hürkamp et al. 2015, Birk & Song 2010, Trinks & Ruge 2002) 等) 奠定了坚实基础, 成为分数阶系统研究领域兼具理论深度与应用潜力的全新模式.

在经典力学中, 研究者习惯于面对微分方程: 给定输入, 求解输出. 函数是关注的核心, 算子是辅助的工具. 而物理分形研究则提供了另一个视角: 系统的本征性质. 它的结构、记忆、非局部关联全部凝结在算子之中. 一旦算子被确定, 所有可能的输入–输出关系都随之确定. 换句话说, 算子不再是求解过程中的一个“中间变量”, 而是系统真正的“身份证”. 这种视角的转换意味着: 研究者不再追问“这个系统在某个特定输入下会怎样响应”, 而是追问“这个系统的本质是什么”: 而后者的答案一旦给出, 前者的所有问题都迎刃而解.

算子化思想的精妙之处, 在于它将分数阶从一种“不得不用的数学工具”提升为一种“自然涌现的结构语言”. 过去, 分数阶微积分的引入往往是现象驱动的: 观察到某种幂律行为, 于是引入分数阶来描述它. 而物理分形的方法则是结构驱动的: 从多级自相似结构出发, 算子代数方程自然导出分数阶, 核函数自然涌现出非初等特殊函数. 当然, 算子化思想的意义不止于力学本身. 它为不同学科之间的对话提供了一种共同的语法: 无论是力学系统、电路系统还是控制系统, 只要能够抽象出“算子–输入–输出”的三元结构, 就可以在同一套语言框架下进行分析. 这种语法并不试图抹平学科之间的差异, 而是让差异在共同的参照系中变得更加清晰. 从这个意义上说, 算子化思想更多是一种“邀请”: 邀请不同领域的探索者用同一种方式去追问各自关心的问题, 然后在追问的深处相遇. 如果说分形雪花为研究者提供了一套描述结构“怎样”生长的语言, 那么算子化思想则为研究者提供了一套理解系统“为什么”如此响应的语法. 从语言到语法, 这本身就是一次从运动学到动力学的自然延伸. 而这一延伸的深远含义, 直到研究者将目光投向更广阔的材料世界时, 才真正开始显现.

从生命体中抽象出的物理分形与分形胞元, 为理解分形与分数阶之间的关联提供了新的视角. 物理分形空间中的算子具有非整数阶、非有理、非初等与非局部的特征, 这些特征源于物理分形的拓扑结构与无穷层级性质. 算子化思想则为这类系统的分析与设计提供了一套较为系统的工具.

3.5 小　结

如果说分形雪花的研究让研究者看清了生命体多级结构“怎样”生长, 那么物理分形与分数阶生命体力学的研究则开始回答它“为什么”会长成这样, 以及更重要的, 这样的结构在力学上意味着什么. 这是一次从运动学到动力学的跨越, 也是一次从“描述现象”到“理解本质”的跃升.

分形雪花的研究建立了一套数学语言, 让研究者能够用数学的方式准确地讨论结构的生成与演化, 这在相当程度上仍然类似于传统意义上数学家研究的分形, 即几何图形的分形. 然而,

这种几何语言和力学的研究对象之间存在矛盾. 几何意义上的分形是机械的、静止的, 而力学研究的是运动和相互作用, 几何意义上分形的研究结果难以直接套用在力学的研究中, 有必要去研究分形体的复杂动力学. 在生命体中, 若干具有多层级、自相似特征的组织具有的特殊性往往呈现在其动力学响应上, 例如肌腱材料特殊的长时程黏弹性响应, 为阐明这个现象背后的物理机制, 研究者不仅需要明确这样的多层级结构在一个时刻下的几何特征是怎样的, 还要搞清楚它在连续的时间中是如何运动的, 各层级之间的相互作用是如何传递的, 而后者是从纯粹几何意义上的分形出发难以研究的.

这些思考促使了研究组的研究思想发生转变, 最终引出了“物理分形”的概念. 物理分形也研究几何结构和几何结构上的物理场, 但除此之外更加关心物理场之间的联系, 例如力学上的本构关系. 对于黏弹性本构而言, 这种关系可以抽象为时间域上的算子. 因此, 物理分形与几何分形的不同, 在于基本的重复单元被抽象为算子, 几何上的连接性被抽象为算子输入输出的连接性, 而体积、形状等这些特征在抽象过程中被隐去了, 而最终研究者关注的目标也从几何分形的大小、体积转变成了整体结构宏观上呈现出来的算子.

当研究者将分析对象从几何图形转向由物理元件组装的多级结构时, “结构”与“功能”之间出现了一条可以被数学追踪的因果链. 分形胞元的无穷级自全等拓扑, 在算子域中等价于一个包含根式的代数方程, 这正是分数阶的物理起源之一. 换句话说, 生命体之所以呈现出分数阶的力学行为, 是因为它们的多级自相似结构在数学上必然导致分数阶的描述 (一种涌现形式). 这一发现将分形从一个几何概念提升为力学的核心范畴: 分形不再是视觉上的自相似图案, 而是结构–功能关系的深层组织方式.

4 材料力学基本分析单元的演化与启发

回顾连续介质力学及相关领域的发展历程, 材料力学基本分析单元的演化清晰地勾勒出学科前进的轨迹. 这一演化大致可以划分为 6 个阶段 (6 种方式), 每一个阶段 (每一种方式) 都代表了对“什么是材料的基本力学分析单元”这一问题的一次重新回答, 如**图 17** 所示.

方式 1: 经典微单元体. 从 Newton 和 Leibniz 时代以来, 微单元体一直是数学、物理学和力学的基础性概念. 它具有 3 个基本特征: 封闭性 (与环境之间没有物质交换)、局部性 (只与相邻单元作用)、连续性 (内部没有结构). 守恒律方程, 无论是质量守恒、动量守恒还是能量守恒, 大都被奠定在微单元体概念的基础之上. 经典微元体是 Euclid 空间的产物, 其上的算子都是整数阶的. 这一阶段的核心理念是“化整为零”: 通过将连续体分割为无穷小的单元, 将复杂的偏微分方程转化为可解的局域方程. 这一概念在处理均匀连续介质时取得了巨大成功.

方式 2: 代表性体积单元. 随着复合材料研究的深入, 研究者们意识到材料内部存在微结构, 微元体思想被进一步推广, RVE 应运而生 (Hill 1963, Bargmann et al. 2018). RVE 为单元体内部赋予了空间构型. 然而, RVE 的材料分布呈随机性, 不具备分形特征 (Yousefsani et al. 2020). 此外, 单元体本身仍是连续的, 难以描述生物纤维中纤维蛋白的离散分布特征. RVE 虽然比经典微单元体更接近真实材料, 但并未突破 Euclid 空间的框架. 这一阶段的核心突破在于承认了材料

