力学分析中的对称性与守恒律分析方法研究进展

邱志平，邱 宇，张培宣

A review of research advances in analytical methods for symmetry and conservation laws in mechanical analysis

QIU Zhiping, QIU Yu, and ZHANG Peixuan

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/1000-0992-24-033

研究综述

力学分析中的对称性与守恒律分析方法研究进展

邱志平 [1,*]　邱　宇 [1,2]　张培宣 [1,2]

[1] 北京航空航天大学, 航空科学与工程学院, 北京 100191
[2] 北京航空航天大学, 沈元学院, 北京 100191

摘　要　本文综述了力学分析中对称性与守恒律的研究进展. 首先, 介绍了连续系统中的 Lie 群对称性, 包括微分方程和偏微分方程的 Lie 群对称性、泛函的 Lie 群对称性及其守恒律, 以及扰动微分方程的近似 Lie 对称性, 并通过实例分析了这些对称性在实际中的应用. 接着, 探讨了离散系统的对称性与守恒律, 重点介绍了离散系统的动力学方程、Noether 对称性、Lie 对称性及 Mei 对称性, 并结合具体应用实例进行了说明. 最后, 综述了随机系统中的对称性与守恒律, 讨论了 Ito 型和 Stratonovich 型随机微分方程的对称性, 特别是在统计意义下对随机微分方程对称性的理解. 本文旨在为后续研究提供理论参考, 推动相关领域的进一步发展.

关键词　对称性, 守恒律, 连续系统, 离散系统, 随机系统

中图分类号:　　**文献标识码**: A

DOI: 10.6052/1000-0992-24-033　　CSTR: 32046.14.1000-0992-24-033

收稿日期: 2024-10-08; 录用日期: 2024-12-17; 在线出版日期: 2024-12-22

* E-mail: zpqiu@buaa.edu.cn

引用方式: 邱志平, 邱宇, 张培宣. 力学分析中的对称性与守恒律分析方法研究进展. 力学进展, 待出版

Qiu Z P, Qiu Y, Zhang P X. A review of research advances in analytical methods for symmetry and conservation laws in mechanical analysis. *Advances in Mechanics*, in press

1 引 言

自然界中的运动呈现千姿百态, 然而, 所有这些变化都在某种程度上展现出各种各样的对称性, 同时通过这些对称性来反映运动的独特特征. 对称性在观察和理解自然过程中形成, 最初源自几何学中的概念, 指的是某种不随时间或空间变化而改变的性质. 在实际应用中, 人们对某一物理规律的理解往往以对其中包含的对称性为先导, 而对这些对称性的认知在进一步理解物理规律方面发挥着关键作用. 在力学中, 对称性是指力学系统在某种变换下保持不变的性质. 从基本原理的基本表述到具体应用 (例如牛顿运动方程的伽利略变换不变性), 对称性在力学中发挥着重要作用. 可以说, 对称性与力学自创立之时起就有着密切的关系. 而时至今日, 对称性一直持续发挥着强大的作用, 特别是随着近代 Kolmogorov、Arnold、Moser 等人的工作.

守恒定律或守恒量的思想起源于力学和物理学, 它是自然界的基本定律. 由于各种物理理论通常表示为微分方程系统, 因此我们可以对这些系统进行物理守恒定律的解释. 在力学中, 守恒律指的是孤立系统中某个可测量的属性, 在特定变量变化时保持不变. 以质点系为例, 能量守恒表明系统的总能量在时间变化时不发生变化, 而动量守恒则表明系统的总动量不受质点空间位置的影响. 守恒律有多种分类, 包括整体守恒律、局部守恒律, 以及确定守恒律和近似守恒律. 以质量守恒为例, 在经典力学中它是一种“确定”守恒律, 可以在数学上“整体”表示为总质量 (密度函数的积分) 不变, 也可以在“局部”表示为偏微分方程组 (连续性方程). 而在量子力学中, 质量守恒则是一种“近似”守恒律.

对称性和守恒律有着广泛且深入的联系. Noether 指出, 物理系统的每一个对称性都有相对应的守恒律. 也就是说, 物理系统所包含的对称性代表了这个系统存在相应的物理量守恒, 这是 Noether 定理的主要内容. 常见的例子有, 空间位移的对称性对应动量守恒, 时间平移的对称性对应着能量守恒, 空间旋转的对称性对应着角动量守恒等.

对称性和守恒量方法是力学系统方程求解的一种简单而重要的方法, 因为其解法简单又能揭示系统本质属性而被众多科学家认可. 对称性与守恒量理论发展的一个重要节点是 Noether 对称性的建立. 1918 年德国数学家 Noether 发表 Noether 对称性原理 (Noether 1918), 它表明作用量的每一种连续对称性都有一个守恒量与之对应. 二十世纪八十年代, Lutzky 提出运动微分方程在无限小变换下 (坐标和时间变换) 的不变性, 即 Lie 对称性 (Lutzky 1978a). Lie 对称性理论的建立基础是 Sophus Lie(Lie 1880) 的微分方程的不变性扩展群方法. Lutzky 将这种不变性方法应用到力学领域, 并指出一定条件下 Lie 对称性理论可以直接导出守恒量 (Lutzky 1979, 1978b). 在这些理论的基础上, 梅凤翔在 2000 年提出一种新的对称性概念: 形式不变性, 也称 Mei 对称性 (Mei 2000). Mei 对称性是基于运动微分方程中的函数在无限小变换下仍然满足原方程的一种不变性质. 这种新的对称性之所以迅速受到学术界的关注是因为 Mei 对称性不仅给出了系统满足 Mei 对称性的判据方程, 而且通过 Mei 对称性定理可以直接构造一个新形式的守恒量, 这为探求力学系统的守恒量提供了一条新的途径.

动力学系统的 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性与其对应的 Noether 守恒量、Hojman 守恒量、Mei 守恒量的关系可以表示如**图 1** 所示. 其中, A_{N} 是 Noether 对称性的条件, 即

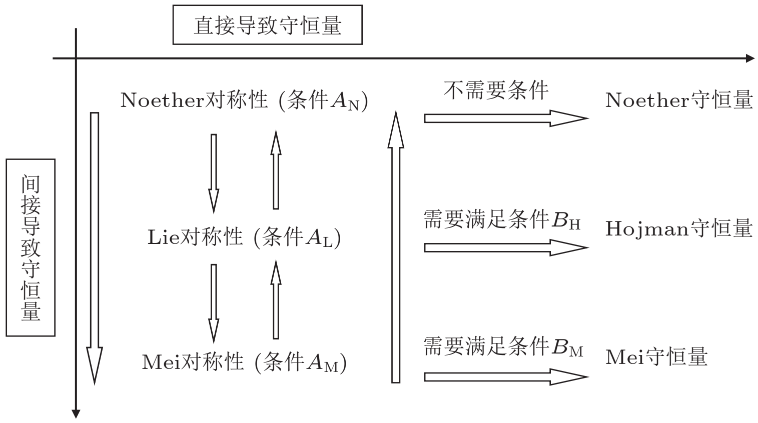

图 1

连续对称性和守恒律的关系 (夏丽莉和陈立群 2015)

Noether 等式; A_L 是 Lie 对称性的条件, 即 Lie 对称性的确定方程; A_M 是 Mei 对称性的条件, 即 Mei 对称性的确定方程; B_H 是 Hojman 守恒量存在的条件; B_M 是 Mei 守恒量存在的条件.

对称性和守恒律之间的关系还有待于进一步研究. 人们对力学系统的对称性及其导致的守恒量已进行了大量的研究, 但在以往的研究中, 人们只局限于研究单一的对称性及其守恒量. 统一对称性是集 Noether 对称性、Lie 对称性、形式不变性于一体的一种新的对称性. 它是更高级的对称性, 对完善对称性理论有非常重要的意义. 梅凤翔 (2001) 用 N 表示 Noether 对称性, L 表示 Lie 对称性, F 表示形式不变性, NLF 表示三种对称性共存, NL、NF、LF 表示两种不变性共存, 用 N、L、F 表示只有一种不变性, 给出了三个交叉圆圈表示三种不变性关系. 并给出结论: 对于一个力学系统的生成元, 可有三种对称性 NLF; 两种对称性 NL, NF, LF; 一种对称性 N, L, F; 也可以没有这三种之一.

本文对对称性与守恒律的重要进展及其在力学中的关键应用进行综述, 文章主体分为以下三个部分: (1) 连续系统的对称性与守恒律; (2) 离散系统的对称性与守恒律; (3) 随机系统的对称性与守恒律. 最后对目前的现状进行了总结和展望.

2 连续系统的 Lie 群对称和守恒律

2.1 微分方程的 Lie 群对称

Lie 群是非常完备的理论体系, 是求解微分方程的系统方法. 其核心思想是从方程的一个解出发, 通过变换群的作用, 得到一系列满足原方程的解 (Shapovalov & Shirokov 1992). 该方法的核心是不变性, 不变就是对称, 所以也称为 Lie 群对称方法. 相较于常规解法, Lie 群为求解微分方程提供了一种较普遍的方法, 即不再需要特别的变换技巧 (Andriopoulos et al. 2001). Lie 群不仅可以用来求解而且可以用来分析微分方程的性质, 这对于有些目前还不能求解的方程来说是非常重要的分析手段. Lie 群或 Lie 群对称方法当初就是为了整理大量的各种求解微分方程的技巧而总结出来的. 大量的实践表明, 群理论是求解非线性微分方程解析解的通用和有效的方法

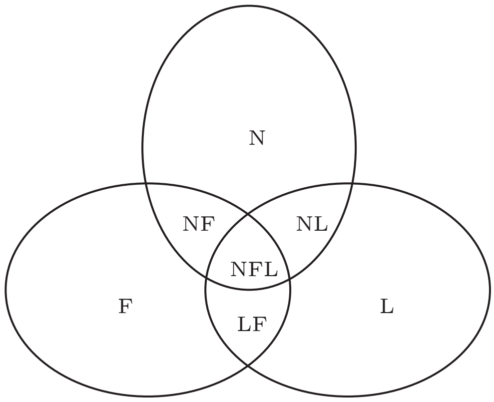

图 2

三种对称性的关系 (梅凤翔 2001).

(冯录祥 2012). 当其他的一些积分方法失效时, 群理论是求解微分方程的可选择的工具 (张学元 1993).

考虑 n 阶的微分方程

$$F\left[x, y, \cdots, y^{(n)}\right]=y^{(n)}-\omega\left[x, y, \cdots, y^{(n-1)}\right] \tag{1}$$

其中, $y^{(n)} \equiv \mathrm{d}^n / \mathrm{d} x^n$, 并设 ω 是局部处处光滑的函数. 以及一个 n 次的 Lie 群变换

$$T^{(n)}:\left[x, y, \cdots, y^{(n)}\right] \mapsto\left[\hat{x}, \hat{y}, \cdots, \hat{y}^{(n)}\right] \tag{2}$$

式 (1) 对称的充分必要条件是其无穷小生成元的 n 次延拓作用到方程后为零, 即当 $y^n=\omega[x, y, \cdots, y^{n-1}]$ 时

$$X^{(n)}\left\{y^{(n)}-\omega\left[x, y, \cdots, y^{(n-1)}\right]\right\}=0 \tag{3}$$

对于给定的 ω, 通过式 (3) 就可以计算出给定方程的对称性, 故式 (3) 称为 Lie 群对称性决定方程.

19 世纪末, 挪威数学家 Sophus Lie 在研究求解常微分方程 (组) 的算法过程中发展某些常微分方程 (组) 的解对一些连续变换群是不变的 (Olver 1986a). 在 Abel 和 Galois 处理代数方程组思想的影响下, Lie 提出了连续群的概念, 即 Lie 对称群. Lie 指出, 在应用 Lie 群理论约化微分方程时, 微分方程在单参数 Lie 群变换下保持不变时, 可将原方程降阶 (Walcher 2023). 将式 (1) 中的阶数 n 取为 1

$$F\left(x, y, y^{\prime}\right)=y^{\prime}-\omega(x, y)=0 \tag{4}$$

给定无穷小生成元

$$X=\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{5}$$

对应的 k 阶无穷小生成元的一次延拓展开式为

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= X + \eta_1 \partial_{y'} = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta_1 \partial_{y'} \\ &= \xi \partial_x + \eta \partial_y + \left[\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - (y')^2 \xi_y \right] \partial_{y'} \end{aligned} \tag{6}$$

根据式 (3), 可得一阶微分方程的对称性决定方程

$$\begin{aligned} X^{(1)} F(x, y, y') &= X^{(1)} [y' - \omega(x, y)] \\ &= (\xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta_1 \partial_{y'}) [y' - \omega(x, y)] \\ &= \left\{ \xi \partial_x + \eta \partial_y + \left[\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - (y')^2 \xi_y \right] \partial_{y'} \right\} [y' - \omega(x, y)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

因为式 (7) 和原方程具有对称性质, 所以通过求解上述降维方程即可得到原方程的解. 通过对 Lie 群分析方法的生成元中变量个数进行扩展, 可以将其应用于高维的常微分方程组. Vgorringe 推导了线性自治常微分方程组的 Lie 对称性决定方程. 对二维系统的结果进行了详细处理, 并将得到结果扩展到更高维系统 (Olver 1986b).

考虑常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^n} = \frac{X^i(x)}{X^n(x)} (i = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{8}$$

给出对应的无穷小生成元

$$V = \sum_{n}^{i=1} V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{9}$$

按照寻常 Lie 群分析流程, 将通过证明

$$V^{(1)} \left(\frac{\mathrm{d}x^k(x)}{\mathrm{d}x^n(x)} - P^k \right) = 0 (k = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{10}$$

说明无穷小生成元 V 的有效性. 另外, 刘胜等人提出了一种适用于常微分方程组的新的无穷小生成元判定条件 (薛崇政和胡彦霞 2013)

$$\left[\ V_0, V \ \right] = B(x) V_0 \tag{11}$$

根据 Lie 群方法的普适性, 针对研究了特定复杂常微分方程的降阶与求解方法. Gazizov 等将微分方程的 Lie 对称分析扩展到分数阶常微分方程中. Sethukumarasamy 在已有的对称性研究基础上, 给出了适用于分数阶导数的 Lie 群, 并根据 Riemann-Liouville (R-L) 分数阶导数的定义与性质

$${}_aD_t^\alpha x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \displaystyle\int_t^a (t-\xi)^{n-\alpha-1} x(\xi) \mathrm{d}\xi & \text{if } \alpha \in (n-1, n), n \in \mathbb{N} \\ x^{(n)}(t) & \text{if } \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{12}$$

构建了分数阶导数在 Lie 群下的无穷小变换 (孙博华 2016).

$${}_aD_t^{\alpha+k} \overline{x} \mapsto {}_aD_t^{\alpha+k} x + \epsilon \zeta^{(\alpha+k)} + O(\epsilon^2) \quad k \in \mathbb{N} \tag{13}$$

然后将上述 Lie 群应用于分数阶 Thomas-Fermi 方程找到了该方程的具体解. Emrullah 等也将 Lie 群变换应用于 7 阶 Bagley-Torvik 方程以及含有时间分数阶导数的 Sawada–Kotera–Ito 方

程的求解. 这些例子均说明了 Lie 群方法在常微分方程求解方面具有独特优势, 其寻找的方程对称解的基本思想为寻找复杂方程的精确解提供了一种普适可行的新思路.

