

钱伟长先生对力学和应用数学的贡献

程昌钧[†]

上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

摘要 为了缅怀我国近代力学的奠基人之一、著名的力学家和应用数学家钱伟长先生, 该文较为详细地回顾了他在力学和应用数学的若干重要方面的开创性和奠基性的工作, 主要包括在弹性板壳的内禀理论、弹性薄板大挠度理论、环壳理论及其应用、广义变分原理及在有限元计算中的应用、奇异摄动理论、理性力学等方面的学术成就, 还回顾了他在发展我国力学事业和培养我国力学人才等方面的巨大贡献.

关键词 钱伟长, 力学, 贡献

引言

钱伟长先生于 2010 年 7 月 30 日逝世了, 他留给世人的学术财富太多太多, 以至于无法在一篇文章里全面回顾他对我国科学事业的贡献. 笔者应《力学进展》编委会的邀请, 写一篇缅怀钱伟长先生对力学和应用数学贡献的文章, 虽然时间很短, 但是为了弘扬钱先生的崇高精神, 缅怀他对力学和应用数学诸多方面的开创性和奠基性的贡献, 我仍然愿意尽我绵薄之力来完成这个艰巨而重要的工作. 但是我仍然感到惶恐不安, 生怕有负重托, 幸好钱先生给我们留下了许多的文选和科学论文选集, 例如 1985 年知识出版社出版的《广义变分原理》——多学科学术讲座丛书之三, 1989 年福建教育出版社出版的《钱伟长科学论文选集》和 1992 年浙江科学技术出版社出版的《钱伟长文选》等等, 它们构成了这篇文章的主要资料来源.

钱伟长的一生是爱国的一生、奋斗的一生、奉献的一生. 作为我国近代力学奠基人之一, 著名的力学家、应用数学家和中国科学院资深院士, 他对我国力学和应用数学事业做出了全面的极为重要的贡献. 下面描述的几方面的工作是最为突出的、举世公认的、对国内外力学和应用数学的发展均有着巨大而深远的影响.

1 弹性板壳的内禀理论

关于弹性板壳的内禀理论方面的系列性工作 是钱伟长的成名作, 借此奠定了他在国际力学界, 特别是固体力学界的学术地位.

弹性薄板和薄壳是工程技术中应用广泛的结构元件. 1940 年以前, 关于板壳的理论已经取得了一些进展, 但还存在一些问题, 主要有: (1) 所有的理论都是根据先验的 Kirchhoff-Love 假设 (通常称为直法线假设) 来建立的, 并给出由中面的 3 个位移分量 u, v, w 所满足的 3 个平衡微分方程; (2) 薄板和薄壳是分开来处理的, 特别是壳体问题, 根据其几何特征的不同, 采用不同的坐标系来建立各自的壳体理论, 没有一个统一的适合于各种形状的板壳理论; (3) 板壳理论中的各种近似是混乱的, 没有一种系统的简化与近似方法.

为了克服板壳理论中的这些缺陷, 钱伟长在 1941 年 ~ 1944 年间建立了一种系统的精确的板壳理论, 并给出一套统一的近似方法, 使得从这一理论出发, 根据不同的实际情况, 可以进行不同的简化和近似, 得到适合于各类板壳问题的解案, 这就是板壳内禀理论. 主要由 5 篇论文组成 (如果加上他于 1942 年在多伦多大学完成的 219 页的博士学位论文, 实际上是 6 篇文章), 其中钱伟长与导师 J. L. Synge(辛吉) 联合发表的论文, 是板壳内禀理

收稿日期: 2010-09-06, 修回日期: 2010-09-10

[†] E-mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn

论的核心和精髓.

钱伟长早在昆明的西南联大读研究生期间(1938年~1940年)就开始了对板壳精确理论的研究,他提出了以三维弹性力学的应力平衡微分方程为基础,引入应力应变关系,来导出用应变分量表示的壳体应力满足的单元平衡理论.在该理论中,他采用了一种全新的坐标系——以中面为基础的拖带坐标系(comoving coordinates) (x^0, x^1, x^2) :在变形前,中面为 $x^0 = 0$, (x^1, x^2) 为中面上点的坐标,中面以外各点的坐标为 (x^0, x^1, x^2) ,并称之为以中面为基础的 Gauss 坐标系,其中 (x^1, x^2) 为垂直于中面的法线与中面交点的坐标.在变形中,由于坐标系随着板壳一起变形,因此,已变形物体上各点的坐标 (x^0, x^1, x^2) 是不变的.基于这种拖带坐标系,他定义的应变张量为 $e_{ij} = (g_{ij} - g'_{ij})/2$,其中 $g_{ij}(x^0, x^1, x^2)$ 和 $g'_{ij}(x^0, x^1, x^2)$ 分别为坐标系 (x^0, x^1, x^2) 在变形后与变形前的基本张量,而 e_{ij} 满足的协调方程是由曲率张量 $\hat{R}_{jkl} = \hat{R}'_{jkl} = 0$ 的条件得到的.这是一组新的协调方程,与以往的板壳理论是不同的.在中面 $x^0 = 0$ 上,引进两个张量 $p_{ij} = (e_{ij})_{x^0=0}$, $q_{ij} = (\partial e_{ij} / \partial x^0)_{x^0=0}$ ($i, j = 1, 2, 3$),其中 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$ 称为中面的拉伸变形张量和弯曲变形张量.这 6 个未知量 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ 是内禀理论的基本未知量,它们满足的 3 个相容方程可由曲率张量满足的条件 $\hat{R}_{jkl} = \hat{R}'_{jkl} = 0$ 得到,而另外 3 个方程可由 3 个平衡条件得到.由此可得到 2 个张量 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ 满足的张量方程式.