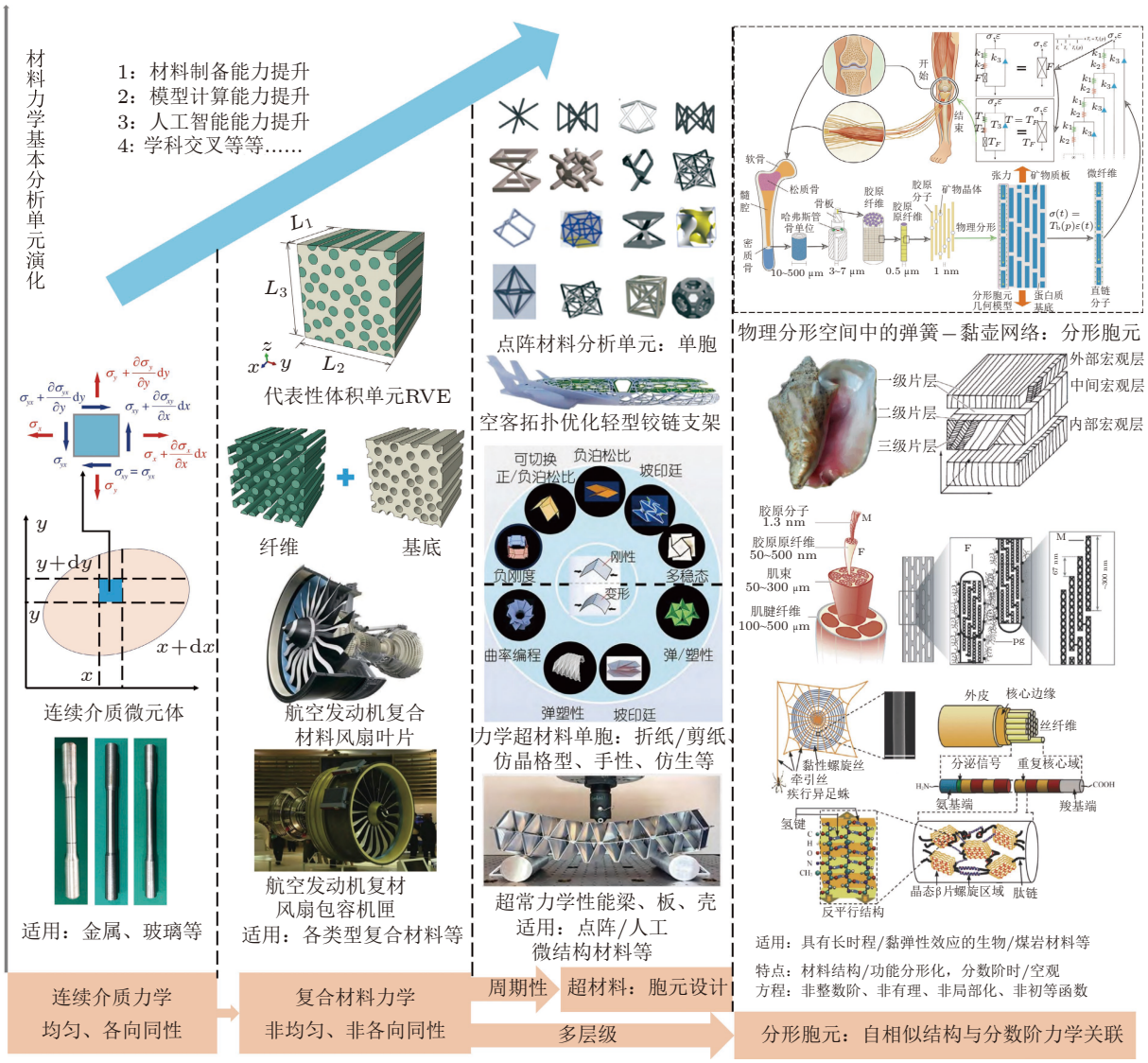


图 17

材料力学基本分析单元的演化 (冯西桥 2017, 杨鑫 等 2021, 何玉龙 等 2026, 渐徵墨 等 2026). (a) 连续介质力学微元体, (b) 复合材料力学 RVE 单元, (c) 点阵材料与超材料单胞, (d) 物理分形空间中的力学元件网络: 分形胞元

内部存在“微结构”, 但微结构仍然是统计意义上的、随机分布的, 而非确定性的、分形嵌套的.

方式 3: 点阵材料单胞. 点阵材料是以单个胞元在空间中周期性排布形成的多孔结构, 具有较高的孔隙率和微结构可设计性, 其力学性能高度依赖于单胞拓扑构型 (杨鑫 等 2021, 陶斯嘉 等 2022, 田伟 等 2026). 点阵单胞的设计经历了从框架到平板再到曲面的演化, 其目标是降低结构内部的应力集中, 实现理论预测的各向同性的 Hashin-Shtrikman 极限刚度 (张璇和李晓雁 2021). 点阵材料单胞虽然具备了更高的结构可设计性, 但其研究范式仍然停留在 Euclid 空间的框架内: 通过单胞的周期性排列来构造宏观材料, 本质上是一种“自下而上”的几何构造.

方式 4: 力学超材料单胞. 力学超材料是指人工设计具有特定微观结构、介观连接以及宏观布局的材料 (Bertoldi et al. 2017, Bordiga et al. 2024, Djellouli et al. 2024, Kai et al. 2023, Frenzel et al. 2017, 尹剑飞 等 2022, 尹彦琦 等 2025, 何玉龙 等 2026). 与传统的侧重于组成成分的材料概念不同, 力学超材料强调的是通过结构设计来获得超常规的力学性能, 涵盖了具有负弹性模量的折纸超材料、手性或反手性超材料、负压缩性超材料以及具有零泊松比特性的多孔板等多种类型. 然而, 力学超材料单胞的研究仍然建立在 Euclid 几何的基础上: 其单胞虽然可以具有极其复杂的拓扑构型, 但本质上仍然是 Euclid 空间中的有限集合.

方式 5: 基于拓扑优化的单胞设计 (孙杰 等 2009, 徐世鹏 等 2022, 黄垲轩 等 2023, 邱克鹏 等 2023). 随着增材制造技术和拓扑优化方法的发展, 单胞设计已经从“试错”走向了“智能化的数据驱动算法” (徐炅阳 等 2025). 通过渐进结构优化、均匀化方法、双向渐进结构优化等方法, 可以针对特定的性能目标设计出具有最优拓扑构型的单胞结构. 这些方法大大拓展了单胞设计的空间, 但其底层假设 (Euclid 几何框架下的有限集合) 并未改变.

方式 6: 分形胞元 (Guo et al. 2019; Peng et al. 2021; Yin et al. 2022a, 2022b, 2025a, 2025b; Jian et al. 2023a, 2023b, 2024a, 2024b, 2025, 2026a, 2026b; Jian & Yin 2024; Jiang et al. 2026). 从生物多级结构中抽象出的分形胞元在上述几种单元体的基础上引入了新特征: 分形胞元具有开放性、非局部性与离散性. 分形胞元不是 Euclid 空间中的几何体, 而是物理分形空间中的拓扑结构. 更重要的是, 分形胞元不是通过“周期性排列”来构造宏观材料, 而是通过“局部=整体”的无穷嵌套方式来实现从微观到宏观的贯通. 这种贯通不是几何意义上的自相似, 而是算子意义上的自全等, 对应的空间形式不再是 Euclid 空间而是物理分形空间.

这一演化并非线性的改变, 而是研究模式的转换. 前 5 种“微元体”方法对应的是局部化的、整数阶的、有理的、初等函数调控的力学. 分形胞元对应的则是非局部化的、非整数阶的、非有理的、非初等函数调控的力学. 前者是 Euclid 空间上的力学, 后者是物理分形空间上的力学.

从经典微单元体到分形胞元的演化反映了研究者对材料结构认知的逐步深化. 不同层次的单元各有适用场景, 分形胞元的提出为处理具有显著多级自相似特征的生物黏弹性材料提供了一条全新的思路. 这场研究方式转换的核心启示是什么? 是从“分而治之”到“合而观之”的思维转变. 经典力学通过将整体分割为微小局部来理解整体, 这是分析的思维. 分形胞元则提供了一条相反的路径: 通过理解局部的“全息”结构来把握整体, 这是综合的思维. 在复杂生命体面前, 也许综合思维在处理某些特定问题方面更为有效.

5 交叉力学中的分形与分数阶方法

5.1 有待进一步研究的基本问题

分形与分数阶方法在交叉力学中的应用正从“工具调用”走向“学科融合”. 然而, 这一进程仍然面临着若干基本科学问题 (Luchko & Srivastava 1995, Lunchko & Gorenflo 1999, Luchko 2021, Hanna et al. 2020, Fernandez 2023, Rani & Fernandez 2022). 这些问题的解答, 将决定这一方向能否从“有趣的探索”发展为“成熟的学科”.

问题一: 分数阶的起源是否穷尽? 目前已揭示的起源: 分形胞元的拓扑不变量、物理元件的阶次以及时空阶次的失配等, 是否穷尽了所有可能性? 自然界或生命体中是否还存在尚未被抽象出来的分数阶起源? 例如, 非线性效应是否也能导致分数阶? 随机过程是否也有分数阶的体现? 这些问题有待进一步探索. 前期我们研究的物理分形 (图 14), 各级元件全同 (自全等). 这是极致的理想化, 是超强的对称性约束 (图 18(a)) . 但自然界或生命体内, 如此完美的自全等根本不存在, 相反, 对称性破缺才是常态 (图 18(b) ~ 图 18(c)) . 因此, 从材料设计的角度, 约束材料参数梯度分布, 从中抽象对称性破缺的、非全同元件构成的物理分形. 通过材料设计和非全同物理分形, 即可寻找新的分数阶起源.

问题二: 高阶分形拓扑是否存在 (Yin et al. 2022a)? 迄今为止从生命体中抽象出来的物理分形都是 2 分叉的低阶拓扑. 3 分叉以上的高阶分形拓扑尚未遇到. 自然界或生命体中不存在高阶拓扑, 还是存在但未被抽象出来? 一旦高阶分形拓扑存在, 算子代数方程必然存在虚算子. 如何理解虚算子? 虚算子的物理意义是什么? 它们是否对应着某种“隐形的”分数阶效应? 这些问题, 都是令人非常感兴趣的.

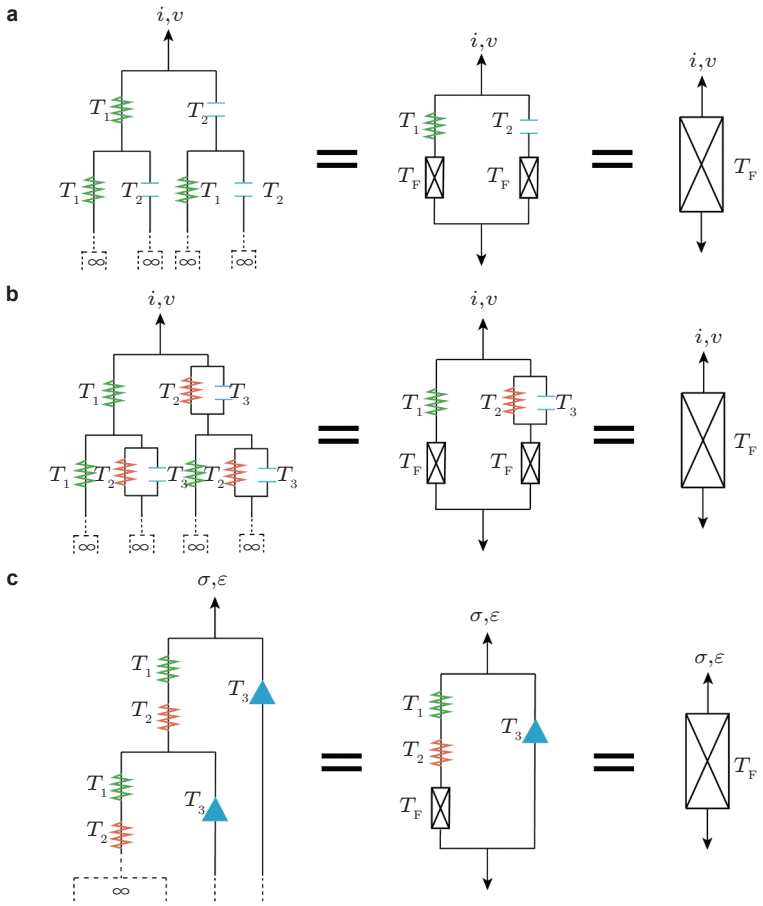


图 18

物理分形空间中元件分形树的对称性演化 (Jian et al. 2024b). (a) 基于含棘突神经纤维抽象的分形树胞元, (b) 基于神经元树突抽象的分形树胞元, (c) 基于密质骨纤维抽象的分形树胞元

问题三: 分形/分数阶非有理算子的逼近理论. 物理分形有无穷级结构, 但自然界和工程界中无穷级结构并不存在. 如何用有限级结构最佳地逼近无穷级结构? 分形/分数阶非有理算子可以展开成什么样的算子级数? 如何判断算子级数的收敛性和截断误差? 这是从理论走向工程应用的关键一步: 没有可靠的逼近方法, 物理分形理论就难以在工程实践中落地 (Yu 2025, Reddy & Reddy 2024, Krishna 2011, Aoun et al. 2004, Podlubny et al. 2002, Vinagre et al. 2000).