Lie 群方法的最大优点在于, 在可解的情况下, 群分析理论在处理线性方程和非线性方程的问题时是等同的. Lie 群对称性分析的方法将许多构建微分方程解析解的技巧进行了系统化和扩展 (Mahomed 2007).

2.2 偏微分方程的 Lie 群对称

在偏微分方程领域, Lie 对称性常被用于求解偏微分方程的对称群, 并借助对称群得到方程的完全解或者简化方程的求解过程 (Hydon 2000). 针对常微分方程的结果, 其方程中只有一个自变量 x 对应一个因变量 y, 通过把相应的结果推广到有一个因变量 y 和两个自变量 x,t 的情况, 这样就可以用于偏微分方程的求解 (张锦 等 2007).

设有两个自变量变换 x,t 和一个因变量 y, 有 Lie 群变换

$$(x,t,y)\mapsto(\widehat{x},\widehat{t},\widehat{y}) \tag{14}$$

其无穷小生成元

$$X=\xi\partial_x+\tau\partial_t+\eta\partial_y \tag{15}$$

同样的, $(\hat{x},\hat{t},\hat{y})$ 可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}\epsilon}=\xi(\widehat{x},\widehat{t},\widehat{y})\quad\frac{\mathrm{d}\widehat{t}}{\mathrm{d}\epsilon}=\tau(\widehat{x},\widehat{t},\widehat{y})\quad\frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}\epsilon}=\eta(\widehat{x},\widehat{t},\widehat{y}) \tag{16}$$

全导数把变量 y 及其导数都看作相互独立的变量. 这样就有无穷小生成元的第一次延拓

$$X^{(1)}=X+\eta^x\partial_{y_x}+\eta^t\partial_{y_t}=\xi\partial_x+\tau\partial_t+\eta\partial_y+\eta^x\partial_{y_x}+\eta^t\partial_{y_t} \tag{17}$$

此时其 Lie 群对称性可以表示为

$$X^{(1)}F\left(x,t,y,y_x,y_t\right)\Big|_{F=0}=0 \tag{18}$$

对于高阶偏微分方程 $F(x,t,y,y_x,y_t,y_{xx},y_{xt},y_{tt}\ldots)=0$, 其 Lie 对称性就可用高次延拓进行表示 (刘胜和雷锦志 1998).

在 20 世纪 50 年代, Lie 对称群理论在非线性偏微分方程中的应用得到了较大的发展 (Márquez et al. 2022). 例如, Birkhoff 和 Morgan 阐述了对称群降低方程维数的方法, Ovsiannikov 得到了保持方程不变的无穷小变换法, 与此同时给出了微分方程的单参数无穷小变换群、群不变解等. Ovsiannikov 的无穷小变换方法在 KdV 方程, 非线性波方程等方面都有广泛的运用 (Liu & Chang 2016). 20 世纪 60 年代, Bluman 和 Cole 在经典 Lie 对称分析方法的基础上推导出了非经典的 Lie 对称分析方法, 进一步完善了 Lie 对称群理论和应用 (Donato & Oliveri 1994). 此后, Lie 群理论在不断地发展与完善.

利用 Lie 群理论对以下变系数偏微分方程展开研究

$$u_t+\alpha(t)u^pu_x+\beta u_{xxxx}=0 \tag{19}$$

其中, $u=u(x,t)$ 为未知函数, $\alpha=\alpha(t)$ 为 t 的函数, β 为任意非零常数, $p=1,2,3,\ldots$. 为了得到方

程式 (19) 的不变量, 先求得不变群的生成元, 即向量场

$$V=\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{20}$$

其延拓为

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}^{(4)}V=V+\phi'\frac{\partial}{\partial t}+\phi^{x}\frac{\partial}{\partial x}+\phi^{xxx}\frac{\partial}{\partial xxxx}\\ \Delta=u_t+\alpha(t)u^p u_x+\beta u_{xxx}\end{gathered} \tag{21}$$

那么式 (18) 成立的充要条件为

$$\phi^t+\alpha'(t)\tau u^p u_x+p\alpha(t)u^{p-1}u_x\phi+\alpha(t)u^p\phi^x+\beta\phi^{xxxx}=0 \tag{22}$$

将以上函数代入充要条件中, 由对称条件 (18), 得到关于 $\xi(x,t,u)$ 、 $\tau(x,t,u)$ 和 $\phi(x,t,u)$ 的以下方程组

$$\begin{gathered}u_{xx}^2:\phi_{uu}=0\\ u_{xxxx}:\tau_x=0\\ \vdots\\ u^p u_x:p\alpha(t)C_4+[4t\alpha'(t)+3\alpha(t)]C_1+\alpha'(t)C_2=0\end{gathered} \tag{23}$$

根据 $\alpha(t)$ 的不同取法分类讨论式 (23), 即可得到变系数四阶偏微分方程的所有生成元.

最近以来, 由于计算机的普及和符号运算的初步应用, 通过递归关系计算高阶延拓的难度大大降低, 对称群在偏微分方程中的应用进入了快速发展阶段, 得到了大量数学物理方程的对称性 (邱志平和姜南 2022).

近年来, 研究人员开始应用 Lie 对称群求解分数阶非线性偏微分方程. 1998 年, Buckwarand 和 Luchko 得到了 Riemann-Liouvile 分数阶定义下时间分数阶扩散方程的不变性 (Buckwar & Luchko 1998). 2009 年, Gazizov 等根据分数阶定义, 得出了时间分数阶扩散方程的对称性质. 其文献中系统地讨论了在修正的 Riemann-Liouvile 分数阶定义

$$\partial_t^\alpha u=\begin{cases}\dfrac{\partial^n u}{\partial t^n} & 当\alpha=n\\ \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}u(t,s)\mathrm{d}s & 当0<n-1<\alpha<n\end{cases} \tag{24}$$

通过假设时间分数阶偏微分方程的一般形式为 $\partial_t^\alpha u=F(t,x,u_x,u_{xx}\cdots).$, 其对应的无穷小生成元为

$$\begin{gathered}V=\tau\partial_t+\xi\partial_x+\eta\partial_u\\ \tau=\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}\epsilon}|_{\epsilon=0}\quad \xi=\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\epsilon}|_{\epsilon=0}\quad \eta=\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}\epsilon}|_{\epsilon=0}\end{gathered} \tag{25}$$

然后, 将已有的 Lie 群对称性理论应用到分数阶微分方程方面, 即可得到原方程的对称性决定方程. 最终, 通过求解对称性决定方程得到原方程的相似解.

2.3 泛函的 Lie 群对称性和守恒律

泛函就是函数的函数. 函数的微小变化称为函数的变分, 对应的泛函也会有一个微小变化即泛函的变分. 通常, 当泛函的变分为零时即得泛函对应的极值. 研究发现, 通过将 Lie 对称性的基

本思想应用于泛函可以实现对应变分方程的降阶以及新守恒量的导出. 泛函中应用对称性的基本思想是要求泛函在变量发生无穷小变换时泛函本身不变 (张晓莉和赵小山 2011).

给定微分函数 $F=F\left(x,y,y'\right)$, 对应的泛函为

$$W=\int F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x \tag{26}$$

对应泛函的最小系统状态要求作用量泛函 W 的变分

$$\delta W=0 \tag{27}$$

由此得对应的方程为 $W=\int F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \tag{28}$$

给定 Lie 群无穷小变换

$$\left(x,y,y'\right)\mapsto\left(\hat{x},\hat{y},\hat{y}'\right) \tag{29}$$

泛函的 Lie 群对称性要求变化后的泛函 $\widehat{W}(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{y}')$ 不变, 即

$$\widehat{W}\left(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{y}'\right)=W\left(x,y,y'\right) \tag{30}$$

利用无穷小生成元 $X=\xi\partial_x+\eta\partial_y$, 微分函数 $F(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{y}')$ 可以展开为一次延拓此时变化后的泛函为

$$\begin{aligned}\widehat{W}\left(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{y}'\right)&=\int\left[F\left(x,y,y'\right)+\epsilon X^{(1)}F+O\left(\epsilon^2\right)\right]\left[\mathrm{d}x+\epsilon D\xi\mathrm{d}x+O\left(\epsilon^2\right)\right]\\&=W\left(x,y,y'\right)+\epsilon D\xi F+\epsilon X^{(1)}F+O\left(\epsilon^2\right)\end{aligned} \tag{31}$$

根据 Lie 群对称性条件, 有 Lie 群对称性 (不变性) 条件

$$X^{(1)}F+D\xi F=0 \tag{32}$$

其中, $X^{(1)}$ 为无穷小生成元的一次延拓其具体表达式为 $X^{(1)}=X+\eta_1\frac{\partial}{\partial y'}=\xi\partial_x+\eta\partial_y+\eta_1\partial_{y'}$.

通过 Lie 群对称性, 可以简化 Lagrange 和 Hamilton 方程的求解过程. 例如, 在动力系统中, 若系统的拉格朗日函数 F 在某些 Lie 群变换下不变, 可以利用这些对称性降低方程阶数, 从而简化求解过程.

对于高阶泛函问题, Lagrange 函数 $F=F[x,y,y',y'',...,y^{(p)}]$, 相应的作用量泛函为

$$W=\int F\left[x,y,y',y'',\cdots,y^{(p)}\right]\mathrm{d}x \tag{33}$$

变分后, 其 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^p\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]=0 \tag{34}$$

推导可得此时 Lie 群对称性条件为当 $W_1\left[\widehat{x},\widehat{y},\widehat{y}',\cdots,\widehat{y}^{(p)}\right]=W\left[x,y,y',y'',\cdots,y^{(p)}\right]$ 时,

$$X^{(p)}F+[D_{(p)}\xi]F=0 \tag{35}$$

从上面的推导可以看出, 一旦一个微分方程可以转换成一个泛函的变分, 就意味着微分方程可以降低两阶, 而有 Lie 群对称性的方程只能降低一阶.

另外, Lie 对称性在泛函中的应用还可以导出 Euler-Lagrange 函数对应的守恒律. 给定高阶动力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = L(x, y, y_1, y_2, \cdots, y_p) \tag{36}$$

高阶动力学系统的泛函为

$$S = \int_V L(x, y, y_1, y_2, \cdots, y_p)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n \tag{37}$$

对于物理系统大多数情况下 $p = 2$.

在 Lie 群变换下的泛函不变性 $S = \bar{S}$ 的充分必要条件为

$$\bar{S} - S = X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) = 0 \tag{38}$$

其中, $X_{[p]} = \xi^j\dfrac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i\dfrac{\partial}{\partial y^i} + \eta_{[j_1]}\dfrac{\partial}{\partial y^i_{j_1}} + \cdots + \eta^i_{[j_1j_2\cdots j_p]}\dfrac{\partial}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}$

引入 Euler 算子 E_i 和特征函数 Q^i 根据 $X_{[p]}$ 的表达式对 Lie 算子展开可导出

$$X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) = D_j(L\xi^j) + Q^iE_i(L) + Q^iF_i(L) + Q^iG_i(L) \tag{39}$$

其中, Euler 算子 E_i 和特征函数 Q^i 以及中间算子 F_i, G_i 分别为

$$\begin{aligned}
&E_i = \frac{\partial()}{\partial y^i} - D_{j_1}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1}} + D_{j_1j_2}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2}} - \cdots + \cdots + (-1)^pD_{j_1j_2\cdots j_p}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}\\
&Q^i = \eta^i - y^i_\alpha\xi^\alpha\\
&F_i = D_{j_1}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1}} - D_{j_1j_2}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2}} + \cdots + (-1)^{p-1}D_{j_1j_2\cdots j_p}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}\\
&G_i = D_{j_1}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1}} + D_{j_1j_2}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2}} + \cdots + D_{j_1j_2\cdots j_p}\frac{\partial()}{\partial y^i_{j_1j_2\cdots j_p}}
\end{aligned} \tag{40}$$

利用泛函积分的分部积分, 并重复分布积分的运算, 最终可以得到

$$X_{[p]}L + L(D_j\xi^j) = D_j(L\xi^j) + Q^iE_i(L) + D_{j_1}\theta^{j_1} \tag{41}$$

其中, θ^{j_1} 的具体形式较为复杂因此不在此处列出, 具体公式可以参考 (孙博华 2016). 将式 (41) 带回到泛函式 (37) 中可以得到

$$\overline{S} = S + \epsilon\int[Q^iE_i(L) + D_{j_1}(L\xi^{j_1} + \theta^{j_1})]\mathrm{d}V \tag{42}$$

根据 Lie 群对称性就要求积分函数等于 0, 即 $Q^iE_i(L) + D_{j_1}(L\xi^{j_1} + \theta^{j_1}) = 0$, 这就得到了 Noether 守恒律. 由此根据对称性以及新构造算子即可导出守恒律, Noether 首先应用泛函的对称性证明了对称性和守恒律之间的关系, 并由此导出 Noether 定理, 其表达了连续对称性和守恒定律的一一对应.