1940 年 9 月,钱伟长到达加拿大多伦多大学,遇见了他的导师——应用数学家、英国皇家学会会员 Synge 教授.谈话中发现两人都在研究同一个课题,只是出发点不同,钱伟长是直接从应力应变出发来研究板壳理论,而 Synge 则从内力素出发来研究板壳理论. Synge 分别称之为“微观”方程组和“宏观”方程组,并认为,虽然这两种理论所用的符号有所不同,但实质上是等价的,并且不约而同地把薄板看成壳体的特殊情况,从而将薄板理论与薄壳理论统一了起来. Synge 提议把两种理论合在一起,写成一篇“板壳内禀理论”的论文,送往美国加州理工大学,作为 Theodore von Kármán(冯·卡门)教授 60 岁祝寿纪念文集之用.该文以 Synge 和钱伟长合作的形式于 1941 年 5 月发表在纪念文集之中.该纪念文集只发表了 21 篇论文,作者都是当时美国各界的权威科学家,例如普林斯顿大学高级研究院院长 A. Einstein 等,只有钱伟长是

一个名不见经传的中国青年,这给了钱伟长很大的鼓舞,并促使他对板壳内禀理论开展进一步的深入研究.

作为板壳内禀理论“微观”理论的继续,并把这种思路贯彻始终,钱伟长对薄板和薄壳问题进行了更系统的研究,并视薄板为薄壳的一种特殊情况.首先假定板壳由均匀各向同性线性弹性材料组成,并将应力和应变分量沿厚度方向展成 x^0 的 Taylor 级数,把它们代入 3 个协调方程和 3 个平衡方程,可得到 6 个待定函数 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$ 所满足的微分方程组.一旦得到了这些量,可由相应公式得到板壳内各点的应力应变以及内力素.和通常的板壳理论不同,在内禀理论的所有方程中均不包含位移分量 u_i ($i = 1, 2, 3$),同时未知量和方程均是用与中曲面有关的内在张量 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ 来表示的,所以内禀理论适合于在各种不同的坐标系下研究各种不同形状的薄壳和薄板问题.

当把内禀理论应用于薄板问题时,由于这时中面为平面,可得到 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ 满足的 6 个微分方程.在此基础上,假设板的厚度为小量,就可对薄板问题进行系统的分类.为此,钱伟长引入了表征板厚的小参数 ε ,板的厚度可表示成 $2h = 2\varepsilon\bar{h}(x^1, x^2)$,其中 $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, ε_1 为小量.在小应变的情况下,将作用于板上的外力也展开成 ε 的幂级数,并令 $p_{\alpha\beta} = \sum_{s=p}^{\infty} p_{(s)\alpha\beta}\varepsilon^s$, $q_{\alpha\beta} = \sum_{s=q}^{\infty} q_{(s)\alpha\beta}\varepsilon^s$, $p > 0, q \geq 0$ 为正整数.将外力和 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ 的展开式代入 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ 满足的方程组,比较 $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ 和 h 的量级的相对大小,取出主部,可得到对应于不同类型薄板问题的方程组.进而,根据 (p, q) 的不同组合对薄板问题进行分类,共得到 12 类(即 P1 ~ P12)薄板问题,即:

(1) 有限挠度问题: P1 ~ P3 类,它们是 p 轴上的 5 点,且有

$$q = 0, p = 1, q = 0, p = 2, q = 0, p \geq 2$$

(2) 小挠度问题: P4 ~ P8 类,它们对应于

$$q \geq 1, p = 1, q = 1, p = 2, q \geq 1, p = 2, q \geq 1, p \geq q$$

(3) 小小挠度问题: P9 ~ P11 类,对应于

$$q \geq 2, 2q \geq p \geq 2$$

(4) 零挠度问题: P12 类,对应于 $q = \infty$.

通常的广义平面问题、Kirchhoff 小挠度理论、von Kármán 大挠度理论、薄膜问题可分别由

P_{12}, P_{11}, P_5 和 P_4 导出, 而有限挠度问题 $P_1 \sim P_3$ 是一大类新的薄板问题, 它们是特别有意义的, 是在分类过程中新发现的.

对于薄壳问题, 由于中面为曲面, 故除了厚度 h 和中面特征尺寸 L 之外, 还有最小曲率半径 R . 令 $\varepsilon = h/L$, 当 $L/R = O(\varepsilon^b)$ 阶时, 若 $b \geq 1$, 称薄壳具有 b 阶的小曲率; 若 $b = 0$, 则称薄壳具有有限曲率. 这样, 可按 (p, q, b) 的组合对薄壳问题进行系统的简化与分类. 每一类都具有各自的平衡微分方程和协调方程, 共得到 35 类不同的壳体问题, 即:

(1) 具有有限曲率 ($b = 0$) 的薄壳问题: 有 8 类, 即 $SF_1 \sim SF_8$;

(2) 具有阶 $b \geq 1$ 的小曲率薄壳问题: 有 27 类, 即 $SS_1 \sim SS_{27}$;

(3) 在 27 类小曲率薄壳问题中, 有 11 类等价于薄板问题, 其特征为 $q < b$;

(4) 当 $b = 1$ 时, SS_{12} 和 SS_{27} 特别重要, 具有实用价值, 是两类新的薄壳问题.

虽然 35 类壳体问题中有些是已有的, 但也有些是过去未曾研究过的新的壳体问题, 其中尤以浅壳 SS_{12} 型方程为最重要, 并具有广泛的应用. 例如, von Kármán 和钱学森在 1939 年和 1941 年所研究的柱壳受轴向压力作用及球壳受外压力作用时的局部失稳均可看成浅壳大挠度问题, 即 SS_{12} 型问题. 当把 SS_{12} 型问题的方程应用于圆柱浅壳和浅球壳时, 可分别得到圆柱浅壳和浅球壳的非线性方程组. 特别, 当圆柱壳的半径充分大时, 相应的方程可化为薄板 von Kármán 大挠度方程. 1958 年 8 月在美国斯坦福大学召开了海洋结构力学第一届研讨会, 并出版了由 J. Norman Goodier 和 Niehstas J. Hoff 主编的《结构力学》论文集, 在文集中发表了 Y. C. Fung(冯元桢) 和 E. E. Schler 的《弹性薄壳稳定性》一文, 称钱伟长的圆柱型浅壳方程为“钱伟长一般方程”、“圆柱壳的钱伟长方程”. 此后, 这些方程统称为“钱伟长方程”.