问题四: 分数阶微积分能否完全算子化 (柯红路和谢和熙 1999; 柯红路 2003, 2005; 薛定宇和白鹭 2023; Liu et al. 2024c, 2025b)? 任何一个分数阶导数或分数阶积分都对应算子域上的一个分数阶非有理算子; 反过来, 算子域上的任何一个分数阶非有理算子都对应一个分数阶导数或分数阶积分. 这一命题如果真的成立, 将实现分数阶微积分研究模式的彻底转换: 从此不再需要纠结于选择哪种分数阶微积分的定义, 只需要确定对应的算子即可. 针对这一问题, Liu 等 (2024b) 基于 Sonine 核定义的广义分数阶微积分, 建立了一种确定分数阶微积分算子表达的普适性方法. 并给出了 Caputo 导数、R-L 导数、Prabhakar 导数、C-F 导数、A-B 导数等一系列分数阶微积分的算子表达. 该方法在理论上对运算微积的应用进行了扩展和深化, 在实际工程和科学研究中, 为解决复杂的分数阶微分方程问题提供了一种有效可行且简洁直观的算子代数解法. 有机统一性将带来极大好处: (1) 将分数阶导数和分数阶积分研究, 转换为分数阶非有理算子研究, 从而实现分数阶微积分研究范式的转换. (2) 丰富了研究 non-local 问题的武器库. non-local 问题是力学中的难题. 分数阶微积分能够有效描述 non-local 问题, 而分数阶非有理算子自带 non-local "基因", 自身就包含了卷积 (历史作用的积累效应)、初值、长时程或长距离因素, 因而是攻克 non-local 问题的最佳利器. (3) 解决分数阶微积分难以回答的问题. 总之, 实现分数阶非有理算子与分数阶微积分的有机统一, 完全可行.

问题五: 分形算子代数方程中的"±"号如何理解? 为保证能量的正定性, 分形算子代数方程的解一般取"+"号. 然而, 其中的"−"号是否刻画了材料的左手性? 这是一个值得深入研究的科学问题. 左手性材料在电磁学中已经得到了深入研究, 但在力学中, 负刚度、负模量等概念是否也有对应的物理实现? 如果"−"号确实对应着某种"负"的力学行为, 那么它可能为力学超材料的设计开辟一个全新的方向.

针对上述问题, 研究组开展了初步探索: Jiang 等 (2026) 对分形阶梯 (fractal ladder) 模型的自相似性给出了新的数学解释, 并将其转化为高效的计算框架. 其核心思想在于: 将阶梯结构的逐层递归堆叠重新解释为拉普拉斯域中算子空间上的 Möbius 变换

$$T^{(n+1)} = \frac{a_{11}T^{(n)} + a_{12}}{a_{21}T^{(n)} + a_{22}} \tag{41}$$

由此在有限深度阶梯模型与不动点迭代之间建立了直接对应. 如**图 19** 所示, 深度 $N = 1, 2, 3, 4$ 的有限深度阶梯模型, 恰与从某一初始猜测出发对该 Möbius 变换依次迭代 1, 2, 3, 4 次所得的算子 $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$, $T^{(4)}$ 一一对应; 随着深度增加, 算子序列沿螺旋路径收敛至该变换的不动点 $\widehat{T}^{(\infty)}$, 即无限深度分形阶梯模型的精确响应算子 (**图 19(a)**) . **图 19(b)** 的数值结果表明, 有限深度阶梯模型在时域中的单位阶跃响应随深度增加逐渐逼近无限深度阶梯模型的响应曲线, 直观地展示了有限深度模型向无限深度精确响应的收敛.

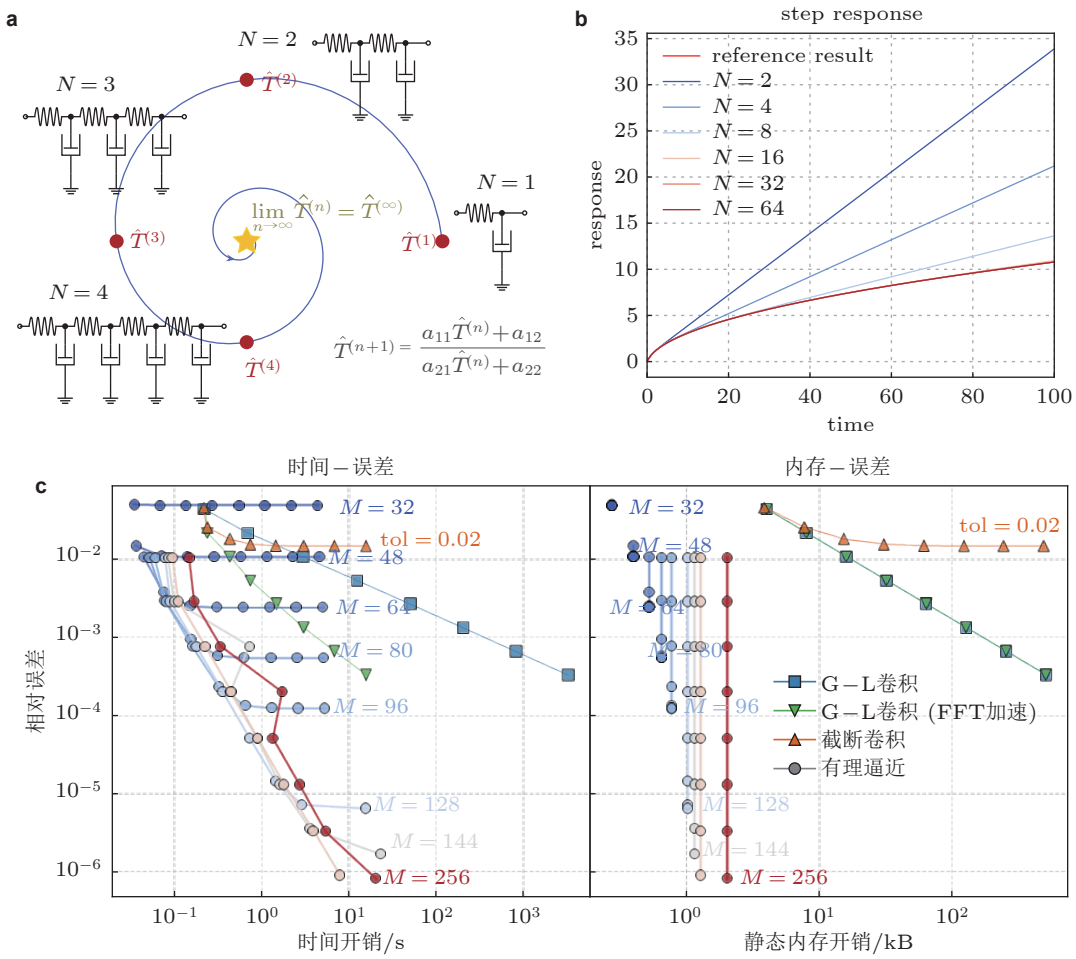


图 19

分数阶黏弹性模型高效数值方法的核心思想. (a) 算子空间中的不动点迭代: 分形阶梯模型的深度递推等价于算子空间中 Möbius 变换的不动点迭代; 四周为深度 $N = 1, 2, 3, 4$ 的有限深度阶梯电路, 对应迭代序列 $T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}, T^{(4)}$ (红色圆点), 该序列沿蓝色螺旋收敛至压缩不动点 $\hat{T}^{(\infty)}$ (金色星号), (b) 数值验证: 不同深度阶梯模型的单位阶跃响应随深度增加逐渐逼近极限情形的响应曲线, 直观展示了有限深度模型向无限深度精确响应的收敛; 基于该框架, 截断迭代即可得到高效的 Prony 级数近似, (c) 分数阶积分算子 $s^{-1/2}$ 的数值算法对比: 左图为 L^2 误差随计算时间的变化, 右图为误差随单个积分点静态内存的变化

在该不动点框架下, 该工作严格证明了以下结论: (i) 2 个数学解分支中, 仅压缩分支 (contractive branch) 具有物理意义, 有限深度序列在弱收敛意义下逼近该分支; (ii) 将迭代截断至第 N 次, 即得到深度为 N 的有限维整数阶近似, 其响应核可通过同时对刚度矩阵和阻尼矩阵对角化表示为 Prony 级数. 记该 Prony 级数的展开阶数为 K, 则时域计算的复杂度由直接卷积的 $\mathrm{O}(L^2)$ 降至 $\mathrm{O}(LK)$ (L 为时间步数, 且 $K \ll L$), 存储复杂度由 $\mathrm{O}(L)$ 降至 $\mathrm{O}(K)$, 为分数阶黏弹性本构在大规模有限元分析中的应用提供了可行的计算方案.