2.4 扰动微分方程的近似 Lie 对称性

偏微分方程 Lie 对称方法在数学、物理和工程领域中有着广泛的应用. 偏微分方程拥有的对称是其可积性的重要依据, 但对含小参数扰动微分方程, 经典 Lie 对称表现出不稳定性. 这是由微扰系统的可积性具有不稳定性引起的 (Bordag & Yamshchikov 2017). 为此, Baikov, Gazizov

和 Ibravoigv 等人给出扰动的近似 Lie 对称方法. 近似对称方法拓展了经典 Lie 对称理论的应用领域 (Bluman 1990). 用它可构造偏微分方程扰动近似不变解、近似守恒律, 并进行近似对称分类等. 对含参数扰动 PDE 进行对称分类是近似对称方法的重要应用之一. 用近似 Lie 算法, 对一类含参数 θ 的扰动偏微分方程, 确定参数 θ 及其对应近似对称叫做偏微分方程近似对称分类问题. 算法的核心是把确定对称分类问题转化为求解确定方程组的问题 (Oliveri 2010).

考虑 $\mathbb{R}^n$ 中包含 m 个方程和小参数 ε 的 r 阶扰动微分方程组

$$F_\alpha\left(x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(k)}, \varepsilon\right)=O\left(\varepsilon^{k+1}\right) \quad \alpha=1,2, \cdots, m \tag{43}$$

其中, $\boldsymbol{x}=\left(x^1, \cdots, x^n\right)$, $m<n$.

作用在空间 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 的自变量 $\boldsymbol{x}=\left(x^1, \cdots, x^n\right)$ 和因变量 $\boldsymbol{u}=\left(u^1, \cdots, u^m\right)$ 的单参数 Lie 变换群 G 为

$$\begin{aligned} & \bar{x}^i=\phi^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \varepsilon) \quad \left.\phi^i\right|_{\varepsilon=0}=x^i \\ & \bar{u}^\alpha=\psi^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \varepsilon) \quad \left.\psi^\alpha\right|_{\varepsilon=0}=u^\alpha \end{aligned} \tag{44}$$

相应无穷小生成元为

$$X=\xi^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{45}$$

单参数 Lie 变换群 G 的 k 阶延拓为

$$\begin{aligned} & \bar{x}^i=\phi^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \varepsilon) \quad \left.\phi^i\right|_{\varepsilon=0}=x^i \\ & \bar{u}^\alpha=\psi^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \varepsilon) \quad \left.\psi^\alpha\right|_{\varepsilon=0}=u^\alpha \\ & \bar{u}_i^\alpha=\varphi_i^\alpha\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{(1)}, \varepsilon\right) \quad \left.\varphi_i^\alpha\right|_{\varepsilon=0}=u_i^\alpha \\ & \bar{u}_{i_1 i_2}^\alpha=\varphi_{i_1 i_2}^\alpha\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{(1)}, \boldsymbol{u}_{(2)}, \varepsilon\right) \quad \left.\varphi_{i_1 i_2}^\alpha\right|_{\varepsilon=0}=u_{i_1 i_2}^\alpha \\ & \cdots \\ & \bar{u}_{i_1 i_2 \cdots i_k}^\alpha=\varphi_{i_1 i_2 \cdots i_k}^\alpha\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{(1)}, u_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{(k)}, \varepsilon\right) \quad \left.\varphi_{i_1 i_2 \cdots i_k}^\alpha\right|_{\varepsilon=0}=u_{i_1 i_2 \cdots i_k}^\alpha \end{aligned} \tag{46}$$

微分方程组式 (43) 在群 G 的无穷小生成元 X 下保持近似不变, 当且仅当

$$\left.X F_\alpha\right|_{F_\alpha\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}_{(s)}, \varepsilon\right)=0}=O\left(\varepsilon^{k+1}\right) \quad \alpha=1,2, \cdots, m \tag{47}$$

Fushchich 等人提出近似对称法. 该方法将因变量展开成关于小参数的扰动级数, 将因变量代入原方程, 提取原方程中关于小参数各个幂次的系数, 这样原方程就被分解为无穷多子方程, 然后利用对称方法进行约化. 这对了解解的性质, 分析方程的近似解有很大的帮助 (Winternitz 1993).

考虑将扰动微分方程组 $F(u, \epsilon)=0$ 的解 u 关于扰动参数 ϵ 进行级数展开

$$u=\sum_{\infty}^{k=0} u_k \epsilon^k \tag{48}$$

由此将方程分解为各阶近似方程

$$
\begin{gathered}
O\left(\epsilon^{0}\right): E_{0}\left(u_{0}\right)=0 \\
O\left(\epsilon^{1}\right): E_{0}^{\prime}\left(u_{0}\right) u_{1}+F_{1}\left(u_{0}\right)=0 \\
O\left(\epsilon^{2}\right): E_{0}^{\prime}\left(u_{0}\right) u_{2}+F_{2}\left(u_{0}, u_{1}\right)=0 \\
\cdots\cdots\cdots \\
O\left(\epsilon^{k}\right): E_{0}^{\prime}\left(u_{0}\right) u_{i}+F_{i}\left(u_{0}, u_{1}, \cdots, u_{i-1}\right)=0 \\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{49}
$$

通过对上述不同阶偏微分方程进行 Lie 对称分析, 并将对应的无穷小生成元回带到原扰动微分方程中即可实现近似 Lie 对称性分析.

还有一种近似对称法是由 Baikov 提出的. 他们直接对无穷小生成元和相应的延拓算子关于小参数作扰动级数展开, 当扰动微分方程 $F(z,\cdots,z^p,\epsilon)=O(\epsilon^{p+1})$ 的扰动参数 $\epsilon=0$ 时, 原扰动方程退化为一般微分方程. 此时对应有一般无穷小生成元

$$
X'=\xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} \tag{50}
$$

通过将扰动参数引入无穷小生成元中可以给出扰动微分方程对应的近似无穷小生成元. 定义基础生成元 $X_{\alpha_l,k}=\xi^i_{\alpha_l,k}(z)\dfrac{\partial}{\partial z^i}$, 然后采用级数展开的方式定义不同阶的延拓算子为

$$
\begin{gathered}
X_{\alpha_0}=X_{\alpha_0,0}+\varepsilon X_{\alpha_0,1}+\ldots+\varepsilon^p X_{\alpha_0,p} \\
X_{\alpha_1}=\varepsilon X_{\alpha_1,0}+\ldots+\varepsilon^p X_{\alpha_1,p-1} \\
\vdots \\
X_{\alpha_p}=\varepsilon^p X_{\alpha_p,0}
\end{gathered} \tag{51}
$$

由此可以给出对应扰动微分方程的对称性决定方程.

2.5 应用举例

(1) 多体系统碰撞动力学的对称性和守恒量

Lie 群对称性和 Noether 守恒律给复杂机械多体系统碰撞动力学问题的定量和定性分析提供一个强有力新工具, 首先, 基于冲量动量法推导系统碰撞动力学的 Euler-Lagrange 方程; 其次, 引进群分析理论, 根据不变性原则给出系统存在 Noether 对称性与 Lie 对称性的各自条件方程以及得到相应守恒量的形式, 为动力学方程的解析积分理论提供了有效途径.

设所研究的机械多体系统由作为参考体的零刚体 B_0 和 n 个刚体 $B_i(i=1,2,\ldots,n)$ 用五类运动副 (即柱铰和移动铰) 连成, 其上受有任意多个方向和大小已知的外冲量, 如图 1. 对系统建立 D-H 形式的连体坐标架, 如图 3.

可以得到具体显式的机械多体系统碰撞动力学方程为

$$
\left\{\begin{array}{c}
\boldsymbol{M}\Delta\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{K}=\mathbf{0}, \\
K_i=\sum_n^{j=i} I_j U_{ji}^j \bar{r}_j M_{ik}=\sum_n^{j=\max(i,k)} \operatorname{tr}\left(U_{jk} J_j\left(U_{ji}\right)^{\mathrm{T}}\right)
\end{array}\right. \tag{52}
$$

机械多体动力学系统中存在 Hamilton 作用量的形式为

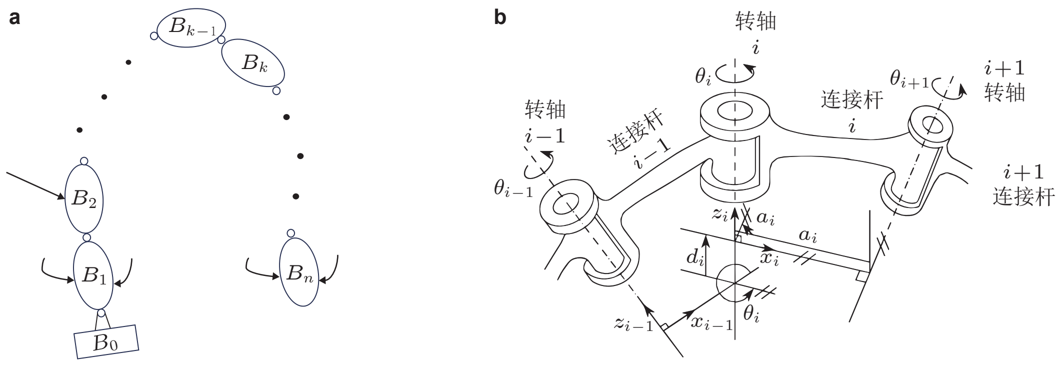

图 3

机械多体系统及其坐标系. (a) 受冲击的机械多体系统, (b) 多体连杆式 D-H 坐标系 (郑明亮 等 2018)

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} T - V \ \mathrm{d}t \tag{53}$$

取时间和坐标的无穷小变换

$$t^* = t + \Delta t = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad q_s^* = q_s(t) + \Delta q_s = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{54}$$

系统的广义 Noether 对称性是指在变换下作用量的全变分满足

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_1} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + \sum_{n}^{s=1} Q_s \delta q_s \right\} \mathrm{d}t \tag{55}$$

根据全变分与等时变分的关系 $\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s \Delta t = \varepsilon(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0)$, 上式可以展开为

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{n}^{s=1} \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \sum_{n}^{s=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0\right) + L\dot{\xi}_0 + \sum_{n}^{s=1} Q_s\left(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0\right) + \dot{G}_{\mathrm{N}} = 0 \tag{56}$$

这就是系统 Noether 对称性决定的生成元 ξ_s, ξ_0 满足的判据方程.

连续变换的对称性都对应着一条守恒定律 (首次积分), 进而可使微分方程达到降阶和约化, 守恒律是动力学系统更深层次的规律, 在动力学方程的可积性、线性化、运动常数以及稳定性方面有重要作用, Noether 对称性可直接导致一类 Noether 守恒量, 再结合初始条件, 从而很容易解出原振动系统的精确响应解. 系统 Noether 守恒量的形式为

$$I_{\mathrm{N}} = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{N}} = \mathrm{const} \tag{57}$$

与 Noether 理论研究思路不同的是, Lie 对称性是直接研究运动微分方程在无限小变换下的不变性, 非奇异机械多体系统碰撞动力学的方程是一阶微分方程组

$$\dot{q}_s = \alpha_s(t, q) \quad s = 1, 2, \cdots, n \tag{58}$$

同样引进无限小变换式 (3), 机械多体系统的 Lie 对称性是指微分方程式 (7) 在上述无限小变换式 (3) 下形式不变, 即

$$\dot{q}_s^* = \alpha_s(t^*, q^*) \tag{59}$$

上式也可以表述成 Lie 对称性确定方程为

$$\dot{\xi}_s - \alpha_s\dot{\xi}_0 = \xi_0\frac{\partial\alpha_s}{\partial t} + \sum_n^{k=1}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k \tag{60}$$

如果生成元 ξ_s 和 ξ_0 满足 Lie 对称性相应的确定方程且还存在规范函数 $G_N = G_N(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下的结构方程

$$\sum_n^{s=1}\frac{\partial\dot{\alpha}_s}{\dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln G_{\mathrm{N}} = 0 \tag{61}$$

则 Lie 对称性导致新型守恒量

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{N}} = {} & \frac{\partial}{\partial t}\xi_0 + \sum_n^{s=1}\frac{\partial}{\partial q_s}\xi_s + \sum_n^{s=1}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0\right) + \xi_0\frac{\partial}{\partial t}\ln G_{\mathrm{N}} + \sum_n^{s=1}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}\ln G_{\mathrm{N}} + \\ & \sum_n^{s=1}\left(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\ln G_{\mathrm{N}} - \dot{\xi}_0 = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{62}$$

(2) 流体力学中不可压缩 N-S 方程的 Lie 对称性和群不变解

在一定的条件下运用 Lie 对称方法研究微分方程的群不变解和对称约化使得求解方程更为简洁, 为研究偏微分方程提供了有力的工具. 其主要思想是试图找到一个或者若干个单参数局部连续变换群, 使得方程在这个群的作用下是不变的, 并由此得到所谓的相似解. 在流体力学中可以通过运用 Stokes-Helmholtz 分解将三维不可压缩 N-S 方程转化为标量方程, 再用 Lie 对称方法计算其相应的对称群, 最后给出标量方程的对称群以及相似解, 并借此给出不可压缩 N-S 方程的精确解.

无外力作用的无量纲化三维不可压缩 N-S 方程及连续性方程可以写作如下形式

$$\begin{gathered} \frac{\nabla\boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\boldsymbol{u} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \end{gathered} \tag{63}$$

其中, p 和 Re 分别表示流体静压和雷诺数. 由 Stokes-Helmholtz 分解定理速度可以写为 $u = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}$, 其中 ϕ 表示标量势, $\boldsymbol{\psi}$ 表示矢量势. 并且在此处设定 $\boldsymbol{\psi} = (\psi, \psi, \psi)$, 那么速度分量可以写作如下形式

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ u_2 &= \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ u_3 &= \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned} \tag{64}$$

根据以上事实可以得出定理: 如果 N-S 方程式 (12) 的解可写为 $\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}$, 其中 $\boldsymbol{\psi} = (\psi, \psi, \psi)$, 那么 ϕ 是调和函数, 且满足如下方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{3}(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z})^2+P=0 \tag{65}$$

其中, P 是与压力和粘性有关的函数.

由此可得与式 (66) 等价的非耦合的标量偏微分方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{3}(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z})^2-\frac{2}{3\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x})-p=0 \tag{66}$$

尽管方程式 (15) 仍然是非线性的偏微分方程, 但是因其已标量化和非耦合性, 更有利于利用 Lie 群方法做进一步的分析.