板壳内禀理论发表之后受到弹性力学、应用数学及纯数学界的广泛重视. 自 1944 年论文发表以来, 至 1989 年, 已被引用 100 多次. R. L. Reiss, X. M. Муштар и A. C. Волъмир 等都曾在五、六十年代研究和引用过这些工作. 钱伟长先后应邀在加拿大及美国各地高等学校和有关学术会议作学术报告. 时至今日, 人们对“板壳内禀理论”仍评价很高. 例如, 1973 年, 荷兰 Eindhoven 工业大学工程力学教授 Harry S. Rutten 在他的《以渐近近似

为基础的壳体理论和设计》这一名著中多次推崇“板壳内禀理论”. 在该书的第 14 页上他这样说道: “Synge 和钱的工作, 继承了 19 世纪早期 A. Cauchy 和 S. D. Poisson 的工作, 在西方文献中重新注入了新的生命力”. 他还指出: “Synge 和钱的工作是三维理论的基本工作, 仅用力学状态的内禀应力和应变, 严格地从三维理论导出了任意形状的板壳都适用的非线性方程组. 这里在各向同性的假设下, 把应力和应变分量按厚度方向的坐标展成 Taylor 级数, 近似的二维方程只有 6 个基本待定量, 3 个代表中面拉伸应变, 3 个代表中面弯曲应变, 这是 Synge 和钱工作最重要的特点”. 1982 年 8 月在上海召开的国际有限元分析会议上, 担任执行主席的美国 R. H. Gallagher 教授在向大会介绍钱伟长时说: “钱教授有关板壳统一内禀理论的论文, 曾是美国应用力学界研究生在四、五十年代必读的材料, 他的贡献对以后的工作很有影响”. 受这些论文的影响, 在 20 世纪 60 年代还出现了不少有关三维理论的边界效应的文章, 其中有 A. E. Green, E. Reissner, E. L. Reiss 和 P. Cicala 等的工作.

1990 年以后, 钱伟长沿袭板壳内禀理论的思路, 又建立了一种非 Kirchhoff 假设的板壳理论并已取得一些成果. 可以认为板壳内禀理论是 20 世纪固体力学领域中最重大的研究成果之一.

2 弹性圆薄板大挠度问题

关于弹性圆薄板大挠度问题的研究, 是钱伟长回国后的最重要的学术成果之一, 据此他于 1955 年获得了国家自然科学二等奖, 并有钱伟长法、合成展开法流传于世.

钱伟长先生于 1946 年 6 月抗日战争胜利回国, 直到北京解放, 他在清华大学任教. 虽然教学任务繁重, 革命活动很多, 但是在这期间他仍然取得了令人瞩目的研究成果, 为我国非线性力学研究奠定了良好基础.

1947 年以前, 基于 Kirchhoff-Love 假设的薄板小挠度理论, 在各种外载荷和边界条件下, 已得到了许多问题的解, 但是由 von Kármán 1910 年提出的薄板大挠度方程长期没有找到令人满意的求解方法, 只有两个问题有人研究过: 即 1934 年, S. Way 求解了圆板大挠度的弯曲问题, 给出了幂级数解 (见 S. Way. Bending of circular plates with large deflection, *Appl. Mech.* 1934, 56: 627~636); 1942 年,

S. Levy 则给出了矩形板大挠度弯曲问题的三角级数解 (见 S. Levy. Bending of rectangular plate with large deflection, NACA Report, No. 737 (1942)). 这两种解都需要用数值方法求解无限多个系数的非线性方程组, 而且收敛速度很慢. 所以早在 1940 年, von Kármán 就提出需要给出一种工程师能够运用的解法来求解圆薄板大挠度问题. 钱伟长于 1947 年发表的论文《固定圆薄板在均匀压力作用下的大挠度问题》达到了 von Kármán 的这一要求. 在这篇论文中, 他用中心挠度作为摄动参数 (小参数), 利用摄动方法得到了问题的摄动解. 并且, 摄动的幂次越高, 解也越精确, 与 Way 的幂级数方法相比, 它具有更为简单的形式, 而且这个方法也可以推广到任意其它边界条件下的大挠度问题. 钱伟长把他得到的解与 1942 年由 Mcpherson 等所给出的实验结果进行了比较, 发现两者相吻合 (见 A. Mcpherson, W. Ramberg, S. Levy. Normal pressure tests of circular plates with clamped edges, NACA Report, No. 744 (1942)), 因此, 这个解也成为 1910 年 von Kármán 提出薄板大挠度非线性方程后获得的第一个与实验接近的解析解. 在有了电子计算机之后, 叶开沅的一个博士研究生用 S.Way 的级数解法进行了计算, 与这些数值解法相比较, 钱伟长用解析法手算所达到的精度以及方法的巧妙都令人击节赞叹, 他在摄动理论方面创建的以中心挠度为摄动参数作渐近展开的摄动解法, 国际力学界称之为“钱伟长方法”.

1948 年, 钱伟长又研究了当挠度很大时, 固定圆板在均匀压力作用下的渐近特性. 这个解的基础是 1915 年 H.Hencky 给出的薄膜解, 但是 Hencky 薄膜解与实验有 4% 的误差, 而钱伟长的解与实验则符合得很好. 长期以来, 人们都把 Hencky 薄膜解看成是挠度很大时, 圆板大挠度问题的一级近似解, 这个解只满足固定边界挠度为零的条件, 不满足转角为零的条件. 钱伟长认为这里存在边界层效应, 即在边界附近区域内, 挠度很大, 它与转角不再是同一数量级, 要弄明白在这个区域内解的结构, 必须采用“放大镜”或者“显微镜”加以细察. 他还认为, 为了求解, 不能采用通常的摄动法 (正则摄动法), 而应该另辟蹊径. 钱伟长的做法是: 首先把 Hencky 薄膜解称为外场解, 它除了不满足夹紧边界转角为零的条件外, 是在挠度很大的情况下满足夹紧边界位移为零的且全场适用的解. 其次, 他把边界法向的尺度放大, 设立边界内层坐