将响应核展开为指数级数的思想并不局限于阶梯模型本身. Jiang 等 (2026) 指出, 有限深度

阶梯系统本质上是一种有限自由度黏弹性系统, 其响应核在拉普拉斯域中为有理分式, 在时域中可展开为指数级数. 受此启发, Jian 等 (2026b) 将这一思想推广至分数阶积分算子的数值处理: 在拉普拉斯域中以有理分式 $R(s)=P(s)/Q(s)$ 逼近分数阶积分算子 $s^{-\alpha}$ (可采用 Oustaloup、Matsuda、Carlson 等展开格式), 经部分分式分解并作拉普拉斯逆变换, 即得到积分核的指数级数逼近. 由于每个指数核项的数值积分只需存储一个状态变量, 该算法的内存复杂度为 $\mathrm{O}(M)$, 其中 M 为有理分式阶次. 此外, 该工作针对 $s^{-1/2}$ 积分算子提出了新的逼近格式: 先将 $s^{-1/2}$ 表示为奇异积分, 再对该积分进行离散化. 如**图 19(c)** 所示, 该工作以分数阶积分算子 $s^{-1/2}$ 为算例, 对比了直接 Grünwald–Letnikov 卷积 (Conv, $\mathrm{O}\left(L^2\right)$)、FFT 加速卷积 (FFT, $\mathrm{O}(L\log L)$)、短记忆原理 (SMP) 与基于奇异积分表示的有理分式逼近方法: 左图给出 L^2 误差随计算时间的变化, 右图给出误差随单个积分点静态内存的变化. 在相近计算时间内, 有理分式逼近方法的误差比卷积类方法低 1 ~ 3 个数量级; 其内存占用不随网格细化而增长, 因而在高分辨率分数阶积分问题中具有显著优势.

5.2 分形与分数阶的时空关联性

分形与分数阶的关联, 本质上是一种时空关联. 几何分形 (Ji & Gao 2004b, Gao 2006, Zhang et al. 2010, Lei et al. 2012, Liu et al. 2006, Reznikov et al. 2018, 武际可 2014) 刻画的是空间的分数维; 分数阶微积分刻画的是时间的分数阶. 二者之间的桥梁, 正是运动. 空间中的结构在时间中运动 (包括变形): 结构的分数维与运动的分数阶, 通过分形算子被统一起来.

一个核心思想是从分数维的空间到分数阶的时间. 生命体中广泛存在的物质空间形式是分形的, 具有分数维. 出人预料的是, 分形空间的运动, 或者分形空间上的运动, 一般显示出分数阶的时间响应. 这意味着分数维空间与分数阶时间之间存在深刻的内在关联.

更深刻的关联来自时空对称性破缺 (Yin et al. 2025a). 当偏微分方程中时间和空间的导数阶次不匹配时, 分数阶必然出现. 这一发现表明, 分数阶并非数学家们的想象, 而是时空结构不对称性的物理反映. 在组织液循环研究中, 从生命体的“棘轮运动”中也可以抽象出物理分形空间和分形算子, 组织液循环被证实是具有 1/2 阶次的分数阶动力学系统 (Yin et al. 2022b).

值得一提的是, 前期的力学探索表明 (Jian et al. 2024b): 基于分形算子, 还可以揭示特殊函数之间的深刻关联性. 以骨分形算子 $\sqrt{p+\alpha}$ 为例, 可以证实误差函数与 Bessel 函数之间存在分数阶关联

$$\sqrt{p}\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}H(t)=\sqrt{p}\frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha t}\right)}{\sqrt{\alpha}}=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{2}}\overline{J_0}\left(\frac{\alpha t}{2}\right) \tag{42}$$

式中, $H(t)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数, $\overline{J_0}$ 是 0 阶修正 Bessel 函数. 式 (42) 表明, 误差函数的 1/2 阶分数阶微分, 即算子 $\sqrt{p}$ 作用后, 可得指数函数加权的 Bessel 函数. 式 (42) 揭示了误差函数与 0 阶修正 Bessel 函数之间的分数阶关联. 文献 (Jian et al. 2024b) 中, 以误差函数为核心, 借助骨分形算子, 可以揭示各类特殊函数之间存在关联性. 误差函数、Bessel 函数、Struve 函数、Gamma 函数、MeijerG 函数、Mittag-Leffler 函数 (Liu et al. 2025b) 和广义超几何函数等, 相互之间都存在分数阶关联性. 这表明, 诸多特殊函数之间, 并不互相独立. 而物理分形空间中的分

数阶非有理算子, 为理解这种奇特的关联性提供了全新视角.

时空关联性的揭示, 为理解“为什么生命体选择分数阶”提供了一个统一的框架. 生命体的空间结构是分形的 (分数维), 生命体的运动响应是分数阶的 (分数阶时间), 二者通过分形算子这个数学结构实现了统一. 这种统一不是人为构造的, 而是生命体物理实在的本质特征.

5.3 分数阶次来源的探索与讨论

分数阶次的来源问题, 是分数阶微积分最根本的问题之一. 综合目前研究, 分数阶次的可能来源可归纳为:

来源一: 分形胞元的拓扑不变量 (Yin et al. 2022a). 分形算子代数方程的阶次等于分形胞元的拓扑不变量. 2 分叉物理分形拓扑导出 1/2 阶, 3 分叉物理分形拓扑导出 1/3 阶. 分数阶次等于拓扑不变量的倒数. 通过 Vieta 定理, 算子代数方程的解与物理元件算子之间的关系得以澄清, 二者之间的对偶约束也被揭示. 这一来源的深刻之处在于: 分数阶次的倒数恰好是分形结构的分叉数, 拓扑结构直接决定了阶次.

来源二: 时空微分阶次失配 (Yin et al. 2025a). 当时间导数的阶次与空间导数的阶次不相等时, 分数阶必然出现. 热传导方程中 1 阶时间导数与 2 阶空间导数的不匹配, 导致了分数阶算子 $\sqrt{p}$ 的出现. 这一机制具有普适性. 偏微分方程中时间和空间偏导数阶次的错配诱导了分数阶现象, 这是分数阶物理起源的一种全新解释. 这一来源的深刻之处在于分数阶源于时空本身的不对称性. 时空并非完全对称的, 这种不对称性在算子层面表现为分数阶.

来源三: 物理元件的材料分布与对称性破缺. 前期研究的物理分形各级元件全同 (自全等), 这是极致的理想化. 但自然界中对称性破缺才是常态. Schiessel-Blumen 模型通过让物理元件的材料参数满足一定的比例关系, 并将结构层级推广至无穷后, 获得表观分数阶系统 (Schiessel & Blumen 1993). 随着物理分形空间中元件分形树的对称性演化, 分形算子的性质也更为丰富. “树状”分形和“阶梯状”分形的算子有共性: 二者都是二次根式型算子, 都是非有理算子. 二者也有差异: “树状”分形算子较为简单, 而“阶梯状”分形算子相对复杂. 前者的简单性来自于分形树拓扑的对称性, 而后者的复杂性则来自于分形阶梯拓扑的对称性破缺. 打破对称性的方式并不唯一: 可以通过改变分叉两端物理元件的数量来实现, 也可以通过改变物理元件的功能属性来实现. 这一来源的深刻之处在于: 分数阶系统可以“设计”出来. 通过调控不同层级间物理元件材料参数的比例 (约束) 关系和对称性破缺的方式, 可以定制所需的分数阶次.

来源四: 物理元件的本征阶次 (Yin et al. 2022a). 即使整数阶元件, 元件阶次最终也会影响分数阶. 如果物理元件本身已经具有分数阶特性 (例如 Abel 黏壶等 (Dai et al. 2015, Craiem et al. 2008, Grahovac & Žigić 2010, Gloeckle & Nonnenmacher1995, Doehring et al. 2005, Sumelka et al. 2020, 周宏伟 等 2012, 刘迪 等 2017)) , 那么由这些元件组装而成的物理分形结构将具有更为复杂的分数阶特征. 物理元件的阶次是决定分形算子分数阶次的重要因素之一.

值得注意的是, 分数阶次的来源具有多样性. 不同来源可以独立地导致分数阶, 也可以共同作用. 这意味着, 在面对一个具体的分数阶系统时, 追问“分数阶来自哪里”可能没有唯一答案. 更重要的是追问“哪些因素共同决定了这个分数阶次”. 这种多样性本身也暗示着: 分数阶微积分

之所以能够如此广泛地应用于不同领域, 正是因为它的根源是多元的, 不同领域可以从不同的源头通向分数阶.

5.4 小 结

分数阶次的来源问题, 贯穿了从分形雪花到物理分形的整条探索路径. 如果说分形雪花研究让研究者知道分数阶“存在”于多级结构的演化之中, 那么物理分形研究则让研究者开始理解分数阶“从何而来”. 而本章的讨论表明, 这个问题的答案并非单一: 分数阶次的来源具有多样性, 它可能来自拓扑, 也可能来自时空, 还可能来自材料参数的分布方式.