考虑 (x,y,z,t,ϕ) 的如下无穷小单参数 Lie 变换群

$$\begin{aligned}
x^* &= x+\varepsilon\xi_1(x,y,z,t,\phi)+O(\varepsilon^2)\\
y^* &= y+\varepsilon\xi_2(x,y,z,t,\phi)+O(\varepsilon^2)\\
z^* &= z+\varepsilon\xi_3(x,y,z,t,\phi)+O(\varepsilon^2)\\
t^* &= t+\varepsilon\xi_4(x,y,z,t,\phi)+O(\varepsilon^2)\\
\phi^* &= \phi+\varepsilon\eta_1(x,y,z,t,\phi)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{67}$$

方程式 (15) 的无穷小对称有如下向量场形式

$$V=\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}+\xi_4\frac{\partial}{\partial t}+\eta_1\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{68}$$

其中, V 是自变量—因变量空间上的向量场, 根据 Lie 群方法的经典计算方法, 方程的解集 $S:=\{\phi|\Delta(x,y,z,t,\phi)=0\}$ 必须满足

$$\mathrm{Pr}^{(2)}V\Delta\Big|_{\Delta=0}=0 \tag{69}$$

其中, $\mathrm{Pr}^{(2)}V$ 式向量场的二阶延拓并且由下式给出

$$\mathrm{Pr}^{(2)}V=V+\eta_1^x\frac{\partial}{\partial\phi_x}+\eta_1^y\frac{\partial}{\partial\phi_y}+\eta_1^z\frac{\partial}{\partial\phi_z}+\eta_1'\frac{\partial}{\partial\phi_t}+\eta_1^{xy}\frac{\partial}{\partial\phi_{xy}}+\eta_1^{xz}\frac{\partial}{\partial\phi_{xz}}+\eta_1^{yz}\frac{\partial}{\partial\phi_{yz}} \tag{70}$$

通过计算可以得到对应的 48 个决定方程.

3 离散系统的对称性与守恒律

3.1 离散系统的动力学方程

动力学方程能够反映离散系统运动规律和性质, 它是研究对称性和守恒律的前提. 本节给出两种基本力学系统的离散动力学方程, 即拉格朗日系统和哈密顿系统的离散动力学方程. 它们由离散变分原理得到, 同时得到系统的能量演化方程.

离散形式哈密顿泛函作用量定义为

$$S_\mathrm{d}=\sum_{k=0}^{N-1}L_\mathrm{d}(t_k,t_{k+1},q_k,q_{k+1})(t_{k+1}-t_k) \tag{71}$$

那么计算离散哈密顿作用量式 (71) 的全变分, 并结合固定端点条件 $\Delta t_0=\Delta t_\mathrm{N}=0$ 和 $\Delta q_0=\Delta q_\mathrm{N}=0$, 以及 $\Delta t_k\neq 0$, $\Delta q_k\neq 0$, 由离散变分原理 $\Delta S_\mathrm{d}=0$ 得到

$$D_3 L_{\rm d}\left(\phi_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)+D_4 L_{\rm d}\left(\phi_{k-1}\right)\left(t_k-t_{k-1}\right)=0 \tag{72}$$

$$D_1 L_{\rm d}\left(\phi_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)+D_2 L_{\rm d}\left(\phi_{k-1}\right)\left(t_k-t_{k-1}\right)+L_{\rm d}\left(\phi_{k-1}\right)-L_{\rm d}\left(\phi_k\right)=0 \tag{73}$$

式 (72) 是离散拉格朗日系统的 Euler-Lagrange 方程, 式 (73) 为离散拉格朗日系统的能量演化方程, 式 (72) ~ 式 (73) 合起来称为离散拉格朗日系统的动力学方程.

离散哈密顿力学中用离散差分序列 $q_i(t_i)$ 和 $p_i(t_i)$ 来替代连续的位形曲线 $q(t)$ 和相空间中的连续曲线 $p(t)$, 离散形式的哈密顿函数和拉格朗日函数分别表示为 $H_{\rm d}(t_k,t_{k+1},q_k,q_{k+1},p_k,p_{k+1})$、$L_{\rm d}(t_k,t_{k+1},q_k,q_{k+1})$, 其中的连续坐标 p 和 q 用离散坐标形式 $(p_k+p_{k+1})/2$、 $(q_k+q_{k+1})/2$ 表示, 相应的离散形式哈密顿泛函作用量定义为

$$S_{\rm d}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}(p_{k+1}+p_k)(q_{k+1}-q_k)-\sum_{k=0}^{N-1}H_{\rm d}(t_k,t_{k+1},q_k,q_{k+1},p_k,p_{k+1})(t_{k+1}-t_k) \tag{74}$$

计算离散哈密顿作用量式 (74) 的全变分, 并结合固定端点条件 $\Delta t_0=\Delta t_{\rm N}=0$、 $\Delta q_0=\Delta q_{\rm N}=0$, 以及 $\Delta t_k\neq 0$, $\Delta q_k\neq 0$, 由全变分原理 $\Delta S_{\rm d}=0$ 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(p_{k-1}-p_{k+1})-D_3H_{\rm d}(\varphi_k)(t_{k+1}-t_k)-D_4H_{\rm d}(\varphi_{k-1})(t_k-t_{k-1})=0\\&\frac{1}{2}(q_{k+1}-q_{k-1})-D_5H_{\rm d}(\varphi_k)(t_{k+1}-t_k)-D_6H_{\rm d}(\varphi_{k-1})(t_k-t_{k-1})=0\end{aligned} \tag{75}$$

$$H_{\rm d}(\varphi_k)-H_{\rm d}(\varphi_{k-1})-D_1H_{\rm d}(\varphi_k)(t_{k+1}-t_k)-D_2H_{\rm d}(\varphi_{k-1})(t_k-t_{k-1})=0 \tag{76}$$

式 (75) 是离散哈密顿系统的正则方程, 式 (76) 为离散哈密顿系统的能量演化方程, 式 (75) ~ 式 (76) 合起来称为离散哈密顿系统的动力学方程.

3.2 离散系统的 Noether 对称性

连续约束力学系统的 Noether 对称性与守恒量研究已经比较成熟, 有完备的理论体系和广泛的应用推广. 而离散约束力学系统的 Noether 对称性与离散守恒量的研究起步较晚, 取得的结果较少. Marsden 和 West (2001) 给出了离散系统在变换群下的 Noether 定理, Dorodnitsyn (2001) 建立了离散保守 Lagrange 系统的 Noether 对称性与守恒量理论, 给出了系统的离散 Euler-Lagrange 方程和能量演化方程, 导出了离散形式的 Noether 恒等式和 Noether 守恒量的判据方程.

对于离散的拉格朗日系统, 考虑其动力学方程 (式 (72) ~ 式 (73)) 在如下无限小变换群下的作用

$$\begin{aligned}t_k^*&=t_k+\Delta t_k=t_k+\varepsilon\tau_k(t_k,q_k)\\q_k^*&=q_k+\Delta q_k=q_k+\varepsilon\xi_k(t_k,q_k)\end{aligned} \tag{77}$$

并引入离散变量和离散函数的递推算符和一次导数算符

$$R_{\pm}f(z_k)=f(z_{k\pm1}) \tag{78}$$

$$D_{\rm d}f(z_k)=\frac{R_+f(z_k)-f(z_k)}{t_{k+1}-t_k} \tag{79}$$

则其 Noether 对称性有如下定理:

定理 1 如果离散拉格朗日系统的动力学方程 (式 (72) ~ 式 (73)) 成立, 且存在离散规范函数 $G_{Nk}(t_k, q_k)$ 满足下列等式

$$L_{\mathrm{d}}(\phi_k)D_{\mathrm{d}}(\tau_k) + X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_k)] + D_{\mathrm{d}}(G_{Nk}) = 0 \tag{80}$$

则系统存在如下形式的离散 Noether 守恒量

$$\tau_k R_{-} L_{\mathrm{d}}(\phi_k) + \tau_k(t_k - t_{k-1})D_2[R_{-}L_{\mathrm{d}}(\phi_k)] + \xi_k(t_k - t_{k-1})D_4[R_{-}L_{\mathrm{d}}(\phi_k)] + G_{Nk} = \mathrm{const} \tag{81}$$

式 (80) 称为离散 Noether 恒等式. 其中

$$X_{\mathrm{d}}^{(1)} = X_{\mathrm{d}}^{(0)} + \tau_{k+1}\frac{\partial}{\partial t_{k+1}} + \xi_{k+1}\frac{\partial}{\partial q_{k+1}} \tag{82}$$

在拉格朗日系统 Noether 对称性研究基础上, 刘荣万、张宏彬、傅景礼等研究了几类约束力学系统广义差分不变情况下的 Noether 定理和第一积分, 包括非保守完整系统 (Liu et al. 2006)、非保守非完整系统 (Zhang et al. 2005a)、事件空间中的保守完整系统 (Zhang et al. 2005b)、哈密顿系统 (Zhang et al. 2005c) 和伯克霍夫系统 (Zhang et al. 2007). 施沈阳 (Shi et al. 2008a, 2008b; Shi & Huang 2008) 在离散约束力学系统的 Noether 对称性与守恒量研究方面, 基于离散全变分原理, 从离散哈密顿泛函作用量和的不变性出发, 给出了离散非保守系统 Noether 恒等式和得到 Noether 守恒量的判据. 施沈阳等 (Shi et al. 2008b) 讨论了离散变质量约束系统的 Noether 对称性与守恒量问题, Shi 和 Huang (2008) 研究了一类有非独立坐标带完整约束力的离散系统的 Noether 对称性与守恒量.

对于离散的哈密顿系统, 考虑其动力学方程 (式 (75) ~ 式 (76)) 在如下无限小变换群下的作用

$$\begin{aligned} t_k^* &= t_k + \Delta t_k = t_k + \varepsilon\tau_k(t_k, q_k, p_k) \\ q_k^* &= q_k + \Delta q_k = q_k + \varepsilon\xi_k(t_k, q_k, p_k) \\ p_k^* &= p_k + \Delta p_k = p_k + \varepsilon\eta_k(t_k, q_k, p_k) \end{aligned} \tag{83}$$

其中, ε 为群参数, τ_k、ξ_k、η_k 为变换群的离散生成元序列函数. 那么离散全变分哈密顿系统的 Noether 对称性有如下定理:

定理 2 如果离散哈密顿系统的动力学方程 (式 (75) ~ 式 (76)) 成立, 且存在离散规范函数 $G_{Nk}(t_k, q_k, p_k)$ 满足下列等式

$$\begin{aligned} &H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)D_{\mathrm{d}}(\tau_k) + X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)] - \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_k)D_{\mathrm{d}}(\xi_k) + \\ &\frac{1}{2}(q_{k+1} + q_k)D_{\mathrm{d}}(\eta_k) + D_{\mathrm{d}}(G_{Nk}) = 0 \end{aligned} \tag{84}$$

则系统存在如下形式的离散 Noether 守恒量

$$\begin{aligned} &\tau_k\left(t_k - t_{k-1}\right)D_2\left[R_{-}H_{\mathrm{d}}\left(\varphi_k\right)\right] + \xi_k\left(t_k - t_{k-1}\right)D_4\left[R_{-}H_{\mathrm{d}}\left(\varphi_k\right)\right] + \\ &\eta_k\left(t_k - t_{k-1}\right)D_6\left[R_{-}H_{\mathrm{d}}\left(\varphi_k\right)\right] + \tau_k R_{-}H_{\mathrm{d}}\left(\varphi_k\right) - \\ &\frac{1}{2}\left(p_{k-1} + p_k\right)\xi_k + \frac{1}{2}\left(q_{k-1} + q_k\right)\eta_k + G_{Nk} = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{85}$$

式 (84) 称为哈密顿形式的离散 Noether 恒等式. 其中

$$X_{\mathrm{d}}^{(1)} = X_{\mathrm{d}}^{(0)} + \tau_{k+1}\frac{\partial}{\partial t_{k+1}} + \xi_{k+1}\frac{\partial}{\partial q_{k+1}} + \eta_{k+1}\frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \tag{86}$$

离散形式的 Noether 定理已在多体动力学等领域得到了应用. 夏丽莉 (2018) 利用离散的 Noether 定理, 给出了双连杆机械臂的 Noether 对称性判定方程, 以及该系统离散守恒量的具体形式. 在机电动力系统方面, 离散 Noether 定理获得了较为系统的研究和应用. 傅景礼、陈立群等人在相空间中建立了机电动力系统的方程, 提出了机电动力系统的对称性理论 (Fu et al. 2007). 此后傅景礼等 (Zhao et al. 2012) 研究了机电动力系统在离散形式下的变分原理和动力学方程, 以及非规范格子下的 Noether 对称性. 此外, 他们还对离散完整机电动力系统的非 Noether 守恒量进行了研究 (Fu et al. 2006).

3.3 离散系统的 Lie 对称性

相对于连续约束力学系统 Lie 对称性而言, 离散系统 Lie 对称性的研究历史很短. Levi 等首先注意到, 差分方程作为常微分方程的离散对应者, 微分差分方程作为偏微分方程的离散对应者, Lie 变换群对微分方程不变性的成功运用必然也能扩展到研究离散差分方程和微分差分方程的不变性.

Levi 和他的合作者沿着这一方向做了很多系统的研究, 得到了许多重要的结果和有意义的应用. 1993 年, Levi 等提出了微分差分方程的对称性和有条件的对称性问题 (Levi & Winternitz 1993) 并运用变换群理论来讨论离散系统的方程, 随后, Floreanini 和 Vinet (1995) 考察了有限差分方程的 Lie 对称性问题. 同时, Levi 又将变换群理论运用到离散动力学系统的对称性研究中 (Levi & Winternitz 1996), 给出了离散演化方程的高阶对称性存在的条件 (Levi & Yamilov 1997) 并讨论了可积演化方程的 Lie 对称性 (Levi et al. 1997), 给出各种类型差分方程的 Lie 群表述 (Levi & Rodriguez 1999), 据此对离散方程进行分类. Gomez-Ullate 等 (1999) 进一步讨论了两类离散动力学系统的对称性, Heredero 等 (1999) 研究了离散 Burgers 方程的对称性. Levi 等还研究了一维差分方程和格子方程的 Lie 点对称性 (Levi et al. 2000) 和高维情形 (Levi et al. 2001), Dorodnitsyn 等 (2000) 根据 Lie 变换群的形式对二阶常差分方程进行了分类.