标, 以无量纲中心挠度为尺度参数, 并以此量进行摄动展开, 称之为内层解. 最后, 把不同尺度的外场解和内层解联合在一起来展开, 逐级满足固定边界条件, 以此研究边界层效应. 因此, 在国际上最早提出了内外层解合成地进行摄动展开的思路. 也就是说, 钱伟长对 Hencky 薄膜解进行了修正, 解决边界转角为零的问题, 从而改进了 Hencky 薄膜解. 在这一工作中, 钱伟长提出了一种新的奇异摄动法, 尽管那时国际上还没有“奇异摄动理论”这一术语. 在流体力学界, von Kármán 的老师 Prandtl 提出了边界层理论, 但是需要对边界层内外分别求解, 而后加以匹配, 而钱伟长首先提出了内外层解同时展开的思路, 成功地改进了边界层方法, 成为后来被称为合成展开法的奇异摄动方法的创始人. 直到 1956 年, 在国际上才由 Bromberg 和其他学者采用合成展开法求解了相同的问题 (例如, E. Bromberg. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 1956, 9: 633~656). 1960 年, Nayfeh 等摄动理论专家把这种方法称为合成展开法. 所以说, 钱伟长用合成展开法求解弹性圆薄板大挠度问题, 比国际上同类工作领先了 8 年.

20 世纪 50 年代初, 钱伟长和叶开沅等曾在清华大学举办薄板大挠度问题的研讨会, 是以“钱氏摄动法”为主题的研讨会, 其成果见 1954 年由科学出版社出版的《弹性圆薄板大挠度问题》论文集. 后来, 钱伟长和叶开沅又计算了多种载荷和边界条件下的圆薄板和矩形薄板大挠度问题. 参加了 1956 年布鲁塞尔举行的第九届国际理论和应用力学大会 (ICTAM'1956). 有关论著于 1957 年, 由莫斯科译文出版社译成俄文. 此后, 潘立宙在 1957 年和美国 W.A.Nash 教授 (国际非线性力学杂志主编) 在 1959 年分别用此法求解了椭圆板的大挠度问题. 胡海昌教授发现用中心挠度做摄动参数在计算集中载荷和均布载荷联合作用下圆薄板大挠度问题时, 可能会遇到中心挠度为零的困难, 1980 年钱伟长和黄黔用均方根挠角作摄动参数顺利解决了这个困难. 1985 年, 钱伟长与陈山林发表了“合成展开法求解圆薄板大挠度问题”的文章, 该文采用中心最大无量纲位移为参数进行摄动展开, 提高了收敛速度, 同时所有的边界条件都在各级近似中跨级满足, 提高了结果的可靠性. 该文是用合成展开法求解圆薄板大挠度问题的一种新尝试, 也使圆薄板大挠度问题的研究工作得到了进一步的改进和完善.

钱伟长有关弹性圆板大挠度问题的研究工作和相应的求解方法,都是一些开创性工作,是对固体力学学科领域的重要贡献。

3 环壳理论及其应用

钱伟长在环壳理论及其应用方面的工作,显示了他解析建模分析、解析求解的功力,也表现了他理论联系实际的卓越能力。

圆环壳是弹性元件和其它壳体结构中常见的一种形式,在许多仪器仪表工业中有着广泛的应用。

众所周知,圆环壳方程非常复杂,难于求解。1912年 H. Reissner 和 1915年 E. Meissner 把一般轴对称壳体方程化为 2 个变量的 2 个二阶常微分方程,大大简化环壳理论的方程。20 世纪 30 年代以后, F. Tolke (1938 年), R. A. Clark (1950 年) 和 В. В. Новожилов (1951 年) 又分别采用不同的简化过程,进一步得到用复变量表示的环壳方程,虽然形式不同,但是这些方程为求解环壳提供了可能性。1979 年钱伟长等关于轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称环壳的一般解的工作则从 Reissner–Meissner 轴对称壳体方程出发,用一个统一的复变量化过程,分别导出了 Tolke, Clark 和 Новожилов 等给出的圆环壳的复变量方程,并研究了这些方程的近似性,证明了这些方程的差异都是在 Kirchhoff–Love 薄壳的假设范围之内的。如果在方程中引入一个参数 $\alpha = a/R$ (称为细度),则当 $\alpha \ll 1$ 时,环壳称为细环壳,其中 a 和 R 分别为环壳截面的半径和环壳的整体半径。在这篇论文中,钱伟长得到了细环壳方程的齐次解,并证明了解的收敛性,这是前人没有得到过的一个新的解。把它与 1951 年 Новожилов 求出的非齐次解结合在一起,可以得到细环壳方程的一般解,并可用于波纹管等弹性元件的计算。之后,钱伟长等将研究细环壳方程的一般解的方法推广到求解一般的圆环壳方程,于 1980 年给出了轴对称圆环壳的一般解。这里,放弃了 $\alpha \ll 1$ 的假设,提出了轴对称圆环壳在 $0 \ll \alpha < 1$ 范围内的一般解,这个解是前人从未得到过的,并可以用于波纹壳、热膨胀器、高压容器的过渡部分和波登管的计算,具有重要的实用价值。这样,钱伟长给出的圆环壳的一般解,解决了几十年来求解圆环壳方程的难题,人们普遍认为这是钱伟长的另一重要贡献。

在一些相关工作中,钱伟长先生致力于圆环壳一般解在弹性元件计算中的应用,特别应用于波纹管的变形和应力计算。例如,半圆形波纹管虽然是波纹管中最简单的一种,但是长期以来只有工程近似计算结果(如 1957 年 C. E. Turner 和 H. Ford 在美国机械工程学会会刊上发表的关于热膨胀节的计算),这些工作是以实验为基础的,所花费的人力和财力都非常巨大,一直是机械工业的沉重负担。然而,钱伟长将圆环壳的一般解应用于半圆形波纹管的计算时,得到了半圆形波纹管在轴向力作用下的变形和应力分布,它们与 Turner 和 Ford 的实验结果非常接近,即使在细度 $a \approx 0.3$ 时,细环壳极限方程得到的解与实验结果仍很接近。