这种多样性本身就是一个值得深思的事实. 它意味着分数阶并非某种特定结构的“专属标签”, 而是一种更为普遍的数学–物理现象, 在不同的系统、不同的尺度、不同的物理背景下可以有全然不同的触发机制. 更重要的是, 分数阶次的来源并非互斥, 而是可以叠加、交织、共同作用. 在真实生命体中, 拓扑、时空、材料分布往往同时存在、相互影响, 共同塑造着系统的分数阶行为. 这意味着, 面对一个具体的生命体力学问题时, 更值得追问的或许是“哪些因素在多大程度上共同决定了这个分数阶次”. 这种追问方式的变化, 本身就是认识的深化. 未来, 采用“物理分形与分数阶”方法解决实际工程问题有望发展成为一种全新的研究模式. 例如, 面向空天动力粘弹性复合材料高精度本构建模: 传统连续介质力学模型难以兼顾运算效率与非局部效应的精准刻画, 经典 RVE 单元无法捕捉黏弹性材料长时程力学“记忆”特性, 广义 Maxwell 模型则存在参数繁杂等短板, 均难以匹配面向空天动力黏弹性复合材料高精度建模的实际需求. 因此, 该领域迫切需要发展一套适配高温、兼顾黏弹性与细观损伤的本构体系及评价技术, 为关键部件优化、寿命评估提供理论支撑与技术工具, 对突破国外技术封锁、提升我国航空航天动力装备自主研发水平具有重要战略意义. 而本文的“物理分形”模型有望为极端环境下先进复合材料多尺度建模开辟新路径, 兼具深厚学术价值与广泛工程应用前景.

交叉力学中的分形与分数阶方法正处于从“现象描述”走向“原理揭示”的关键阶段. 分数阶次的来源探索表明: 分数阶不仅是数学家的发明, 而且是物理世界的客观实在. 它隐藏在生命体的多级结构中, 隐藏在偏微分方程的时空错配中, 隐藏在无穷集合与有限集合的本质差异中. 力学研究者的任务, 就是将这些隐藏的分数阶“挖掘”出来, 并赋予它们清晰的物理内涵.

6 总结与展望

本文系统回顾了研究组近 20 余年来“从分形雪花到分数阶生命体力学”的探索历程. 这一历程可以从 3 个层面加以总结:

在概念层面, 本文贡献了一系列新概念: 比例运动、比例运动变换群、相似比例运动变换群、物理分形、分形胞元、分形算子、算子化思想. 这些概念有清晰的物理起源和背景, 经历了漫长的抽象过程. 它们丰富了力学的概念体系, 为力学学科提供了全新的研究对象.

在理论层面, 本文建立了物理分形空间中的分数阶力学框架. 这一框架的核心可以概括为“四非”特征: 非整数阶、非有理、非初等、非局部. 分数维的空间与分数阶的时间在算子域上达成了统一.

在方法层面, 本文提出了基于算子化思想的分数阶系统分析与设计方法. 通过将系统的内蕴性质与外部激励解耦, 可在算子域中较为简洁地处理分数阶系统的响应问题, 已尝试应用于模拟分数阶电路设计、分数阶数值逼近等领域.

展望未来, 以下几个方向值得持续探索.

第一, 寻找更多分数阶次的起源. 物理分形拓扑、层级约束关系和时空阶次失配之外, 是否还存在其他来源? 物理元件的材料分布、对称性破缺的方式、高阶分形拓扑的结构算子、非线性效应等, 这些都可能孕育着新的分数阶起源. 每发现一个新的起源, 就意味着分数阶微积分与物理世界之间的联系又加深了一层.

第二, 建立分形/分数阶非有理算子的逼近理论. 如何用有限级结构最佳地逼近无穷级物理分形? 算子级数的收敛性和截断误差如何判断? 这是从理论走向工程应用的关键一步. 没有可靠的逼近方法, 物理分形理论就难以在工程实践中落地.

第三, 实现分数阶微积分的完全算子化. 如果任何一个分数阶导数或分数阶积分都对应算子域上的一个分数阶非有理算子, 那么分数阶微积分的研究范式将发生根本性转换. 从此不再需要纠结于选择哪种分数阶微积分的定义, 只需要确定对应的算子即可.

第四, 将物理分形方法拓展至更广泛的领域. 岩土力学、材料科学、控制工程、声学设计等领域中, 是否存在尚未被识别的物理分形结构? 通过抓住不同对象之间的物理共性和数学本质, 可以建立起跨学科的研究范式.

从分形雪花到分数阶生命体力学, 从几何分形到物理分形, 从运动学到动力学, 这条探索之路揭示了一个深刻的道理: 大自然本质上是非整数阶、非有理、非初等、非局部的. 具有整数阶、有理性、初等性、局部性的研究对象, 反而是非常稀少的. 连续介质力学的微元体概念, 正在从 Euclid 空间的封闭单元, 演化为物理分形空间的开放胞元. 这或许预示着力学学科的下一次研究模式转变.

致 谢　国家自然科学基金原创探索计划 (12050001)、重点实验室基金项目 (6142906230202)、清华大学“水木学者”计划 (2026SM186) 资助.

参 考 文 献

白占兵. 2017. 分数阶微分方程边值问题研究简介. 数学建模及其应用, **6**(2): 1-10.

邓立为, 宋申民. 2013. 基于分数阶滑模的挠性航天器姿态鲁棒跟踪控制. 航空学报, **34**(8): 1915-1923.

冯元桢. 1983. 生物力学. 北京: 科学出版社.

冯西桥. 2017. 生物材料力学与仿生学. 上海: 上海交通大学出版社.

黄果, 许黎, 蒲亦非. 2012. 分数阶微积分在图像处理中的研究综述. 计算机应用研究, **29**(2): 414-420+426.

黄垲轩, 丁喆, 张严, 等. 2023. 高承载梯度分层点阵结构的拓扑优化设计方法. 力学学报, **55**(2): 433-444.

虎积元, 盛冬发, 陈泰聪, 等. 2024. 岩石分数阶黏弹塑性损伤蠕变模型研究. 人民长江, **55**(11): 237-243.

何玉龙, 孙嘉鹏, 陈传庆, 等. 2026. 典型力学超构材料耗能机制与变形行为研究进展. 科学通报, **71**(13): 2803-2821.

蒋瑞恒, 渐微墨, 周天弈, 等. 2026. 物理分形中的连分数形式算子. 北京力学会第 32 届学术年会论文集, 226-227.

渐徵墨. 2026. 骨力学启发的分形/分数阶算子及其应用. [博士论文]. 北京: 清华大学 (Jian Z M. 2026. Fractal/fractional-order operators inspired by bone mechanics and their applications [PhD Thesis]. Beijing: Tsinghua University).

渐徵墨, 蒋知臻, 蒋瑞恒, 等. 2026. 物理分形空间中的分数阶骨力学及其应用. 北京力学会第 32 届学术年会论文集, 279-280.

柯红路, 谢和熙. 1999. 线性微分方程的微分算子级数解法. 应用数学和力学, **20**(8): 822-828.

柯红路. 2003. 微分方程的新解法: 微分算子级数法. 北京: 中国科学文化出版社.

柯红路. 2005. 微分算子级数法在数学分支中的应用. 北京: 中国教育文化出版社.

柯朗, 希尔伯特. 2012. 数学物理方法: II. 北京: 科学出版社.

李后强, 汪富泉. 1992. 分形理论及其发展历程. 自然辩证法研究, (11): 20-23.

刘崇新. 2007. 一个超混沌系统及其分数阶电路仿真实验. 物理学报, (12): 6865-6873.

刘迪, 周宏伟, 赵阳, 等. 2017. 基于声发射特征的盐岩蠕变本构模型研究. 岩土力学, **38**(7): 1951-1958.

刘敬喜, 李国清. 2018. 谈微元体平衡微分方程的教学法. 力学与实践, **40**(4): 436-439.

马斌文, 谢和平, 张修峰, 等. 2024. 动载扰动下巷道围岩冲击破坏与能量释放规律研究. 采矿与岩层控制工程学报, **6**(4): 5-22.

蒲亦非, 袁晓, 廖科, 等. 2005. 现代信号分析与处理中分数阶微积分的五种数值实现算法. 四川大学学报 (工程科学版), (5): 118-124.

邱克鹏, 陈智谋, 张建刚, 等. 2023. 基于形状记忆合金声子晶体的带隙优化设计. 力学学报, **55**(6): 1278-1287.

邱志平, 邱宇, 张培宣. 2025. 力学分析中的对称性与守恒律分析方法研究进展. 力学进展, **55**(1): 80-112.

孙杰, 孙志刚, 宋迎东, 等. 2009. 基于高精度通用单胞模型的材料细观结构拓扑优化设计. 航空学报, **30**(11): 2106-2112.

孙政章. 2024. 电力系统混沌振荡的分数阶自适应滑模控制. 电力系统及其自动化, **46**(5): 50-52.

陶斯嘉, 王小锋, 曾婧, 等. 2022. 点阵材料及其 3D 打印. 中国有色金属学报, **32**(2): 416-444.

田伟, 刘砚飞, 张少平, 等. 2026. 点阵材料在航空发动机中的研究进展与应用探索. 航空学报, 1-20.

文志英, 井竹君. 1995. 分形几何和分维数简介. 数学的实践与认识, (4): 20-34.