施沈阳等 (Shi et al. 2008a) 在离散约束力学系统的 Lie 对称性方面系统研究了非保守形式离散力学系统的 Lie 对称性, 包括离散 Lagrange 系统、离散 Hamilton 系统等, 并给出了由 Lie 对称性得到的 Noether 守恒量条件.

针对离散拉格朗日系统动力学方程, 取离散时间 t_k 与广义坐标 q 的无限小变换群

$$\begin{aligned} t_k^* &= t_k + \Delta t_k = t_k + \varepsilon\tau_k(t_k, q_k) \\ q_k^* &= q_k + \Delta q_k = q_k + \varepsilon\xi_k(t_k, q_k) \end{aligned} \tag{87}$$

变换式 (87) 中, ε 为群参数, τ_k 、 ξ_k 为变换群的离散生成元序列函数. 生成元的矢量场表示为

$$X_\mathrm{d}^{(0)} = \tau_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \xi_k \frac{\partial}{\partial q_k} \tag{88}$$

矢量场式 (88) 两个离散点与三个离散点的扩展图式分别表示为

$$X_\mathrm{d}^{(1)} = X_\mathrm{d}^{(0)} + \tau_{k+1} \frac{\partial}{\partial t_{k+1}} + \xi_{k+1} \frac{\partial}{\partial q_{k+1}} \tag{89}$$

$$X_{\mathrm{d}}^{(2)}=X_{\mathrm{d}}^{(1)}+\tau_{k-1}\frac{\partial}{\partial t_{k-1}}+\xi_{k-1}\frac{\partial}{\partial q_{k-1}} \tag{90}$$

把动力学方程式 (72) ~ 式 (73) 改写为离散序列差分方程的形式

$$\begin{aligned}&U(\psi_k)=D_1L_{\mathrm{d}}(\phi_k)(t_{k+1}-t_k)+D_2L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})(t_k-t_{k-1})+L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})-L_{\mathrm{d}}(\phi_k)=0\\&V(\psi_k)=D_3L_{\mathrm{d}}(\phi_k)(t_{k+1}-t_k)+D_4L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})(t_k-t_{k-1})=0\end{aligned} \tag{91}$$

其中, $\psi_k=(t_{k-1},t_k,t_{k+1},q_{k-1},q_k,q_{k+1}),\quad k=1,\cdots,N-1$.

运用生成元序列函数三点展开图式 (90) 于式 (91) 得到

$$\begin{aligned}X_{\mathrm{d}}^{(2)}[U(\psi_k)]=0\\X_{\mathrm{d}}^{(2)}[V(\psi_k)]=0\end{aligned} \tag{92}$$

离散拉格朗日系统的 Lie 对称性与守恒量有如下定理:

定理 3 如果离散生成元序列函数 τ_k 、 ξ_k 与满足方程式 (92), 则相应的离散差分动力学方程式 (72) ~ 式 (73) 的不变性为离散拉格朗日系统的 Lie 对称性, 方程式 (92) 为 Lie 对称性的确定方程.

针对离散哈密顿系统动力学方程, 取离散时间 t_k 、广义坐标 q_k 与广义动量 p_k 的无限小变换群

$$\begin{aligned}t_k^*=t_k+\Delta t_k=t_k+\varepsilon\tau_k(t_k,q_k,p_k)\\q_k^*=q_k+\Delta q_k=q_k+\varepsilon\xi_k(t_k,q_k,p_k)\\p_k^*=p_k+\Delta p_k=p_k+\varepsilon\eta_k(t_k,q_k,p_k)\end{aligned} \tag{93}$$

变换式 (93) 中, ε 为群参数, τ_k 、 ξ_k 、 η_k 为变换群的离散生成元序列函数. 生成元的矢量场表示为

$$X_{\mathrm{d}}^{(0)}=\tau_k\frac{\partial}{\partial t_k}+\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\eta_k\frac{\partial}{\partial p_k} \tag{94}$$

矢量场两个离散点与三个离散点的扩展图式分别表示为

$$X_{\mathrm{d}}^{(1)}=X_{\mathrm{d}}^{(0)}+\tau_{k+1}\frac{\partial}{\partial t_{k+1}}+\xi_{k+1}\frac{\partial}{\partial q_{k+1}}+\eta_{k+1}\frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \tag{95}$$

$$X_{\mathrm{d}}^{(2)}=X_{\mathrm{d}}^{(1)}+\tau_{k-1}\frac{\partial}{\partial t_{k-1}}+\xi_{k-1}\frac{\partial}{\partial q_{k-1}}+\xi_{k-1}\frac{\partial}{\partial p_{k-1}} \tag{96}$$

把动力学方程式 (75) ~ 式 (76) 改写为离散序列差分方程的形式

$$U(\omega_k)=\frac{1}{2}(p_{k-1}-p_{k+1})-D_3H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)(t_{k+1}-t_k)-D_4H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})(t_k-t_{k-1})=0 \tag{97}$$

$$V(\omega_k)=\frac{1}{2}(q_{k+1}-q_{k-1})-D_5H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)(t_{k+1}-t_k)-D_6H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})(t_k-t_{k-1})=0 \tag{98}$$

$$W(\omega_k)=H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)-H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})-D_1H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)(t_{k+1}-t_k)-D_2H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})(t_k-t_{k-1})=0 \tag{99}$$

其中, $\omega_k=(t_{k-1},t_k,t_{k+1},q_{k-1},q_k,q_{k+1},p_{k-1},p_k,p_{k+1})\,,k=1,\cdots,N-1$.

运用式 (96) 于离散差分序列方程, 得到

$$X_{\mathrm{d}}^{(2)}[U(\omega_k)]=0\quad X_{\mathrm{d}}^{(2)}[V(\omega_k)]=0\quad X_{\mathrm{d}}^{(2)}[W(\omega_k)]=0 \tag{100}$$

离散哈密顿系统的 Lie 对称性与守恒量有如下定理:

定理 4　如果离散生成元序列函数 τ_k、ξ_k、η_k 满足方程式 (100), 则相应的离散差分动力学方程式 (75) ~ 式 (76) 的不变性为离散哈密顿系统的 Lie 对称性, 方程式 (100) 为 Lie 对称性的确定方程.

3.4　离散系统的 Mei 对称性

在 Noether 对称性和 Lie 对称性的研究基础上, 我国学者梅凤翔给出一种新型对称性——形式不变形, 这种不变形被称为 Mei 对称性, 它是力学系统的动力学函数在无限小群变换下仍能满足系统原来运动微分方程的一种不变性.

相较于连续系统, 离散力学系统的 Mei 对称性与守恒量研究较少, 施沈阳 (2008) 讨论了几类离散约束力学系统的 Mei 对称性及其相关的守恒量, 主要包括离散保守与非保守的拉格朗日系统、离散保守与非保守的哈密顿系统、离散变质量系统、含非独立变量带完整约束的离散系统、非完整 Chetaev 型与非 Chetaev 型约束离散系统、单面约束离散系统, 给出了各类离散系统 Mei 对称性的确定方程和得到 Mei 守恒量的条件方程, 并给出了各类离散系统由 Lie 对称性得到 Mei 守恒量的判据.

对于离散拉格朗日系统动力学方程, 取离散时间 t_k 与广义坐标 q_k 的无限小变换群

$$\begin{aligned} t_k^* &= t_k + \Delta t_k = t_k + \varepsilon\tau_k(t_k, q_k) \\ q_k^* &= q_k + \Delta q_k = q_k + \varepsilon\xi_k(t_k, q_k) \end{aligned} \tag{101}$$

变换式 (101) 中, ε 为群参数, τ_k、ξ_k 为变换群的离散生成元序列函数. 生成元的矢量场表示为

$$X_{\mathrm{d}}^{(0)} = \tau_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \xi_k \frac{\partial}{\partial q_k} \tag{102}$$

矢量场式 (102) 两个离散点的扩展图式表示为

$$X_{\mathrm{d}}^{(1)} = X_{\mathrm{d}}^{(0)} + \tau_{k+1} \frac{\partial}{\partial t_{k+l}} + \xi_{k+1} \frac{\partial}{\partial q_{k+1}} \tag{103}$$

离散拉格朗日函数 $L_{\mathrm{d}}(\phi_k)$ 及其递推表达式 $L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})$ 在式 (101) 下的动力学变换表示为

$$L_{\mathrm{d}}^*(\phi_k^*) = L_{\mathrm{d}}(t_k^*, t_{k+1}^*, q_k^*, q_{k+1}^*) = L_{\mathrm{d}}(\phi_k) + \varepsilon X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_k)] + o(\varepsilon^2) + \cdots \tag{104}$$

$$L_{\mathrm{d}}^*(\phi_{k-1}^*) = L_{\mathrm{d}}(t_{k-1}^*, t_k^*, q_{k-1}^*, q_k^*) = L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1}) + \varepsilon R_- X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})] + o(\varepsilon^2) + \cdots \tag{105}$$

其中, $o(\varepsilon^2) + \cdots$ 表示二阶及高阶的无限小量, 式 (105) 中有算符表达式

$$R_- X_{\mathrm{d}}^{(1)} = \tau_{k-1} \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} + \tau_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \xi_{k-1} \frac{\partial}{\partial q_{k-1}} + \xi_k \frac{\partial}{\partial q_k} \tag{106}$$

将动力学变换式 (104) ~ 式 (105) 代入离散差分动力学方程式 (72) ~ 式 (73), 略去高阶小量 $o(\varepsilon^2) + \cdots$, 结合式 (72) ~ 式 (73), 并有离散方程形式不变, 可得到

$$\begin{aligned} & D_1\{X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_k)]\} + \frac{t_k - t_{k-1}}{t_{k+1} - t_k} D_2\{R_- X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})]\} + \\ & \frac{R_- X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})] - X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_k)]}{t_{k+1} - t_k} = 0 \end{aligned} \tag{107}$$

$$D_3\{X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_k)]\}+\frac{t_k-t_{k-1}}{t_{k+1}-t_k}D_4\{R_-X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})]\}=0 \tag{108}$$

离散拉格朗日系统的 Mei 对称性与守恒量有如下定理:

定理 5 如果离散生成元序列函数 τ_k、ξ_k 与满足方程式 (107) ~ 式 (108), 则相应的离散能量演化方程式 (73) 和 Euler-Lagrange 方程式 (72) 的形式不变性为离散拉格朗日系统的 Mei 对称性, 方程式 (107) ~ 式 (108) 称为 Mei 对称性的确定方程.

定理 6 如果离散生成元序列函数 τ_k、ξ_k 满足方程式 (107) ~ 式 (108), 且存在离散规范函数 $G_{Mk}(t_k,q_k)$ 使下列等式成立

$$X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_k)]D_{\mathrm{d}}(\tau_k)+X_{\mathrm{d}}^{(1)}\{X_{\mathrm{d}}^{(3)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_k)]\}+D_{\mathrm{d}}(G_{Mk})=0 \tag{109}$$

则离散拉格朗日系统存在如下离散 Mei 守恒量

$$\begin{aligned}&\tau_kR_-X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})]+\tau_k(t_k-t_{k-1})D_2\{R_-X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})]\}+\\&\xi_k(t_k-t_{k-1})D_4\{R_-X_{\mathrm{d}}^{(1)}[L_{\mathrm{d}}(\phi_{k-1})]\}+G_{Mk}=\mathrm{const}\end{aligned} \tag{110}$$

式 (109) 称为离散拉格朗日系统的 Mei 等式.

对于离散哈密顿系统动力学方程, 取离散时间 t_k、与广义坐标 q_k 与广义动量 p_k 的无限小变换群

$$\begin{aligned}t_k^*&=t_k+\Delta t_k=t_k+\varepsilon\tau_k(t_k,q_k,p_k)\\q_k^*&=q_k+\Delta q_k=q_k+\varepsilon\xi_k(t_k,q_k,p_k)\\p_k^*&=p_k+\Delta p_k=p_k+\varepsilon\eta_k(t_k,q_k,p_k)\end{aligned} \tag{111}$$

变换式 (83) 中, ε 为群参数, τ_k、ξ_k、η_k 为变换群的离散生成元序列函数. 生成元的矢量场表示为

$$X_{\mathrm{d}}^{(0)}=\tau_k\frac{\partial}{\partial t_k}+\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\eta_k\frac{\partial}{\partial p_k} \tag{112}$$

矢量场两个离散点与三个离散点的扩展图式分别表示为

$$X_{\mathrm{d}}^{(1)}=X_{\mathrm{d}}^{(0)}+\tau_{k+1}\frac{\partial}{\partial t_{k+1}}+\xi_{k+1}\frac{\partial}{\partial q_{k+1}}+\eta_{k+1}\frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \tag{113}$$

$$X_{\mathrm{d}}^{(2)}=X_{\mathrm{d}}^{(1)}+\tau_{k-1}\frac{\partial}{\partial t_{k-1}}+\xi_{k-1}\frac{\partial}{\partial q_{k-1}}+\xi_{k-1}\frac{\partial}{\partial p_{k-1}} \tag{114}$$

离散哈密顿函数 $H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)$ 及其递推表达式 $H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})$ 在式 (111) 下的动力学变换表示为

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{d}}(\varphi_k^*)&=H_{\mathrm{d}}(t_k^*,t_{k+1}^*,q_k^*,q_{k+1}^*,p_k^*,p_{k+1}^*)\\&=H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)+\varepsilon X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)]+o(\varepsilon^2)+\cdots\end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1}^*)&=H_{\mathrm{d}}(t_{k-1}^*,t_k^*,q_{k-1}^*,q_k^*,p_{k-1}^*,p_k^*)\\&=H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})+\varepsilon R_-X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]+o(\varepsilon^2)+\cdots\end{aligned} \tag{116}$$

其中, $o(\varepsilon^2)+\cdots$ 表示二阶及高阶的无限小量, 式 (116) 中有算符表达式

$$R_-X_{\mathrm{d}}^{(1)}=\tau_{k-1}\frac{\partial}{\partial t_{k-1}}+\tau_k\frac{\partial}{\partial t_k}+\xi_{k-1}\frac{\partial}{\partial q_{k-1}}+\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\eta_{k-1}\frac{\partial}{\partial p_{k-1}}+\eta_k\frac{\partial}{\partial p_k} \tag{117}$$

动力学变换式 (115) 和式 (116) 代入离散能量演化方程和正则方程式 (75) ~ 式 (76) 并略去高阶小量 $o(\varepsilon^2)+\cdots$, 结合式式 (75) ~ 式 (76), 并有离散方程形式不变, 可得到

$$
\begin{aligned}
&D_1\{X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)]\}+\frac{t_k-t_{k-1}}{t_{k+1}-t_k}D_2\{R\_X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]\}+\\
&\frac{R\_X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]-X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)]}{t_{k+1}-t_k}=0
\end{aligned}\tag{118}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_3\{X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)]\}+\frac{t_k-t_{k-1}}{t_{k+1}-t_k}D_4\{R\_X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]\}+\\
&\frac{1}{2}[D_{\mathrm{d}}(p_k)+D_{\mathrm{d}}(p_{k-1})]=0
\end{aligned}\tag{119}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_5\{X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)]\}+\frac{t_k-t_{k-1}}{t_{k+1}-t_k}D_6\{R\_X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]\}-\\
&\frac{1}{2}[D_{\mathrm{d}}(q_k)+D_{\mathrm{d}}(q_{k-1})]=0
\end{aligned}\tag{120}
$$

式 (119) 和式 (120) 用到关系式

$$
\begin{aligned}
D_{\mathrm{d}}(p_k)=\frac{p_{k+1}-p_k}{t_{k+1}-t_k}\quad D_{\mathrm{d}}(p_{k-1})=\frac{p_k-p_{k-1}}{t_{k+1}-t_k}\\
D_{\mathrm{d}}(q_k)=\frac{q_{k+1}-q_k}{t_{k+1}-t_k}\quad D_{\mathrm{d}}(q_{k-1})=\frac{q_k-q_{k-1}}{t_{k+1}-t_k}
\end{aligned}\tag{121}
$$

离散哈密顿系统的 Mei 对称性与守恒量有如下定理:

定理 7　如果离散生成元序列函数 τ_k、ξ_k、η_k 满足方程式 (118) ~ 式 (120), 则相应的离散能量演化方程式 (76) 和正则方程式 (75) 的形式不变性为离散哈密顿系统的 Mei 对称性, 方程式 (118) ~ 式 (120) 称为 Mei 对称性的确定方程.