在圆薄板大挠度问题的摄动解和圆环壳一般解的基础上,钱伟长和黄黔等提出了轴对称载荷下旋转壳非线性计算通用程序,应用于仪表弹性元件和波纹管补偿器等的设计,给出用壳体理论的设计方法。钱伟长于 20 世纪 80 年代,先后承接过两项国家重点攻关课题,提出了仪表弹性元件和波纹管膨胀节的理论与计算方法,如 U 形波纹管非线性特性的摄动解法、三圆弧波纹膜片的设计,以及轴对称载荷下旋转壳弹性元件的非线性计算通用程序等。钱伟长把所获得的关于轴对称圆环壳的理论成果直接应用于波纹壳和波纹管等工程技术领域,解决了这些领域中长期未能解决或者未能很好解决的关键技术问题,成为相关技术领域的新起点,也为我们树立了理论联系实际的好榜样。

4 广义变分原理及其在有限元计算中的应用

钱伟长对广义变分原理的研究是另一项享誉世界的成就,这些广义变分原理为相应的有限元方法奠定了理论基础,而后者在科学技术领域中的许多问题的数值求解中有着非常重要的作用。在这方面,国际上有两个学术中心的工作特别引起各国学者的注意,一是美国麻省理工学院的 E. Reissner、鹫津久一郎和卞学鐸等的工作;二是钱伟长和胡海昌等中国学者的贡献。

为了说明问题,这里仅以线性弹性力学静力学问题为例来说明钱伟长广义变分原理的思想。

众所周知,线性弹性力学静力学问题归结为求位移 u_i 、应变 ε_{ij} 和应力 σ_{ij} 等 15 个未知变

量的如下边界值问题的解, 即

$$\sigma_{ij,j} + f_j = 0, \quad V \text{ 内} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad V \text{ 内} \quad (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad \frac{\partial W^c}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}, \quad V \text{ 内} \quad (3)$$

其中, $W(\varepsilon_{ij}) + W^c(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, 而 $W(\varepsilon_{ij})$ 和 $W^c(\sigma_{ij})$ 分别为弹性体 V 的应变能和余应变能密度. 边界条件为

$$S_\sigma: \quad \sigma_{ij}n_j = \bar{X}_i \quad (4)$$

$$S_u: \quad u_i = \bar{u}_i \quad (5)$$

并且弹性体 V 的表面 $S = S_\sigma + S_u$. 这里, 式 (1)~(3) 分别是平衡微分方程、应变位移关系和应力应变关系, 而式 (4) 和 (5) 分别为给定表面力和表面位移的边界条件. 但是求这 15 个变量的边值问题的解一般是非常困难的, 因此人们往往采用另外一条更方便、更有效的途径来求解, 那就是变分原理. 在弹性力学中最基本的变分原理就是最小势 (位) 能原理和最小余能原理. 在这个过程中, 首先需要建立自变函数满足的某一泛函, 还要求这些自变函数事先满足某些约束条件, 它们是方程 (1)~(3) 和边界条件 (4) 和 (5) 的一部分. 人们要求从满足约束条件的自变函数中求得使泛函取驻值 (这里是最小值) 的函数. 然后通过变分, 得到自变函数满足的微分方程 (称为 Euler 方程) 和边界条件 (称为自然边界条件). 事先满足的约束条件和 Euler 方程、自然边界条件一起构成求解弹性力学静力学问题的全部方程和边界条件 (1)~(5). 例如, 在通常的最小势能原理中, 要求自变函数事先满足应变位移关系 (2) 和边界条件 (5), 而最小势能原理的泛函为

$$\Pi_p = \iiint_V (W - f_i u_i) dv - \iint_{S_\sigma} \bar{X}_i u_i ds \quad (6)$$

通过对泛函 Π_p 取极值 $\delta\Pi_p = 0$ 得到的 Euler 方程和自然边界条件则为平衡微分方程 (1) 和边界条件 (4). 可见, 最小势能原理是有约束条件的变分原理, 如何将事先满足约束条件的最小势能原理变为无约束条件的广义势能原理呢? 钱伟长先生将求函数极值条件的拉格朗日乘子 (Lagrange multiplier) 法推广到求具有约束条件的泛函的条件极值, 这是变分原理的一大突破.

具体的做法是 (仍然以最小势能原理为例, 对于最小余能原理是类似的): 首先根据自变函数满足的约束条件建立最小势能原理需要的泛函式 (6) (虽然, 按照弹性理论的观点, 最小势能原理和最小余能原理中的泛函是可以根据物理意义和类比的方法写出来的, 但是钱伟长直接从自变函数满足的约束条件出发的另一途径给出了同样的泛函, 而且这种途径更一般, 有利于在流体力学等学科中推广), 其次引入适当的拉格朗日乘子以便解除约束. 例如, 为了解除约束方程 (2) 和条件 (5), 引入拉格朗日乘子 λ_{ij} 和 μ_i , 一般它们是坐标的待定函数, 其个数决定于约束条件的个数; 并构造一个新的泛函

$$\begin{aligned} \Pi_p^* = & \iiint_V (W - f_i u_i) dv - \iint_{S_\sigma} \bar{X}_i u_i ds - \\ & \iiint_V \lambda_{ij} (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})) dv + \iint_{S_u} \mu_i (u_i - \bar{u}_i) ds \end{aligned} \quad (7)$$

这个新泛函的自变函数除了包括原来的自变函数之外, 拉格朗日乘子 λ_{ij} 和 μ_i 也是其自变函数, 它们是应该参加变分运算的.

为了识别拉格朗日乘子 λ_{ij} 和 μ_i , 对新泛函 (7) 取极值, 并实行变分运算, 即令 $\delta\Pi_p^* = 0$. 注意到 $\delta u_i, \delta\varepsilon_{ij}, \delta\lambda_{ij}$ 和 $\delta\mu_i$ 的任意性, 由此可以识别拉格朗日乘子 $\lambda_{ij} = \sigma_{ij}$ 和 $\mu_i = -\sigma_{ij}n_j$ (S_u 上的表面力). 把所识别拉格朗日乘子代入式 (7), 便得到无约束条件的最小势能原理的广义变分原理的泛函.