王振滨, 曹广益. 2004. 分数微积分的两种系统建模方法. 系统仿真学报, (4): 810-812.

武际可. 2014. 结构工程师和骨科医生的产儿——沃尔夫定律. 力学与实践, **36**: 798-801.

吴强, 黄建华. 2016. 分数阶微积分. 北京: 清华大学出版社.

谢和平. 1992. 分形几何及其在岩土力学中的应用. 岩土工程学报, (1): 14-24.

徐明瑜, 谭文长. 2006. 中间过程、临界现象——分数阶算子理论、方法、进展及其在现代力学中的应用. 中国科学 G 辑: 物理学、力学、天文学, (3): 225-238.

时中, 黄学祥, 谭谦, 等. 2016. 自由飞行空间机器人的遥操作分数阶 PID 控制. 控制理论与应用, **33**(6): 800-808.

徐世鹏, 丁晓红, 段朋云, 等. 2022. 考虑时变刚度特性的复合材料微结构拓扑优化设计方法. 力学学报, **54**(1): 134-146.

薛定宇, 赵春娜. 2007. 分数阶系统的分数阶 PID 控制器设计. 控制理论与应用, (5): 771-776.

薛定宇, 白鹭. 2023. 分数阶微积分学数值算法与实现. 北京: 清华大学出版社.

徐炅阳, 余秋子, 张佳龙, 等. 2025. 基于数据驱动的声振耦合系统微结构拓扑优化方法研究. 振动与冲击, **44**(8): 133-142.

杨帆. 2014. 从生物体中抽象出的多级结构及其生长运动学. [博士论文]. 北京: 清华大学 (Yang F. 2014. Multilevel structures abstracted from creatures and their growth kinematics. [PhD Thesis]. Beijing: Tsinghua University).

杨鑫, 马文君, 王岩, 等. 2021. 增材制造金属点阵多孔材料研究进展. 材料导报, **35**(7): 7114-7120.

尹剑飞, 蔡力, 方鑫, 等. 2022. 力学超材料研究进展与减振降噪应用. 力学进展, **52**(3): 508-586.

尹彦琦, 尹婧雯, 张金尧, 等. 2025. 多稳态剪纸设计与力学研究进展. 力学学报, **57**(10): 2493-2507.

朱克勤. 2009a. 黏弹性软物质: 沟通分形和分数阶导数的桥梁. 力学与实践, **31**(2): 104-106.

朱克勤. 2009b. 粘弹性体研究的方法论启示. 中外力学思维纵横——第四届全国力学史与方法论学术研讨会论文集, 72-77.

朱克勤. 2010. 固体还是流体? 力学与实践, 32(4): 115-116.

张济忠. 2011. 分形. 北京: 清华大学出版社.

张璇, 李晓雁. 2021. 微纳米点阵力学超材料的设计和性能. 力学与实践, **43**(1): 164-168.

张赟宁, 郭钟仁, 张磊. 2025. 基于 RBF 神经网络的分数阶虚拟同步控制策略. 电力系统及其自动化学报, **37**(9): 101-108.

周扬杰, 陈宇, 王天志. 2024. 奇妙的分形几何. 数学教学研究, **43**(5): 64-67.

周宏伟, 王春萍, 段志强, 等. 2012. 基于分数阶导数的盐岩流变本构模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, **42**(3): 310-318.

周宏伟, 侯巍, 张龙丹, 等. 2024. 循环加卸载条件下考虑温度的煤体本构模型. 煤炭学报, **49**(1): 442-453.

周天弈, 渐微墨, 蒋瑞恒, 等. 2026. 物理分形空间与非整数阶力学研究. 北京力学会第 32 届学术年会论文集, 284-286.

竺佐, 郑永军, 罗哉. 2022. 分数阶双稳系统随机共振现象研究及 FPGA 实现. 计量学报, **43**(3): 318-324.

Aoun M, Malti R, Levron F, et al. 2004. Numerical simulations of fractional systems: An overview of existing methods and improvements. *Nonlinear Dyn.*, **38**: 117-131.

Bates J B, Chu Y T, Stribling W T. 1988. Surface topography and impedance of metal-electrolyte interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, **60**(7): 627-630.

Birk C, Song C M. 2010. An improved non-classical method for the solution of fractional differential equations. *Comput. Mech.*, **46**: 721-734.

Balka R, Buczolich Z, Elekes M. 2015. A new fractal dimension: The topological Hausdorff dimension. *Adv. Math.*, **274**: 881-927.

Bertoldi K, Vitelli V, Christensen J, et al. 2017. Flexible mechanical metamaterials. *Nat. Rev. Mater.*, **2**: 17066.

Bordiga G, Medina E, Jafarzadeh S, et al. 2024. Automated discovery of reprogrammable nonlinear dynamic metamaterials. *Nat. Mater.*, **23**: 1486-1494.

Bromwich T J I. 1916. Normal coordinates in dynamical systems. *Proc. London Math. Soc.*, **15**(1): 401-448.

Berg L. 2013. Introduction to the operational calculus. Amsterdam: Elsevier.

Bengochea G. 2014. Operational solution of fractional differential equations. *Appl. Math. Lett.*, **32**: 48-52.

Bargmann S, Klusemann B, Wilmers J, et al. 2018. Generation of 3D representative volume elements for heterogeneous materials: A review. *Prog. Mater. Sci.*, **96**: 322-384.

Carson J R. 1922. The Heaviside operational calculus. *Bell Syst. Tech. J.*, **1**(2): 43-55.

Cooper J L B. 1952. Heaviside and the operational calculus. *Math. Gaz.*, **36**(315): 5-19.

Craiem D, Rojo F J, Atienza J M, et al. 2008. Fractional-order viscoelasticity applied to describe uniaxial stress relaxation of human arteries. *Phys. Med. Biol.*, **53**(17): 4543.

Caputo M, Cametti C. 2016. Fractional derivatives in the transport of drugs across biological materials and human skin. *Phys. A*, **462**: 705-713.

Chen P Y, McKittrick J, Meyers M A. 2012. Biological materials: Functional adaptations and bioinspired designs. *Prog. Mater. Sci.*, **57**(8): 1492-1704.

Chechkin A V, Gorenflo R, Sokolov I M. 2005. Fractional diffusion in inhomogeneous media. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**(42): L679-L684.

Dai Z, Peng Y, Mansy H A, et al. 2015. A model of lung parenchyma stress relaxation using fractional viscoelasticity. *Med. Eng. Phys.*, **37**(8): 752-758.

Doehring T C, Freed A D, Carew E O, et al. 2005. Fractional order viscoelasticity of the aortic valve cusp: An alternative to quasilinear viscoelasticity. *J. Biomech. Eng.*, **127**: 700-708.

Djellouli A, Raemdonck B V, Wang Y, et al. 2024. Shell buckling for programmable metafluids. *Nature*, **628**: 545-550.

Deng Y B, Liu B J, Huang Z N, et al. 2022. Fractional spiking neuron: Fractional leaky integrate-and-fire circuit described with dendritic fractal model. *IEEE Trans. Biomed. Circuits Syst.*, **16**(6): 1375-1386.

Diethelm K, Kiryakova V, Luchko Y, et al. 2022. Trends, directions for further research, and some open problems of fractional calculus. *Nonlinear Dyn.*, **107**: 3245-3270.

Diliūnas S, Leišis V, Pilkaitė T, et al. 2026. Hierarchical and fractal-inspired mechanical metamaterials: A mechanics-oriented review of multiscale design, strength, deformation, and energy absorption. *Materials*, **19**(16): 3432.

Fung Y. 1993. Biomechanics: Mechanical properties of living tissues. New York: Springer.

Fung Y. 1996. Biomechanics: Circulation. New York: Springer.

Fan J, Liu J, He J. 2008. Hierarchy of wool fibers and fractal dimensions. *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **9**(3): 293-296.

Fan J, Liu Y. 2013. Heat transfer in fractal channel network of wool fibre. *Mater. Sci. Technol.*, **26**(11): 1320-1322.

Fernandez A. 2023. Mikusiński's operational calculus for general conjugated fractional derivatives. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, **29**(1): 1-24.

Frenzel T, Kadic M, Wegener M. 2017. Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist. *Science*, **358**(6366): 1072-1074.

Fernández-Martínez M, Nowak M, Sánchez-Granero M A. 2016. Counterexamples in theory of fractal dimension for fractal structures. *Chaos Solitons Fractals*, **89**: 210-223.

Gloeckle W G, Nonnenmacher T F. 1995. A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics. *Biophys. J.*, **68**: 46-53.

Gao H J, Ji B H, Fratzl P, et al. 2003. Materials become insensitive to flaws at nanoscale: Lessons from nature. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **100**(10): 5597-5600.

Gao H J. 2006. Application of fracture mechanics concepts to hierarchical biomechanics of bone and bone-like materials. *Int. J. Fract.*, **138**: 101-137.

Glaeske H J, Prudnikov A P, Skórnik K A. 2006. Operational calculus and related topics. New York: Chapman and Hall/CRC.

Grahovac N M, Žigić M M. 2010. Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives. *Comput. Math. Appl.*, **59**(5): 1695-1700.

Garra R, Salusti E. 2013. Application of the nonlocal Darcy law to the propagation of nonlinear thermoelastic waves in fluid saturated porous media. *Phys. D*, **250**: 52-57.

Guo J Q, Yin Y J, Ren G X. 2019. Abstraction and operator characterization of fractal ladder viscoelastic hyper-cell for ligaments and tendons. *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, **40**(10): 1429-1448.