定理 8　如果离散生成元序列函数 τ_k、ξ_k、η_k 满足方程式 (118) ~ 式 (120), 且存在离散规范函数 $G_{Mk}(t_k,q_k,p_k)$ 使下列等式成立

$$
\begin{aligned}
&X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)]D_{\mathrm{d}}(\tau_k)+X_{\mathrm{d}}^{(1)}\{X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)]\}-\\
&\frac{1}{2}(p_{k+1}+p_k)D_{\mathrm{d}}(\xi_k)+\frac{1}{2}(q_{k+1}+q_k)D_{\mathrm{d}}(\eta_k)+D_{\mathrm{d}}(G_{Mk})=0
\end{aligned}\tag{122}
$$

则离散哈密顿系统存在如下离散 Mei 守恒量

$$
\begin{aligned}
&\tau_k R\_X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]+\tau_k(t_k-t_{k-1})D_2R\_X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]+\\
&\xi_k(t_k-t_{k-1})D_4R\_X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]+\eta_k(t_k-t_{k-1})D_6R\_X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_{k-1})]-\\
&\frac{1}{2}(p_{k-1}+p_k)\xi_k+\frac{1}{2}(q_{k-1}+q_k)\eta_k+G_{Mk}=\mathrm{const}
\end{aligned}\tag{123}
$$

式 (122) 称为离散哈密顿系统的 Mei 等式.

3.5　应用举例

(1) Emden 方程

Emden 方程在物理学和工程中有重要的作用, 其形式为

$$
t\ddot{q}+2\dot{q}+tq^5=0\tag{124}
$$

方程式 (124) 的哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 t^{-2} + \frac{1}{3}t^2 q^6\right) \tag{125}$$

系统离散哈密顿函数为

$$H_\mathrm{d}(\varphi_k) = \frac{1}{2}\frac{p_{k+1}^2 + p_k^2}{t_{k+1}^2 + t_k^2} + \frac{1}{12}(t_{k+1}^2 q_{k+1}^6 + t_k^2 q_k^6) \tag{126}$$

$$H_\mathrm{d}(\varphi_{k-1}) = \frac{1}{2}\frac{p_k^2 + p_{k-1}^2}{t_k^2 + t_{k-1}^2} + \frac{1}{12}(t_k^2 q_k^6 + t_{k-1}^2 q_{k-1}^6) \tag{127}$$

首先计算 $D_j[H_\mathrm{d}(\varphi_k)](j = 1, 2, 4, 5, 6)$, 可得

$$D_1[H_\mathrm{d}(\varphi_k)] = -\frac{t_k(p_{k+1}^2 + p_k^2)}{\left(t_{k+1}^2 + t_k^2\right)^2} + \frac{1}{6}t_k q_k^6 \tag{128}$$

$$D_2[H_\mathrm{d}(\varphi_k)] = -\frac{t_{k+1}(p_{k+1}^2 + p_k^2)}{\left(t_{k+1}^2 + t_k^2\right)^2} + \frac{1}{6}t_{k+1} q_{k+1}^6 \tag{129}$$

$$D_3[H_\mathrm{d}(\varphi_k)] = \frac{1}{2}t_k^2 q_k^5 \tag{130}$$

$$D_4[H_\mathrm{d}(\varphi_k)] = \frac{1}{2}t_{k+1}^2 q_{k+1}^5 \tag{131}$$

$$D_5[H_\mathrm{d}(\varphi_k)] = \frac{p_k}{t_{k+1}^2 + t_k^2} \tag{132}$$

$$D_6[H_\mathrm{d}(\varphi_k)] = \frac{p_{k+1}}{t_{k+1}^2 + t_k^2} \tag{133}$$

结合系统离散哈密顿函数式 (126)、式 (127), 式 (131) ~ 式 (133) 代入 Noether 等式 (84) 可得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{2}\frac{p_{k+1}^2 + p_k^2}{t_{k+1}^2 + t_k^2} + \frac{1}{12}(t_{k+1}^2 q_{k+1}^6 + t_k^2 q_k^6)\right] D_\mathrm{d}(\tau_k) + \left[\frac{1}{6}t_k q_k^6 - \frac{t_k(p_{k+1}^2 + p_k^2)}{\left(t_{k+1}^2 + t_k^2\right)^2}\right]\tau_k +\\&\left[\frac{1}{6}t_{k+1} q_{k+1}^6 - \frac{t_{k+1}(p_{k+1}^2 + p_k^2)}{\left(t_{k+1}^2 + t_k^2\right)^2}\right]\tau_{k+1} + \frac{1}{2}t_k^2 q_k^5 \xi_k + \frac{1}{2}t_{k+1}^2 q_{k+1}^5 \xi_{k+1} + \frac{p_k \eta_k}{t_{k+1}^2 + t_k^2} +\\&\frac{p_{k+1}\eta_{k+1}}{t_{k+1}^2 + t_k^2} - \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_k) D_\mathrm{d}(\xi_k) + \frac{1}{2}(q_{k+1} + q_k) D_\mathrm{d}(\eta_k) + D_\mathrm{d}(G_{Nk}) = 0\end{aligned} \tag{134}$$

设离散生成元序列函数有如下形式

$$\tau_k(t_k, q_k, p_k) = C_1 t_k + C_2 q_k + C_3 p_k + C_4 \tag{135}$$

$$\xi_k(t_k, q_k, p_k) = C_5 t_k + C_6 q_k + C_7 p_k + C_8 \tag{136}$$

$$\eta_k(t_k, q_k, p_k) = C_9 t_k + C_{10} q_k + C_{11} p_k + C_{12} \tag{137}$$

C_1 C_{12} 为常数.

将式 (135) ~ 式 (137) 代入式 (134) 并比较各项的系数, 得到当

$$\begin{aligned}&C_2=C_3=C_4=C_5=C_7=C_8=C_9=C_{10}=C_{12}=0\\&C_1=2\quad C_6=-\tfrac{1}{2}C_1=-1\quad C_{11}=\tfrac{1}{2}C_1=1\end{aligned}\tag{138}$$

即离散生成元函数有

$$\tau_k(t_k,q_k,p_k)=2t_k\tag{139}$$

$$\xi_k(t_k,q_k,p_k)=-q_k\tag{140}$$

$$\eta_k(t_k,q_k,p_k)=p_k\tag{141}$$

时成立

$$H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)D_{\mathrm{d}}(\tau_k)+X_{\mathrm{d}}^{(1)}[H_{\mathrm{d}}(\varphi_k)]=0\tag{142}$$

式 (139) ~ 式 (142) 代入式 (134) 可知存在离散规范函数 $G_{Nk}(t_k,q_k,p_k)$

$$G_{Nk}(t_k,q_k,p_k)=-q_kp_k\tag{143}$$

使得 Noether 等式成立, 根据定理 8 得到离散哈密顿系统的 Noether 守恒量

$$\begin{aligned}&\frac{t_k(p_k^2+p_{k-1}^2)}{t_k^2+t_{k-1}^2}-\frac{2t_k^2(t_k-t_{k-1})(p_k^2+p_{k-1}^2)}{\left(t_k^2+t_{k-1}^2\right)^2}+\frac{(t_k-t_{k-1})p_k^2}{t_k^2+t_{k-1}^2}+\\&\frac{1}{6}t_kt_{k-1}(t_kq_k^6+t_{k-1}q_{k-1}^6)+\frac{1}{2}(p_{k-1}q_k+p_kq_{k-1})=\mathrm{const}\end{aligned}\tag{144}$$

(2) 二自由度非线性谐振子系统

考虑一个二自由度非线性谐振子系统模型, q_1、q_2 是系统的广义坐标. 谐振子的摆长为 l, 谐振子的质量为 m. 该系统的 Lagrange 方程为

$$L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+mgl(2-\cos q_1-\cos q_2)\tag{145}$$

利用勒让德变换 $p_{i,k+1}=\partial L_{D,k}/\partial\Delta q_{i,k}$, $H_{D,k}=p_{i,k+1}\Delta q_{i,k}-L_{D,k}$, 其中时间间隔 $h_k\in\mathbb{R}^+$, 离散哈密顿方程可写为

$$H=\frac{1}{2ml^2}(p_{1,k+1}^2+p_{2,k+1}^2)+mgl(2-\cos q_{1,k}-\cos q_{2,k})\tag{146}$$

对于该系统, Noether 恒等式为

$$p_{i,k}\Delta\delta_tq_{i,k}-H_{D,k}\Delta\delta_tt_k-\frac{\partial H_{D,k}}{\partial t}\delta_tt_k-\frac{\partial H_{D,k}}{\partial q_{i,k}}\delta_tq_{i,k}=0\tag{147}$$

直接计算可知, 在如下变换下

$$t_k^*=t-\varepsilon\quad q_{i,k}^*=q_{i,k}\quad p_{i,k}^*=p_{i,k}\tag{148}$$

式 (147) 是不变的, 因此式 (148) 是 Noether 对称的, 可得离散 Noether 守恒量

$$I_{N,S}=\frac{1}{2ml^2}\left(p_{1,k}^2+p_{2,k}^2\right)+mgl\left(2-\cos q_{1,k-1}-\cos q_{2,k-1}\right)\tag{149}$$

4 随机系统的对称性与守恒律

4.1 Ito 型随机微分方程的对称性

自 20 世纪 40 年代数学家创立随机微分和随机微分方程的理论后, 随机微分方程的研究有了迅速和长足的发展, 并在许多领域有着广泛的应用, 例如: 现代控制理论、信号数据处理、物理、生物化学和经济金融等. 利用随机微分方程, 可以成功地模拟出在随机扰动作用下的各类系统.

对于一般的确定性常微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(x(t))\,(t > 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{150}$$

其中 $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个给定的 n 维向量场, x_0 为给定的初值. 当其应用到很多实际问题中时, 所得到的解的轨迹与实际问题所要求的并不相符. 于是, 就需要对确定性的微分方程进行修正, 使其能够尽可能地反映出系统所受到的随机作用.

日本数学家 Kiyoshi Ito 在 20 世纪 40 年代首次提出了 Ito 型随机微分方程的概念, 用于描述包含随机因素的动态系统. Ito 形式的随机微分方程形式可表示为

$$\mathrm{d}x^i = f^i(x,t)\mathrm{d}t + \sigma_k^i(x,t)\mathrm{d}w^k \tag{151}$$

首先给出关于 Ito 方程在向量场作用下变换的基本计算. 考虑 (x,t) 上一个完全一般的向量场

$$X = \tau(x,t)\partial_t + 2\xi^i(x,t)\partial_i \tag{152}$$

那么该作用在 ε 的一阶近似下计算为

$$\begin{aligned} &x \to x^i + \varepsilon\xi^i(x,t) \\ &t \to t + \varepsilon\tau(x,t) \\ &\mathrm{d}w^k(t) \to \mathrm{d}w^k(t) + \varepsilon\frac{1}{2}(\partial_t\tau)\mathrm{d}w^k(t) \end{aligned} \tag{153}$$

因此 Ito 型随机微分方程变换为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^i + \varepsilon\mathrm{d}\xi^i = &\left[f^i + \varepsilon\left(\xi^j\partial_j\xi^i + \tau\partial_t\xi^i\right)\right](\mathrm{d}t + \varepsilon\mathrm{d}\tau) + \\ &\left[\sigma_k^i + \varepsilon\left(\xi^j\partial_j\sigma_k^i + \tau\partial_t\sigma_k^i\right)\right][1 + \varepsilon(1/2)(\partial_t\tau)]\,\mathrm{d}w^k \end{aligned} \tag{154}$$

下面利用 Ito 公式计算 $\mathrm{d}\xi^i$ 和 $\mathrm{d}\tau$, 即

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi^i &= \left(\frac{\partial\xi^i}{\partial t}\right)\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^m}\right)\sigma_k^j\sigma_k^m\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\tau &= \left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^j\partial x^m}\right)\sigma_k^j\sigma_k^m\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{155}$$