我们看到, 钱伟长建立广义变分原理的过程是非常一般的程式化过程, 这个过程可概括为: 首先从原来有约束条件的变分极值原理 (例如, 最小势能原理和最小余能原理等) 的泛函出发; 然后引入待定的拉格朗日乘子解除约束条件, 构造一个新的泛函, 把原来的有约束条件的变分极值原理化为无条件的变分驻值原理; 再识别的拉格朗日乘子, 其过程是通过对新泛函取变分驻值条件, 变分后得到拉格朗日乘子用原有自变函数表示的表达式; 最后将所识别的拉格朗日乘子代入所构造的新泛函, 由此就得到广义变分原理的泛函.

然而, 以往人们建立变分原理的泛函时, 大都是先验的或者是凑出来的, 再通过取极值或驻值来进行验证. 1964 年, 钱伟长按照他建立的广义变分原理的思路和程式, 把拉格朗日乘子法应用

到壳体理论,用变分原理导出壳体的非线性方程,并把以“关于弹性力学的广义变分原理及其在板壳问题上的应用”为题的论文投给《力学学报》,可惜当时未能得到发表.1968年,鹭津久一郎出版的《弹塑性力学中的变分法》一书中,才开始应用拉格朗日乘子法,但未用泛函驻值条件决定待定乘子.直到1977年,O. C. Zienkiewicz在《有限元法》一书中才明确地把Courant和Hilbert经典著作中有关变分约束条件的待定拉格朗日乘子法加以讲解和应用到弹性力学变分原理中.但是,比起钱伟长1964年的工作已晚了15年.

继1964年的工作之后,1978年,钱伟长发表了“弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用”,受到力学界的普遍重视.为了消除人们在建立变分原理的泛函时发生的困扰,在该文中,钱伟长不仅系统讨论了拉格朗日乘子法在建立泛函条件极值问题中的应用,而且从线性弹性力学的两个最基本的变分原理出发,详细说明了如何利用拉格朗日乘子逐级解除约束条件,来建立最小势能原理和最小余能原理的各级不完全的、以至最后建立完全的广义变分原理的过程,并证明了这两类完全的广义变分原理的等价性.在这些广义变分原理中,也包括Hellinger-Reissner、胡海昌-鹭津久一郎的变分原理.为了推动我国变分原理和有限元方法的研究,促进拉格朗日乘子法在变分原理中的应用,推动协调元、杂交元和混合元的发展和运用,在这一论文中,钱伟长还讨论了广义变分原理在有限元计算中的应用.他在全国各地多次开设讲座,宣讲了他的工作.例如,1979年他在清华大学为北京高校和有关结构部门开设了《变分法与有限元》讲座,还专门为此写了讲义.

钱伟长还把广义变分原理推广到大位移和非线性弹性体;提出以进入泛函而消除掉的微分方程或约束条件为依据的分类原则;为了解决变分中拉格朗日乘子为零的临界变分的困难,提出高阶拉格朗日乘子法,进一步推广和发展了拉格朗日乘子法,为加权残数法中的罚函数法提供了理论依据,改变了加权残数法与变分原理无关的传统见解;在非协调元中采用识别了的拉格朗日乘子法,从而减少了和待定乘子有关的自由度,相关论文发表在美国《应用力学进展》等重要杂志上或者专著中.除了应用于固体力学,他还把广义变分原理广泛应用于流体力学、传热学、电磁学、振

动、断裂力学以及一般力学的理论和实践问题.

需要说明的是,钱伟长对有限元方法也有许多的建树,特别是他于1984年发表于美国《应用力学进展》的以广义变分原理为基础的非协调薄板有限元工作,更有特殊的意义.其中,他在非协调元中采用识别了的拉格朗日乘子法,从而减少了与待定乘子有关的自由度,被世人公认为是一项国际上重要的进展和贡献.

钱伟长因在广义变分原理方面的成就于1982年再次获得国家自然科学二等奖.

5 奇异摄动方法

钱伟长在奇异摄动理论与方法做出了出色的工作,是他在应用数学方面的重要贡献.

钱伟长在《奇异摄动理论及其在力学中的应用》(钱伟长主编,科学出版社,1981)一书的序言中写道:“自第二次世界大战以来,力学的分析方法在两个方面,即在广义变分原理和奇异摄动理论方面有重要的发展.前者配合着计算机的出现,为有限元提供了广阔的工作园地;后者基本上满足了力学由线性区域进入非线性区域所必须的有效手段.力学工作者利用这个新的手段,对许多力学现象有了前所未有的理解.”

目前奇异摄动理论已成为应用数学的一个重要方法,它不仅在力学的多个分支中有着广泛的应用,而且在理论物理的各个分支也起着日益重要的作用.

奇异摄动理论是在发展中逐步形成的,当物理、力学或其他工程科学问题中出现无量纲小参数时,利用摄动法或小参数展开法作渐近展开,往往会得到简单而有效的结果,同时这种方法可以用来处理复杂的非线性问题,但是,通常正则摄动法在:(1)无限域的场函数问题;(2)场函数和它的各阶导数不是同量级的问题;(3)场函数的微分方程由于正则摄动引起方程类型变化的问题;(4)场函数的微分方程的系数中有转向点的奇点问题中,就不能得到在求解区域内一致有效的渐近展开式,于是,各种奇异摄动理论就应运而生.奇异摄动方法是一种渐近分析方法,它的优点是能给出足够正确的解的解析结构,其结果常能用来进行物理问题的定性且近似定量的讨论.这种优点是数值解做不到的.因此,奇异摄动理论越来越受到国际学术界的重视,应用范围也越来越广,从而逐步形

成了较完整的理论。

为了推动奇异摄动理论在我国的应用和发展, 钱伟长早在 1979 年 5 月, 在上海主持召开“理性力学讲学讨论会”, 其主题就是奇异摄动理论, 并担任会议文集主编, 为文集写序。后来, 于 1979 年 9 月起又在清华大学开设“奇异摄动理论”讲座, 于 1980 年 11 月和 12 月在重庆开设“奇异摄动理论”讲座等等。