Guo J Q, Yin Y J, Ren G X, et al. 2020. Self-similar network model for fractional-order neuronal spiking: Implications of dendritic spine functions. *Nonlinear Dyn.*, **100**: 921-935.

Hill R. 1963. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, **11**(5): 357-372.

Heaviside O. 1893. On operators in physical mathematics, part I. *Proc. R. Soc. A*, **52**: 315-320.

Haar A. 1910. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.*, **69**: 331-371.

He J, Ren Z, Fan J, et al. 2009. Hierarchy of wool fibers and its interpretation using E-infinity theory. *Chaos Solitons Fractals*, **41**(4): 1839-1841.

He Q Y, Pu Y F, Yu B, et al. 2020. A class of fractal-chain fractance approximation circuit. *Int. J. Electron.*, **107**(10): 1588-1608.

Hürkamp A, Tanaka M, Kaliske M. 2015. Complex step derivative approximation of consistent tangent operators for viscoelasticity based on fractional calculus. *Comput. Mech.*, **56**: 1055-1071.

Hanna L A M, Al-Kandari M, Luchko Y. 2020. Operational method for solving fractional differential equations with the left- and right-hand sided Erdelyi-Kober fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **23**(1): 103-125.

Hassan M A, Amgad A, Galal O H. 2024. Deterministic and stochastic analysis of fractional-order Legendre filter with uncertain parameters. *Fractal Fract.*, **8**: 645.

Ji B H, Gao H J. 2004. Mechanical properties of nanostructure of biological materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **52**(9): 1963-1990.

Ji B H, Gao H J. 2004b. A study of fracture mechanisms in biological nano-composites via the virtual internal bond model. *Mater. Sci. Eng. A*, **366**: 96-103.

Jian Z, Guo J, Peng G, et al. 2023a. Fractal operators and fractional-order mechanics of bone. *Fractal Fract.*, **7**(9): 642.

Jian Z, Peng G, Li D, et al. 2023b. Correlation between convolution kernel function and error function of bone fractal operators. *Fractal Fract.*, **7**(10): 707.

Jian Z, Peng G, Luo C, et al. 2024a. Convolution kernel function and its invariance properties of bone fractal operators. *Fractal Fract.*, **8**(3): 151.

Jian Z, Luo C, Zhou T, et al. 2024b. Fractional-order correlation between special functions inspired by bone fractal operators. *Symmetry*, **16**(10): 1279.

Jian Z, Yin Y. 2024. Golden meta-spring inspired by bone fractal operators. *Symmetry*, **16**(12): 1653.

Jian Z, Luo C, Yin Y. 2025. Design and control of fractional-order systems based on fractal operators. *Fractal Fract.*, **9**(8): 528.

Jian Z, Li Z, Peng G, et al. 2026a. From biological fractal dynamics to analog fractional-order circuits: A system design framework based on operatorization thought. *Int. J. Mech. Syst. Dyn.*, **6**: 373-388.

Jian Z, Li H, Jiang Z, et al. 2026b. Fractional-order numerical approximation method based on filter series and its applications in computational mechanics. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **163**(9): 110902.

Jiang R, Zhou T, Yin Y. 2025. The application of abstract algebra in operational calculus. *Fractal Fract.*, **9**(5): 291.

Jiang Z, Jiang R, Jian Z, et al. 2026. Prony series expansion of fractional operators in viscoelastic fractal ladder models. *J. Mech. Phys. Solids*, **213**: 106636.

Klein F. 1893. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. *Math. Ann.*, **43**(1): 63-100.

Kaplan T, Liu S H. 1986. Inverse-Cantor-bar model for the AC response of a rough interface. *Phys. Rev. B*, **34**(7): 4870-4873.

Krishna B T. 2011. Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey. *Signal Process.*, **91**: 386-426.

Katsikadelis J T. 2019. Is Newton's law of motion really of integer differential form? *Arch. Appl. Mech.*, **89**:

639-647.

Kai Y, Dhulipala S, Sun R, et al. 2023. Dynamic diagnosis of metamaterials through laser-induced vibrational signatures. *Nature*, **623**: 514-521.

Luchko Y, Srivastava H M. 1995. The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus. *Comput. Math. Appl.*, **29**(8): 73-85.

Luchko Y, Gorenflo R. 1999. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives. *Acta Math. Vietnam.*, **24**: 207-233.

Liu S H. 1985. Fractal model for the AC response of a rough interface. *Phys. Rev. Lett.*, **55**(5): 529-532.

Lapidus M L, Pearse E P J. 2006. A tube formula for the Koch snowflake curve, with applications to complex dimensions. *J. London Math. Soc.*, **74**(2): 397-414.

Luchko Y. 2021. Operational calculus for the general fractional derivative and its applications. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **24**(2): 338-375.

Liu B, Zhang L X, Gao H J. 2006. Poisson ratio can play a crucial role in mechanical properties of biocomposites. *Mech. Mater.*, **38**: 1128-1142.

Lei H F, Zhang Z Q, Liu B. 2012. Effect of fiber arrangement on mechanical properties of short fiber reinforced composites. *Compos. Sci. Technol.*, **72**: 506-514.

Liu Z L, Zhou H W, Chen B C, et al. 2024a. Integrated NMR analysis for evaluating pore fracture structures and permeability in deep coals: A one-stop approach. *Energy Fuels*, **38**: 6854-6867.

Liu Z L, Yu X B, Xie S L, et al. 2024b. Fractional derivative model on physical fractal space: Improving rock permeability analysis. *Fractal Fract.*, **8**: 470.

Liu Z L, Yu X B, Yin Y J. 2024c. On the rigorous correspondence between operator fractional powers and fractional derivatives via the Sonine kernel. *Fractal Fract.*, **8**: 653.

Liu Z L, Yu X B, Zhang S, et al. 2025a. Modeling the creep behavior of coal in a physical fractal framework. *Mech. Time-Depend. Mater.*, **29**(1): 13.

Liu Z L, Yu X B, Yin Y J. 2025b. Quality revelation and operator-based method in viscoelastic problems. *Fractal Fract.*, **9**(5): 274.

Luo C, Yin Y, Peng G, et al. 2024. Self-convolution and its invariant properties for the kernel function of the aortic fractal operator. *Fractal Fract.*, **8**(12): 726.

Mandelbrot B. 1977. Fractals: Form, chance and dimension. San Francisco: Freeman.

Mandelbrot B. 1982. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company.

Mandelbrot B. 1967. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, **156**(3775): 636-638.

Mikusiński J. 1983. Operational calculus. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press.

Machado J A T, Kiryakova V, Mainardi F. 2011. Recent history of fractional calculus. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **16**(3): 1140-1153.

Machado J A T, Kiryakova V. 2017. The chronicles of fractional calculus. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20**(2): 307-336.

Mainardi F. 2010. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models. London: World Scientific.

Müller S, Kästner M, Brummund J, et al. 2013. On the numerical handling of fractional viscoelastic material models in a FE analysis. *Comput. Mech.*, **51**: 999-1012.

Obembe A D, Hossain M E, Abu-Khamsin S A. 2017. Variable-order derivative time fractional diffusion model for heterogeneous porous media. *J. Pet. Sci. Eng.*, **152**: 391-405.

Pedersen S, Phillips J D. 2014. On intersections of Cantor sets: Self-similarity. *Commun. Math. Anal.*, **16**(1): 1-30.

Peng G, Guo J Q, Yin Y J. 2021. Self-similar functional circuit models of arteries and deterministic fractal operators: Theoretical revelation for biomimetic materials. *Int. J. Mol. Sci.*, **22**: 12897.

Parisis K, Dimosthenis V, Kouris L, et al. 2022. A note on gradient/fractional one-dimensional elasticity and viscoelasticity. *Fractal Fract.*, **6**(2): 84.

Podlubny I. 1999. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press.

Podlubny I, Petráš I, Vinagre B M, et al. 2002. Analogue realizations of fractional-order controllers. *Nonlinear Dyn.*, **29**: 281-296.

Podlubny I, Magin R L, Trymorsuh I. 2017. Niels henrik abel and the birth of fractional calculus. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20**: 1068-1075.

Patiño-Ortiz M, Patiño-Ortiz J, Martínez-Cruz MÁ,et al. 2024. Morphological features of mathematical and real-world fractals: A survey. *Fractal Fract.*, **8**(8): 440.

Rho J Y, Kuhn-Spearing L, Zioupos P. 1998. Mechanical properties and the hierarchical structure of bone. *Med. Eng. Phys.*, **20**(2): 92-102.

Ruiz G A, Felice C J. 2015. Electrochemical-fractal model versus Randles model: A discussion about diffusion process. *Int. J. Electrochem. Sci.*, **10**(10): 8484-8496.

Reznikov N, Bilton M, Stevens M M, et al. 2018. Fractal-like hierarchical organization of bone begins at the nanoscale. *Science*, **360**(6388): eaao2189.

Rani N, Fernandez A. 2022. An operational calculus formulation of fractional calculus with general analytic kernels. *Electron. Res. Arch.*, **30**(12): 4238-4255.

Robert K B, Karen L, Enrico C, et al. 2023. Brassinosteroid coordinates cell layer interactions in plants via cell wall and tissue mechanics. *Science*, **380**: 1275-1281.

Rak R, Rak E. 2023. Multifractality of complex networks is also due to geometry: A geometric sandbox algorithm. *Entropy*, **25**(9): 1324.