将式 (155) 代入式 (154), 并限制在式 (151) 的流上. ε 的零阶项相互抵消, 而一阶项则会产生贡献

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \xi^i}{\partial t}+f^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}-\xi^j\frac{\partial f^i}{\partial x^j}-\frac{\partial\left(\tau f^i\right)}{\partial t}-f^j\frac{\partial \tau}{\partial x^j}f^i+\right.\\
&\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^m}+f^i\frac{\partial^2\tau}{\partial x^j\partial x^m}\right)\sigma_k^j\sigma_k^m\right]\mathrm{d}t+\\
&\left[\sigma_k^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}-\xi^j\frac{\partial \sigma_k^i}{\partial x^j}-\tau\frac{\partial \sigma_k^i}{\partial t}-f^i\sigma_k^j\frac{\partial \tau}{\partial x^j}-\frac{1}{2}\sigma_k^i\frac{\partial \tau}{\partial t}\right]\mathrm{d}w^k\\
&:=\alpha^i(x,t)\mathrm{d}t+\beta_k^i(x,t)\mathrm{d}w^k
\end{aligned}\tag{156}
$$

也就是说, 向量场式 (152) 的作用将原方程式 (151) 映射为方程

$$
\mathrm{d}x^i-\left[f^i(x,t)+\varepsilon\alpha^i(x,t)\right]\mathrm{d}t-\left[\sigma_k^i(x,t)+\varepsilon\beta_k^i(x,t)\right]\mathrm{d}w^k \tag{157}
$$

显然, 变换后的式 (157) 与原式相同当且仅当对所有的 i 和 k, $\alpha^i(x,t)=0$, $\beta_k^i(x,t)=0$. 于是有如下定理

定理 9　对于 Ito 方程式 (151) 的一般对称性 (生成元形式如式 (152) 所示) 的判别方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi^i}{\partial t}+f^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}-\xi^j\frac{\partial f^i}{\partial x^j}-\frac{\partial(\tau f^i)}{\partial t}-f^j\frac{\partial \tau}{\partial x^j}f^i+\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^m}+f^i\frac{\partial^2\tau}{\partial x^j\partial x^m}\right)\sigma_k^j\sigma_k^m=0\\
&\sigma_k^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}-\xi^j\frac{\partial \sigma_k^i}{\partial x^j}-\tau\frac{\partial \sigma_k^i}{\partial t}-f^i\sigma_k^j\frac{\partial \tau}{\partial x^j}-\frac{1}{2}\sigma_k^i\frac{\partial \tau}{\partial t}=0
\end{aligned}\tag{158}
$$

4.2　Stratonovich 型随机微分方程的对称性

Stratonovich 型随机微分方程是另一种重要的随机微分方程形式, 以俄罗斯物理学家 Ruslan Stratonovich 的名字命名. 斯特拉托诺维奇在 20 世纪 50 年代提出了这种形式的随机微分方程, 与 Ito 型随机微分方程相比, Stratonovich 形式更接近于经典微积分中的链式法则, 因此在一些物理和工程问题中更为自然 (Arnold et al. 1995, Guerra 1981, Protter 1990, Stratonovich 1966, Stroock 2003). 具体而言, Stratonovich 随机微分方程在坐标变换下更加符合直觉, 更易理解. 由于对称性是指在变换下的不变性, 因此在随机微分方程框架中考虑对称性的最早尝试 (Albeverio & Fei 1995, Misawa 1994a, Misawa 1994b) 集中在 Stratonovich 方程上. 现在我们将分析 Stratonovich 随机微分方程的对称性.

Stratonovich 随机微分方程的形式可表示为

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}x^i\left(t\right)=b^i\left(x\left(t\right)\right)\mathrm{d}t+\sigma_k^i\left(x,t\right)\circ\mathrm{d}W\left(t\right)\\
x\left(0\right)=x_0
\end{cases}\tag{159}
$$

其中, $W(t)$ 表示 Winner 过程是一个平稳独立的增量随机过程, 并且其均值、方差和积分具有相应的计算性质.

根据上述随机微分方程的导出过程可知, 在考虑随机微分方程的对称性时需要特别处理无穷小变换对随机噪声项. 这里考虑式 (2) 中的 Stratonovich 随机微分方程, 按照一般给出时间和空间变量的无穷小变换

$$\begin{aligned} x^i &\to x^i + \varepsilon\varphi^i(x,t) \\ t &\to \tau + \varepsilon\tau(x,t) \end{aligned} \tag{160}$$

此时根据 Winner 过程的定义式可以给出 Winner 过程随机项对应的变换结果, 即导出在时间变换下对应的随机项变换为

$$w^i(t) \to \tilde{w}^i(\tau) = \sqrt{1+\varepsilon(\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t)}w^i(\tau) \tag{161}$$

此时构建对称性条件 (原方程在无穷小变换条件下满足不变性)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x^i+\varepsilon\varphi^i) = b^i(x+\varepsilon\varphi, t+\varepsilon\tau)\mathrm{d}(t+\varepsilon\tau)+ \\ \sigma^i_k(x+\varepsilon\varphi, t+\varepsilon\tau)\circ \mathrm{d}w^k(t+\varepsilon\tau) \end{aligned} \tag{162}$$

将 Winner 过程的变换关系带入后即可得到 Stratonovich 随机微分方程的 Lie 对称性决定方程

$$\begin{aligned} &((\partial_t\varphi^i) - \partial_t(\tau b^i)) + 2\left(b^j(\partial_j\varphi^i) - \varphi^j(\partial_j b^i)\right) - 2b^j(\partial_j\tau)b^i = 0 \\ &\tau(\partial_t\sigma^i_k) + (1/2)(\partial_t\tau)\sigma^i_k - 2\left(\sigma^j_k(\partial_j\varphi^i) - \varphi^j(\partial_j\sigma^i_k)\right) + b^i\,(\partial_j\tau)\,\sigma^j_k = 0 \end{aligned} \tag{163}$$

一个自然的想法是, Stratonovich 方程和与之“等价”的 Ito 方程的对称性应当是一致的. 然而事实并非如此, 通常情况下, 这个结论并不成立 (Hydon 1998), 即使在相当简单的例子中也是如此. 这一点已经被 Unal (2003) 提出. 这种不对应的原因来源于 Ito 方程和相关 Stratonovich 方程之间“等价性”的非平凡性质 (Stroock 2003).

4.3 统计意义下随机微分方程的对称性

在考虑随机微分方程的对称性时 (独立于变分起源), 一个重要的进展是将 Ito 方程的对称性与相应扩散方程的对称性联系并比较. 这里扩散方程的对称性其实是将随机微分方程的解映射到另一个等价形式下, 其中等价是指统计意义上的等价. 因此, 对于由随机微分方程描述的单粒子过程, 我们有两种类型的对称性: 方程可以在映射下保持不变, 或者它可以被映射到一个不同方程, 但是相应的扩散方程不变. 这种对称性. 实际上是在统计意义下描述的, 因为随机微分方程对应的扩散方程是一个确定性方程. 随机微分方程对应的扩散方程的对称性已在文献中得到了详细研究 (Cicogna & Vitali 1990, 1989; Finkel 1999; Khater et al. 2002; Kozlov 2010a, 2010b; Rudra 1990; Sastri & Dunn 1985; Shtelen & Stogny 1989; Spichak & Stognii 1999).

从物理意义上讲, 当考虑空间 (即在 x 变量中) 上的一般变换, 但 t 上的变换不应该依赖于空间点 (Gaeta 2004, Gaeta & Quintero 1999). 这种变换下的对称性称为保纤维对称性. 考虑如下形式的向量场

$$X_0 = \tau(t)\partial_t + \xi^i(x,t)\partial_i \tag{164}$$

式中, $\partial_i = \partial/\partial x^i$. 那么 Ito 方程式 (151) 的保纤维对称性的决定方程为 (Gaeta & Quintero 1999)

$$\begin{aligned} &(\partial_t\xi^i) + \left[(f^j\cdot\partial_j)\xi^i - (\xi^j\cdot\partial_j)f^i\right] - \partial_t(\tau f^i) + \frac{1}{2}\left(\sigma\sigma^T\right)^{jk}\partial^2_{jk}\xi^i = 0 \\ &(\sigma^j_k\cdot\partial_j)\xi^i - (\xi^j\cdot\partial_j)\sigma^i_k - \tau\partial_t\sigma^i_k - \frac{1}{2}(\partial_t\tau)\sigma^i_k = 0 \end{aligned} \tag{165}$$

Ito 方程相应的扩散方程形式为

$$u_t + A^{ij}u_{ij} + B^i u_i + Cu = 0 \tag{166}$$

其中, $u_i = (\partial u/\partial x^i)$, 而系数 A、B、C 是自变量 $(\mathbf{x}, t)$ 的函数

$$\begin{aligned} A^{ij} &= -\frac{1}{2}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{ij} \\ B^i &= f^i - \partial_j(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{ij} \\ C &= (\partial_i \cdot f^i) - \frac{1}{2}\partial^2_{ij}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{ij} \end{aligned} \tag{167}$$

对于方程式 (166), 考虑向量场的形式

$$X = \tau(t)\partial_t + \xi^i(x,t)\partial_i + \varphi(x,t,u)\partial_u \tag{168}$$

那么 Ito 方程相应的扩散方程式 (166) 对称性的决定方程为

$$\begin{aligned} \partial_t(\tau A^{ik}) + \left(\xi^m\partial_m A^{ik} - A^{im}\partial_m\xi^k - A^{mk}\partial_m\xi^i\right) = 0 \\ \partial_t(\tau B^i) - \left[\partial_t\xi^i + \left(B^m\partial_m\xi^i - \xi^m\partial_m B^i\right)\right] + \left(A^{ik}\partial_k\beta + A^{mi}\partial_m\beta\right) - A^{mk}\partial^2_{mk}\xi^i = 0 \\ \partial_t(\tau C) + \partial_t\beta + A^{ik}\partial^2_{ik}\beta + B^i\partial_i\beta + \xi^m\partial_m C = 0 \end{aligned} \tag{169}$$

近年来, F De Vecchi(2014) 重新考虑了关于随机微分方程对称性的"扩散"方法, 并与 Meyer 和 Schwartz (Émery 2012; Meyer 2006, 1982, 1981; Schwartz 2006) 发展的"二阶几何"联系起来. 这引入了一些的没有常数部分的二阶微分算子的几何, 而且完全是通过相关联的扩散方程建立的, 因此是确定性的.

5　结　论

本文综述了力学分析中连续、离散和随机系统中对称性与守恒律的研究进展. 通过系统回顾相关研究, 本文梳理了微分方程、偏微分方程以及随机微分方程等不同类型系统中的对称性原理及其应用实例, 揭示了这些对称性在动力学方程中的重要作用. 此外本文还重点探讨了 Noether 对称性和 Mei 对称性在离散系统中的应用.

对称性在力学系统中不仅揭示了系统的内在结构, 还为动力学方程的简化和解析提供了强有力的工具. 守恒律则作为对称性的直接结果, 在物理意义上确保了系统能量、动量等物理量的恒定, 从而对系统行为的长期预测和稳定性分析具有关键作用. 在力学分析中的对称性与守恒律研究中, 传统方法主要依赖于经典分析力学框架, 如拉格朗日力学与哈密顿力学. 然而, 随着数学工具的不断发展, 基于现代微分几何、Lie 群和 Lie 代数理论的分析方法逐渐成为该领域的重要研究方向. 其中, 动量映射与对称性约化在几何力学和几何控制中的广泛应用, 显示了这一领域的巨大潜力.

动量映射作为几何力学中的核心概念, 为对称性与守恒律之间的关系提供了结构化的描述. 通过李群在辛流形上的作用, 动量映射将守恒量表示为从相空间到李代数对偶空间的映射. 这一理论框架不仅揭示了动力学系统的对称结构, 还为复杂系统中多对称群交织下的守恒量分析提供了理论依据. 另一方面, 对称性约化以动量映射为基础, 利用对称性将高维动力学问题简化为

低维子流形上的问题. 这种方法在分析具有高对称性的大规模动力学系统时, 展现出独特的优势, 成为几何力学理论的重要基石.

随着力学系统的复杂性和多样性不断增加, 对称性和守恒律在非线性动力学、复杂材料力学, 以及多尺度系统分析等领域展现出广阔前景. 特别是在涉及多物理场耦合、智能材料以及纳米力学的研究中, 深入探讨对称性和守恒律可能揭示新的物理机制, 并为复杂系统的设计与优化提供理论支持. 此外, 随着计算力学和人工智能技术的发展, 将对称性理论与数值模拟和数据驱动方法结合, 可能进一步推动力学分析的自动化和智能化, 为工程应用提供更精确和高效的解决方案. 通过对对称性和守恒律的深入理解, 力学分析将在科学研究和工程实践中发挥更为重要的作用.

致 谢 国家自然科学基金项目 (12132001, 52192632)、北航沈元学院博士卓越研究基金项目 (230123202) 的支持.

参 考 文 献

冯录祥. 2012. 一类一阶常微分方程的可积性条件及应用. 中央民族大学学报 (自然科学版), **021**: 32–36 (Feng L X. 2012. A class of first order differential equation and application of the integrability conditions. *Journal of MUC (Natural Sciences Edition)*, **021**: 32–36).

刘胜, 雷锦志. 1998. 判定常微分方程组具有一维李对称群的新方法. 纯粹数学与应用数学, **14**: 6 (Liu S, Lei J Z. 1998. A new method of identifying one-dimensional Lie groups admitted by ordinary differential equation systems. *Pure and Applied Mathematics*, **14**: 6).

夏丽莉. 2018. 双连杆机械臂的差分离散和 Noether 对称性. 北京信息科技大学学报 (自然科学版), **33**: 1–5 (Xia L L. 2018. Noether symmetry and difference discretization of double-link manipulator. *Journal of Beijing Information Science & Technology University*, **33**: 1–5).

夏丽莉, 陈立群. 2015. 基于变分积分子的动力学系统的对称性与守恒量研究. 上海大学博士论文 (Xia L L, Chen L Q. 2015. Study on symmetries and conserved quantities of dynamical systems based on the variational integrators. *Shanghai University*).

孙博华. 2016. 量纲分析与 Lie 群. 北京: 高等教育出版社 (Sun B H. 2016. Dimensional analysis and Lie group. *Beijing: Higher Education Press*).

张学元. 1993. 常微分方程一些新的可积性结果. 岳阳大学学报, **01**: 9–16 (Zhang X Y. 1993. Some new productability results for ordinary differential equations. *Journal of Yueyang University*, **01**: 9–16).