钱伟长不仅对推动我国奇异摄动理论的发展做出了重要贡献, 他本人在奇异摄动理论及其在力学中的应用方面就进行过开创性和奠基性的工作。通常人们普遍认为, 钱伟长有关奇异摄动法的第一篇文章是 1948 年求解“固定圆板在均匀压力作用下的渐进特性”的文章, 即以 Hencky 薄膜解为基础的, 研究当挠度很大时固定圆板在均匀压力作用下的渐近特性的文章。他最早发现了边界层效应, 即在边界附近场函数(挠度)与场函数的一阶导数(转角)为不同量级的情况, 致使薄膜解不能满足转角为零的边界条件。为了解决这个问题, 他以 Hencky 薄膜解为外场解(全场都适用, 而且满足边界挠度为零的条件)为基础, 然后, 把边界法向尺度放大, 设立边界内层坐标, 以无量纲中心挠度为尺度参数, 进行摄动展开, 并称为内层解。将外场解和内层解联合成起来以便满足边界转角为零的条件, 解决边界层效应。钱伟长的这篇文章发展了“奇异摄动法”, 奠定了后来人们称之为“合成展开法”的基础。但是, 就钱伟长本人的看法, 他于 1945 年在美国加州理工大学航空系召开的超音速动力学研究会上, 所作的关于“超音速之对称圆锥型流动的渐近解法”的报告中就采用了一种当时尚未被公认的奇异摄动法, 后来此报告于 1947 年以“Symmetrical conical flow at supersonic speed by perturbation method”为题发表在清华大学工程学报第 3 卷第 1 期, 1~14 页上(发表时修正了文中方程(8)中的系数, 增加了因子 $1/2$)。然而, 不管怎样钱伟长用这种“合成展开法”研究挠度很大时圆板的大挠度问题的渐近解的文章, 比国际上同类工作领先 8 年, 是国际上有关奇异摄动理论的最早少数著作之一。20 世纪 50 年代, 郭永怀把 Poincaré-Lighthill 方法成功推广应用于有边界效应的黏性流问题, 林家翘在 1954 年对双曲型微分方程问题提出了通常称为解析特征线法的奇异摄动理论, 钱学森在 1956 年深入阐释了这个方法的重要性, 并称之为 PLK 方法。之后, 奇异摄

动理论受到重视, 被认为是摄动法的新领域, 成为求解科学技术中非线性问题的重要途径。

6 对我国理性力学的贡献

钱伟长是我国理性力学的倡导者、开拓者和推动者, 是理性力学与力学中的数学方法专业委员会的奠基人。

早在 20 世纪 30 年代末 40 年代初, 他首先采用拖带坐标系通过张量分析的手段, 把薄板看成是薄壳的一种特殊情况, 建立了以度量张量的改变量表示的板壳统一内禀理论, 对固体力学和理性力学的发展有着重大的影响。钱伟长于 1948 年和 1956 年最先研究了扁球壳的跳跃变形问题, 指出了当扁球壳在非线形跳跃失稳后将获得新的平衡路径, 如果从新的平衡状态卸载, 会在另一新的临界载荷下突然恢复原状。在 20 世纪 50 年代前后, 钱伟长发表的圆板大挠度问题的相关论文, 以及钱伟长、林鸿荪、胡海昌和叶开沅合著的《弹性圆板大挠度问题》都是非线性力学最早的代表作之一。因此, 钱伟长是我国最早涉足于理性力学和非线性力学, 用近代数学的工具来获得非线性问题解的奠基人之一。

作为一位力学家和应用数学家, 钱伟长也是我国最早提出并进行理性力学研究的人。1977 年, 钱伟长、谈镐生和陈宗基等老一辈科学家发起在我国开展理性力学的研究, 并建议成立一个专业组或专业委员会, 以推动理性力学在我国的传播和发展, 推动非线性力学的发展, 推动边缘学科的发展, 促进力学和其他学科的交叉, 促进现代数学和力学的结合, 培养一大批有真才实学的年轻人, 使我国的非线性科学达到世界先进水平。

1979 年中国力学学会决定成立理性力学与力学中的数学方法专业组, 钱伟长任第一任组长。1985 年专业组改成专业委员会, 正式命名为“理性力学与力学中的数学方法专业委员会”。最近 30 多年, 钱伟长为推动我国理性力学和非线性力学的发展、促进现代数学和力学的结合进行了艰苦卓越的工作, 理性力学在我国也取得了举世瞩目的成就!

1978 年由钱伟长在兰州主持的“全国理性力学讲习班”上, 他亲自讲授“张量的内禀理论”(10 讲), 苗天德、程昌钧和俞焕然介绍了“理性力学的基本概念和理论”(12 讲), 以及其他 6 个相关数学

专题报告. 并决定翻译出版德冈辰雄 [日] 著的“理性连续介质力学入门 (连载)”, 该书由赵镇、苗天德和程昌钧翻译, 于 1982 年由科学出版社出版. 这次讲习班吹响了我国学者学习理性力学、开展理性力学研究的号角. 之后, 钱伟长几乎每年都要亲自主持一次全国性学术会议, 来推动现代数学和力学的结合与发展, 例如 1979 年 5 月, 他在上海主持召开“理性力学讲学讨论会”, 来推动奇异摄动理论的发展, 并任会议文集主编 (该文集命名为《奇异摄动理论及其在力学中的应用》, 1981 年由科学出版社出版). 1980 年 8 月, 兰州大学叶开沅教授邀请 A. C. Eringen 教授来华进行系统的讲学, 内容包括“微极连续统的理论和应用”、“连续统的局部和非局部理论和应用”、“液晶理论”和“非线性波的传播”等. 期间钱伟长领导的理性力学和力学中的数学方法专业组决定翻译出版 A. C. Eringen 著“连续统力学”及他主编的“现代连续统物理系列丛书”(17 分册). 前者由程昌钧和俞焕然翻译, 戴天民校, 并于 1991 年由科学出版社出版, 后者由国内学者联合翻译, 于 1982 和 1984 年间由江苏科技出版社出版, 其中第 1 分册《张量分析》就是由钱伟长亲自翻译出版的. 钱伟长还为出版这套丛书和《张量分析》写了序. 1982 年, 钱伟长 in 无锡又亲自主持召开了“全国非线性力学会议”, 1983 年, 他在武汉主持了主题是“分岔、突变和稳定性学术会议”, 还亲自主编了会议文集:《非线性力学的新发展——稳定性、分岔、突变、混沌》, 并为该书写了序 (该书于 1988 年由华中理工大学出版社出版). 这些讲习班和会议为培养我国从事理性力学和非线性力学研究的一代新人奠定了坚实的基础.