Reddy A S, Reddy G N. 2024. Novel applications of Oustaloup recursive approximation and modified Oustaloup recursive approximation methods in linear fractional order control design. *Int. J. Dynam. Control*, **12**: 2236-2246.

Stupp S I, Braun P V. 1997. Molecular manipulation of microstructures: Biomaterials, ceramics, and semiconductors. *Science*, **277**(5330): 1242-1248.

Schiessel H, Blumen A. 1993. Hierarchical analogues to fractional relaxation equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**: 5057-5069.

Shao Y, Zhao H P, Feng X Q, et al. 2012. Discontinuous crack-bridging model for fracture toughness analysis of nacre. *J. Mech. Phys. Solids*, **60**(8): 1400-1419.

Sumelka W, Luczak B, Gajewski T, et al. 2020. Modelling of AAA in the framework of time-fractional damage hyperelasticity. *Int. J. Solids Struct.*, **206**: 30-42.

Sen F, Kircay A. 2025. Realization of fractional-order current-mode multifunction filter based on MCFOA for low-frequency applications. *Fractal Fract.*, **9**: 377.

Sotomayor-del-Moral J A, Pascual-Francisco J B, Susarrey-Huerta O, et al. 2026. Fractal metamaterial beams: Tuning dynamic stiffness and vibration attenuation. *Fractal Fract.*, **10**(7): 435.

Trinks C, Ruge P. 2002. Treatment of dynamic systems with fractional derivatives without evaluating memory-integrals. *Comput. Mech.*, **29**: 471-476.

Tenreiro Machado J A, Costa A C, Quelhas M D. 2011. Fractional dynamics in DNA. *Commun. Nonlinear*

Sci. Numer. Simul., **16**(8): 2963-2969.

Tenreiro Machado J A. 2011. And I say to myself: "What a fractional world!" fract. *Calc. Appl. Anal.*, **14**(4): 635.

Tian H, Zhao M, Liu J, et al. 2024. Dynamic analysis and sliding mode synchronization control of chaotic systems with conditional symmetric fractional-order memristors. *Fractal Fract.*, **8**: 307.

Vinagre B M, Podlubny I, Hernandez A, et al. 2000. Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **3**: 231-248.

Vincent J F V. 2012. Structural biomaterials. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Wegst U G K, Ashby M F. 2004. The mechanical efficiency of natural materials. *Philos. Mag.*, **84**(21): 2167-2181.

Werner G. 2010. Fractals in the nervous system: Conceptual implications for theoretical neuroscience. *Front. Physiol.*, **1**: 15.

Vulpiani A. 2016. Irregular functions and fractal objects: From weierstrass to mandelbrot. *Lett. Math. Phys.*, **4**: 115-123.

Wei Q, Zhou H W, Yang S. 2020. Non-Darcy flow models in porous media via Atangana-Baleanu derivative. *Chaos Solitons Fractals*, **141**: 110335.

Wang H, Zahl J. 2025a. The Assouad dimension of Kakeya sets in R^3. *Invent. Math.*, **241**: 153-206.

Wang H, Zahl J. 2025b. Volume estimates for unions of convex sets, and the Kakeya set conjecture in three dimensions. arXiv: 2502.17655.

Yin Y, Yang F, Li Y, et al. 2009. Fractal geometry and topology abstracted from hair fibers. *Appl. Math. Mech.*, **30**(8): 983-990.

Yin Y, Li Y, Yang F, et al. 2010a. Multiple-cell elements and regular multifractals. *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, **31**: 55-65.

Yin Y, Yang F, Fan Q. 2010b. Growth kinematics of fractal super snowflakes. *Chin. Sci. Bull.*, **55**(7): 573-580.

Yin Y, Peng G, Yu X. 2022a. Algebraic equations and non-integer orders of fractal operators abstracted from biomechanics. *Acta Mech. Sin.*, **38**(5): 521488.

Yin Y, Guo J, Peng G, et al. 2022b. Fractal operators and fractional dynamics with 1/2 order in biological systems. *Fractal Fract.*, **6**(7): 378.

Yin Y, Zhou T, Jiang R, et al. 2025a. The fractional-order effect induced by space-time order mismatch in operator differential equations. *Symmetry*, **17**(5): 762.

Yin Y, Zhou T, Jiang R, et al. 2025b. The formal invariance of fractal operators under Laplace transform. *Fractal Fract.*, **9**(12): 787.

Yin Y, Jiang R, Jiang Z, et al. 2026. Formal invariance of fractional-order operators under Fourier transform. *Theor. Appl. Mech. Lett.*, **16**: 100707.

Yang F, Yin Y, He B, et al. 2015. Fractal growth kinematics abstracted from snowflakes: Topological evolution. *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, **36**: 243-264.

Yu T L. 2025. An analytic proof of multivariate Polya-Carlson theorem. *Acta Math. Sin. -English Ser.*, **41**: 2707-2712.

Yousefsani S A, Shamloo A, Farahmand F. 2020. Nonlinear mechanics of soft composites: Hyperelastic characterization of white matter tissue components. *Biomech. Model. Mechanobiol.*, **19**: 1143-1153.

Zhang Z Q, Liu B, Huang Y, et al. 2010. Mechanical properties of unidirectional nanocomposites with non-uniformly or randomly staggered platelet distribution. *J. Mech. Phys. Solids*, **58**: 1646-1660.

Zhou H W, Yi H Y, Mishnaevsky Jr L, et al. 2017. Deformation analysis of polymers composites: Rheological model involving time-based fractional derivative. *Mech. Time-Depend. Mater.*, **21**(2): 151-161.

Zhao T L, Zou G G, Peng S P, et al. 2023. Analysis of the viscoelasticity in coal based on the fractal theory. *Geophysics*, **88**(1): WA177-WA187.

Zhou Y, Ionescu C, Tenreiro Machado J A. 2015. Fractional dynamics and its applications. *Nonlinear Dyn.*, **80**(4): 1661-1664.

Zhou T, Yin Y, Peng G, et al. 2024. Fractal operators abstracted from arterial blood flow. *Fractal Fract.*, **8**(7): 420.

From geometric fractals to physical fractals: Concepts, models, and methods of fractional-order mechanics

JIAN Zhimo [1] WANG Bing [1] LI Qunyang [2] JIANG Zhizhen [2] ZHOU Tianyi [2]
JIANG Ruiheng [3] XIN Jianqiang [1,*] YIN Yajun [2,†]

[1] Institute for Aero Engine, Tsinghua University, Beijing, 100084, China
[2] Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China
[3] School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract Since the era of Newton and Leibniz, the concept of the material element in continuum mechanics has played a fundamental role. When the research perspective expands from traditional engineering materials to living organisms, the classic concept of the material element faces new challenges due to the multi-scale and multi-level characteristics of living organisms. This article focuses on the intersection of fractals and fractional calculus, analyzes the abstraction process of fractal snowflakes and physical fractal spaces from biological multi-level structures, and reviews the exploration process of fractional-order mechanics. This article starts from two classic problems, namely the "Mandelbrot Question" and the "L'Hospital Question", and presents the following exploration paths: (a) from geometric fractals to physical fractals, (b) from kinematics to dynamics, and (c) from fractal dimension to fractional order. The specific content includes: (a) fractal snowflakes abstracted from living organisms and their growth kinematics, (b) fractional-order operators abstracted from living organisms and their theoretical construction; (c) applications of fractional-order operator theory. On this basis, this article delineates the evolutionary trajectory of the material element concept: from the classical element, the representative volume element (RVE), the lattice unit cell, and the mechanical metamaterial unit cell to the fractal cell, and discusses the multiple origins of fractional orders and the spatiotemporal correlation between fractals and fractional calculus. This article concludes that mechanics in the physical fractal spaces exhibits features that are non-integer-order, non-rational, non-elementary, and non-local, offering novel perspectives for broadening the boundaries of mechanics.

Keywords material element, fractal snowflake, physical fractal spaces, fractional calculus, fractional-order operator theory

Received: 28 August 2026; accepted: 8 October 2026; online: 11 November 2026

* E-mail: xinjq@tsinghua.edu.cn

† E-mail: yinyj@tsinghua.edu.cn

© 2026 *Advances in Mechanics*.



殷雅俊, 男, 清华大学航天航空学院工程力学系教授, 博士生导师. 1985 年毕业于清华大学水电系, 获学士学位. 1987 年于清华大学工程力学系获硕士学位, 同年留校任教. 1995 年获日本政府奖学金, 赴日留学, 1998 年于日本广岛大学获博士学位. 1993 ~ 1994 年获荷兰政府资助, 作为 Research Fellow 在 Delft 大学从事合作研究. 2000 ~ 2001 年受 Japan Key Technology Center 的邀请, 作为海外研究员在 IHI (日本石川岛播磨重工业公司) 基础技术研究所从事合作研究工作. 先后获得国家级教学优秀成果一等奖和二等奖. 2011 年获得北京市教学名师奖. 2016 年获得清华大学新百年教学成就奖. 近 20 年来主攻以下研究方向并取得进展: (1) 生物微纳米力学与几何; (2) 生物分形几何与力学; (3) 昆虫仿生力学; (4) 张量分析与理性力学的公理化.



辛健强, 男, 清华大学航发院研究员, 博士生导师. 长期从事复合材料力学、高超声速热防护、结构强度、振动等方向的研究工作, 建立了某类飞行器热防护系统仿真与试验评价体系. 在 *AIAA Journal*, *Thin-walled structures*, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 等期刊发表论文六十余篇, 授权专利四十余项.