张晓莉, 赵小山. 2011. 基于李群李对称方法求解一类偏微分方程. 天津师范大学学报: 自然科学版, **31**: 4 (Zhang X L, Zhao X S. 2011. Solving a kind of partial differential equations by Lie group Lie symmetry. *Journal of Tianjin Normal University (Natural Science Edition)*, **31**: 4).

张锦, 伊贺达赉, 冀书关. 2007. 常微分方程存在广义对称的必要条件. 吉林大学学报 (理学版), **045**: 393–395 (Zhang J, Yi H D L, Ji S G. 2007. Necessary condition for existence of generalized symmetry of ordinary differential equations. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, **045**: 393–395).

施沈阳. 2008. 离散约束动力学系统的对称性质与守恒量研究. 上海大学博士论文 (Shi S Y. 2008. The investigation on symmetry and conserved quantity of discrete constrained dynamical system. *Shanghai University*).

梅凤翔. 2001. 关于 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性. 北京理工大学学报, 535–536 (Mei F X. 2001. On

Noether symmetry, Lie symmetry and form invariance. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 535–536).

薛崇政, 胡彦霞. 2013. 利用单参数 Lie 群组的一种可解性求自治系统首次积分的方法. 应用数学学报, **36**: 738–747 (Xue C Z, Hu Y X. 2013. Searching for first integral of autonomous system based on a kind of solvability of one-parameter Lie groups. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **36**: 738–747).

邱志平, 姜南. 2022. 力学分析中的对称性和守恒律. 北京: 科学出版社 (Qiu Z P, Jiang N. 2022. Symmetry and conservation laws in mechanical analysis. Beijing: China Science Publishing & Media Ltd).

郑明亮, 冯鲜, 李文霞, 曹亚玲. 2018. 机械多体系统碰撞动力学的对称性和守恒量研究. 应用数学和力学, **39**: 1292–1299 (Zheng M L, Feng X, Li W X, Cao Y L. 2018. Study on symmetries and conserved quantities of mechanical multibody system collision dynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*, **39**: 1292–1299).

Albeverio S, Fei S-M. 1995. A remark on symmetry of stochastic dynamical systems and their conserved quantities. *J. Phys. A: Math. Gen*, **28**: 6363-6371.

Andriopoulos K, Leach P G L, Flessas G P. 2001. Complete symmetry groups of ordinary differential equations and their integrals: Some basic considerations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **262**: 256-273.

Arnold L, Jones, C K, Mischaikow K, Raugel G, Arnold L. 1995. Random dynamical systems. Berlin: Springer Berlin Heidelberg，pp. 1-43.

Bluman G. 1990. Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **145**: 52-62.

Bordag L A, Yamshchikov I P. 2017. Lie group analysis of nonlinear black-scholes models, in: Ehrhardt M, Günther M, Ter Maten E J W (Eds.), Novel Methods in Computational Finance, Mathematics in Industry. Springer International Publishing, Cham, pp. 109–128.

Buckwar E, Luchko Y. 1998. Invariance of a partial differential equation of fractional order under the lie group of scaling transformations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **227**: 81-97.

Cicogna G, Vitali D. 1990. Classification of the extended symmetries of Fokker−Planck equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**: L85.

Cicogna G, Vitali D. 1989. Generalised symmetries of Fokker−Planck-type equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**: L453.

Donato A, Oliveri F. 1994. Linearization procedure of nonlinear first order system of partial differential equations by means of canonical variables related to lie groups of point transformations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **188**: 552-568.

Dorodnitsyn V. 2001. Noether-type theorems for difference equations. *Applied numerical mathematics*, **39**: 307-321.

Dorodnitsyn V, Kozlov R, Winternitz P. 2000. Lie group classification of second-order ordinary difference equations. *Journal of mathematical physics*, **41**: 480-504.

Émery M. 2012. Stochastic calculus in manifolds. Springer Science & Business Media.

F De Vecchi. 2014. Symmetries of diffusion processes and applications. Milan: Università degli Studi di Milano.

Finkel F. 1999. Symmetries of the Fokker−Planck equation with a constant diffusion matrix in 2+1 dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **32**: 2671.

Floreanini R, Vinet L. 1995. Lie symmetries of finite-difference equations. *Journal of Mathematical Physics*, **36**: 7024-7042.

Fu J, Dai G, Jiménez S, Tang Y. 2007. Discrete variational principle and first integrals for Lagrange–Maxwell mechanico-electrical systems. *Chinese Physics*, **16**: 570.

Fu J L, Chen L Q, Jiménez S, Tang Y F. 2006. Non-Noether symmetries and Lutzky conserved quantities for mechanico-electrical systems. *Physics Letters A*, **358**: 5-10.

Gaeta G. 2004. Symmetry of stochastic equations. *arXiv preprint math-ph*/0401025.

Gaeta G, Quintero N R. 1999. Lie-point symmetries and stochastic differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **32**: 8485-8505.

Gomez-Ullate D, Lafortune S, Winternitz P. 1999. Symmetries of discrete dynamical systems involving two species. *Journal of Mathematical Physics*, **40**: 2782-2804.

Guerra F. 1981. Structural aspects of stochastic mechanics and stochastic field theory. *Physics Reports*, **77**: 263-312.

Heredero R H, Levi D, Winternitz P. 1999. Symmetries of the discrete Burgers equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **32**: 2685.

Hydon P. 1998. Discrete point symmetries of ordinary differential equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **454**: 1961-1972.

Hydon P E. 2000. Symmetry methods for differential equations: A beginner's guide, 1st ed. Cambridge University Press.

Khater A, Moussa M, Abdul-Aziz S. 2002. Potential symmetries and invariant solutions for the generalized one-dimensional Fokker–Planck equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **304**: 395-408.

Kozlov R. 2010a. The group classification of a scalar stochastic differential equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43**: 055202.

Kozlov R. 2010b. Symmetries of systems of stochastic differential equations with diffusion matrices of full rank. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43**: 245201.

Levi D, Rodriguez M A. 1999. Lie symmetries for integrable evolution equations on the lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **32**: 8303.

Levi D, Tremblay S, Winternitz P. 2001. Lie symmetries of multidimensional difference equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **34**: 9507.

Levi D, Tremblay S, Winternitz P. 2000. Lie point symmetries of difference equations and lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **33**: 8507.

Levi D, Vinet L, Winternitz P. 1997. Lie group formalism for difference equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **30**: 633.

Levi D, Winternitz P. 1996. Symmetries of discrete dynamical systems. *Journal of Mathematical Physics*, **37**: 5551-5576.

Levi D, Winternitz P. 1993. Symmetries and conditional symmetries of differential-difference equations. *Journal of Mathematical Physics*, **34**: 3713-3730.

Levi D, Yamilov R. 1997. Conditions for the existence of higher symmetries of evolutionary equations on the lattice. *Journal of Mathematical Physics*, **38**: 6648-6674.

Lie S. 1880. Theorie der transformations gruppen I. *Mathematische Annalen*, **16**: 441-528.

Liu C S, Chang C W. 2016. A real-time Lie-group differential algebraic equations method to solve the inverse nonlinear vibration problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, **24**: 1569-1586.

Liu R, Zhang H, Chen L. 2006. Variational principle and dynamical equations of discrete nonconservative holonomic systems. *Chinese Physics*, **15**: 249.

Lutzky M. 1979. Dynamical symmetries and conserved quantities. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **12**: 973.

Lutzky M. 1978a. Noether's theorem and the time-dependent harmonic oscillator. *Physics Letters A*, **68**: 3-4.

Lutzky M. 1978b. Symmetry groups and conserved quantities for the harmonic oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **11**: 249.

Mahomed F M. 2007. Symmetry group classification of ordinary differential equations: Survey of some results. *Math Methods in App Sciences*, **30**: 1995-2012.

Márquez A D P, Garrido T M, Recio E, De La Rosa R. 2022. Lie symmetries and exact solutions for a fourth-order nonlinear diffusion equation. *Math Methods in App Sciences*, **45**: 10614-10627.

Marsden J E, West M. 2001. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, **10**: 357-514.

Mei F. 2000. Form invariance of Lagrange system. *Journal of Beijing Institute of Technology*, **9**: 120–124.

Meyer P A. 2006. A differential geometric formalism for the Itô calculus, in: Stochastic Integrals: *Proceedings of the LMS Durham Symposium*, July 7–17, 1980. Springer, pp. 256–270.

Meyer P A. 1982. Géométrie différentielle stochastique (bis), in: Séminaire de Probabilités XVI, 1980/81 Supplément: Géométrie Différentielle Stochastique. *Springer*, pp. 165–207.

Meyer P A. 1981. Géométrie Stochastique Sans Larmes, in: Séminaire de Probabilités XV 1979/80: Avec Table Générale Des Exposés de 1966/67 à 1978/79. *Springer*, pp. 44–102.

Misawa T. 1994a. Conserved quantities and symmetry for stochastic dynamical systems. *Physics Letters A*, **195**: 185-189.

Misawa T. 1994b. New conserved quantities derived from symmetry for stochastic dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **27**: L777-L782.

Noether E. 1918. Invariante Variations Probleme, Nachr. KoÈnig. Gesell. Wissen. *GoÈttingen, Math.-Phys*, 186-207.

Oliveri F. 2010. Lie symmetries of differential equations: Classical results and recent contributions. *Symmetry*, **2**: 658-706.

Olver P J. 1986a. Symmetry groups of differential equations, in: Applications of Lie groups to differential equations, graduate texts in mathematics. New York: Springer New York, 77–185.

Olver P J. 1986b. Applications of Lie groups to differential equations, graduate texts in mathematics. New York, NY: Springer New York.

Protter P. 1990. Stochastic differential equations. *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*, 187–284.

Rudra P. 1990. Symmetry classes of Fokker−Planck-type equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**: 1663.

Sastri C, Dunn K. 1985. Lie symmetries of some equations of the Fokker–Planck type. *Journal of mathematical physics*, **26**: 3042-3047.

Schwartz L. 2006. Géométrie différentielle du 2eme ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle, in: Séminaire de Probabilités XVI, 1980/81 Supplément: Géométrie Différentielle Stochastique. *Springer*, pp. 1–148.

Shapovalov A V, Shirokov I V. 1992. Symmetry algebras of linear differential equations. *Theor Math Phy*, **92**: 697-703.

Shi S, Fu J, Chen L. 2008a. The Lie symmetries and Noether conserved quantities of discrete non-conservative mechanical systems. *Chinese Physics B*, **17**: 385.

Shi S, Fu J, Huang X, Chen L, Zhang X. 2008b. The Lie symmetries and Noether conserved quantities of discrete mechanical systems with variable mass. *Chinese Physics B*, **17**: 754.

Shi S, Huang X. 2008. Noether symmetry and Lie symmetry of discrete holonomic systems with dependent coordinates. *Chinese Physics B*, **17**: 1554.

Shtelen W, Stogny V. 1989. Symmetry properties of one-and two-dimensional Fokker−Planck equations.

Journal of Physics A: Mathematical and General, **22**: L539.

Spichak S, Stognii V. 1999. Symmetry classification and exact solutions of the one-dimensional Fokker−Planck equation with arbitrary coefficients of drift and diffusion. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **32**: 8341.

Stratonovich R. 1966. A new representation for stochastic integrals and equations. *SIAM Journal on Control*, **4**: 362-371.

Stroock D W. 2003. Markov processes from K. Itô's Perspective (AM-155). Princeton University Press.

Ünal G. 2003. Symmetries of Itô and Stratonovich dynamical systems and their conserved quantities. *Nonlinear Dynamics*, **32**: 417-426.

Walcher S. 2023. Symmetries of ordinary differential equations: A short introduction. *arXiv preprint arXiv*: 1911.01053.

Winternitz P. 1993. Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations, in: Ibort L A, Rodríguez M A (Eds.), integrable systems, quantum groups, and quantum field theories. Springer Netherlands, Dordrecht, pp. 429–495.

Zhang H, Chen L, Gu S, Liu C. 2007. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems. *Chinese Physics*, **16**: 582.

Zhang H, Chen L, Liu R. 2005a. First integrals of the discrete nonconservative and nonholonomic systems. *Chinese Physics*, **14**: 238.

Zhang H, Chen L, Liu R. 2005b. Discrete variational principle and the first integrals of the conservative holonomic systems in event space. *Chinese Physics*, **14**: 888.

Zhang H, Chen L, Liu R. 2005c. The discrete variational principle in Hamiltonian formalism and first integrals. *Chinese Physics*, **14**: 1063.

Zhao G L, Chen L Q, Fu J L. 2012. Lie symmetries for discrete electromechanical dynamical systems with irregular lattices. *Applied Mechanics and Materials*, **138**: 267-272.

A review of research advances in analytical methods for symmetry and conservation laws in mechanical analysis

QIU Zhiping[1,*]　　QIU Yu[1,2]　　ZHANG Peixuan[1,2]

[1] Institute of Solid Mechanics, School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China

[2] Shen Yuan Honors College, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract　This paper reviews the research progress on symmetry and conservation laws in mechanical analysis. It begins by introducing Lie group symmetries in continuous systems, including the symmetries of differential equations, partial differential equations, functionals, and approximate Lie symmetries of perturbed differential equations, with practical applications demonstrated through examples. The paper then explores symmetries and conservation laws in discrete systems, focusing on the dynamics equations, Noether symmetries, Lie symmetries, and Mei symmetries, with explanations supported by specific application examples. Finally, it reviews symmetries and conservation laws in stochastic systems, discussing the symmetries of Ito and Stratonovich stochastic differential equations, particularly in the statistical sense. The aim of this paper is to provide theoretical references for subsequent research and to advance the development of related fields.

Keywords　symmetry, conservation laws, continuous systems, discrete systems, stochastic systems

邱志平, 男, 博士, 1962 年出生于吉林省长春市, 教授. 于 1994 年在吉林大学获博士学位. 1996 年 12 月至今, 在北京航空航天大学固体力学所工作. 洪堡学者, 国家杰出青年基金获得者, 2019—2023 年爱思唯尔中国高被引学者, 北航蓝天学者特聘教授. 主要研究方向: 结构动力学、结构强度、结构可靠性、疲劳分析、损伤容限与耐久性设计、结构优化设计、随机振动、复合材料力学、智能材料结构, 气动弹性力学, 热力学, 力学中的非线性问题等.

Received: 8 October 2024; accepted: 17 December 2024; online: 22 December 2024

* E-mail: zpqiu@buaa.edu.cn