更早一些, 钱伟长与郭仲衡、戴天民合作为《中国大百科全书·力学卷》写了理性力学词条 (见 1985 年 8 月中国大百科全书出版社出版的《中国大百科全书·力学卷》, 288~290), 详细介绍了理性力学的定义、发展过程、科学内容、以及与其他学科的关系等.

特别需要强调的是, 在钱伟长的亲自领导下, 由理性力学和力学中的数学方法专业 (组) 委员会发起并成功举办了两个著名的、影响深远的系列学术会议, 即全国现代数学和力学 (modern mathematics and mechanics, MMM) 会议和国际非线性力学会议 (international conference on nonlinear mechanics, ICNM).

自 1986 年在北京召开第一届 MMM 会议以

来, 平均每 2 年举办一次 MMM 会议, 至今已成功组织召开了 12 届 MMM 会议, 出版了 12 本会议文集, 发表论文约 1300 篇, 专题与综述性报告 160 多个, 参加会议人数 1500 余人次. 这些会议展现了我国现代数学和力学所取得的丰硕成果, 也展现非线性力学学术队伍的不断成长和壮大. 1985 年钱伟长在上海亲自主持召开了第 1 届 ICNM 会议, 作为会议的主席, 在他的亲自主持和指导下, 至今已成功地召开了 5 届高规格和高水平的 ICNM 会议. 每届 ICNM 会议都出版了文集, 总计发表论文约 1200 篇, 其中专题与综述性报告 100 余篇. 参加会议代表约 1000 人次, 外宾 300 余人次. 通过这些 ICNM 会议, 使我国学者在理性力学、非线性力学、现代数学和力学的结合等方面的工作和所发表的文章得到了国际力学界同行的充分肯定, 许多成果被认为达到了国际先进水平.

无论是 MMM 系列会议还是 ICNM 系列会议, 钱伟长不仅和大家一起讨论会议的主题, 而且只要可能, 他总是会亲临大会, 对大会进行指导, 倾听大会报告, 与代表讨论问题. 他多次担任会议文集的主编或为会议文集写序, 例如, 钱伟长亲自为 1991 年兰州 MMM-4 会议文集作序, 同时在会议开幕式上作了题为《数学、力学与实践的关系》的报告 (见文后的论著 [17] 的 216~236 页), 这些都为世人留下了宝贵的财富.

钱伟长为推动我国理性力学的发展付出了艰辛的努力, 如今理性力学在我国已经得到了很大的发展, 取得了巨大的成绩. 单是我国学者出版的相关专著、译著或研究生教材就不下 20 种 (见程昌钧, 理性力学在中国的传播与发展, 力学与实践, 2008, 30(1): 10~17), 由他创办的“理性力学和力学中的数学方法专业 (组) 委员会”也一届一届地传递着, 这是钱伟长应该感到高兴和欣慰的!

7 对力学和应用数学其他方面的贡献

钱伟长对力学和应用数学的贡献是全面的, 除了上面提到的几个重要方面之外, 他在流体力学、穿甲力学、三角级数的求和、微分方程的理论及其解法等方面也做过一些重要的工作 (见文后的参考文献).

早在 20 世纪 40 年代中期, 钱伟长在“超音速之对称圆锥型流动的渐近解法”的工作中, 巧妙地采用幂级数 - 对数函数的混合序列的摄动展开法

给出了高速空气动力学超音速锥流的渐近解, 改进了 Th. von Kármán 和 N. B. Moore 给出的线性近似解, 与 G. L. Taylor 和 J. W. Maccoll 的数值结果相吻合. 过去, 人们在渐近序列中一般采用幂级数, 钱伟长在这里采用了幂级数 - 对数函数的混合序列, 因此, 钱伟长的工作拓宽了渐近序列的范围, 对摄动法是一项重大突破. 1949 年钱伟长基于滑板间黏性流体层很薄的特点, 以流体特征厚度为小参数摄动展开, 用 3 个简化假设, 从流体力学的纳维 - 斯托克斯方程出发导出了润滑问题的高阶雷诺型方程, 并建立相应的变分表达式, 是润滑流体动力学早期的成功之作.

1984 年, 钱伟长从流体力学的基本方程出发, 对内流、外流等一般的黏性流动建立了更为普遍的变分原理, 对不可压缩流体和可压缩流体分别建立了最大功率消耗原理. 并以运动方程为基础, 用拉格朗日乘子法消除诸如物态方程、连续性方程及边界条件等变分约束条件, 建立了无约束条件的广义变分原理. 从而把固体力学中变分原理方法推广到黏性流体力学, 奠定了流体力学中有有限元方法的基础.

钱伟长在 20 世纪四、五十年代的其它一些著作, 例如他与 von Kármán 合作发表的《变扭的扭转》文章, 是 von Kármán 一生中最后一篇固体力学的著作, 被他认为是一生所写的最富有经典气息的文章, 受到国际学术界的重视. 他与叶开沅教授等合作出版的《弹性柱体的扭转理论》、《弹性力学》和《变分原理及有限元》(上册) 等著作对我国力学界和工程界有着深远的影响, 特别是《弹性力学》, 它是 20 世纪五、六十年代我国力学专业的重要教材, 影响和造就了我国力学的几代人.

8 对培养我国力学人才的贡献

前面, 从力学和应用数学的学术方面回顾了钱伟长先生对近代力学的重大贡献, 然而作为我国近代力学的奠基人之一, 钱伟长在成立我国一些重要力学学术组织、培养我国力学人才方面也做出了巨大的贡献. 北京大学武际可教授于 2010 年 8 月 6 日的博客“钱伟长对我国力学事业的贡献”有过一些论述, 这里摘要并补充, 与大家分享. 主要包括: (1) 钱伟长和周培源、钱学森、郭永怀 4 位力学家一起被誉为我国近代力学的奠基人, 他们为我国航空航天事业、现代化国防准备了人才

和学术基础. (2) 钱伟长先生于 1951 年在中国科学院成立数学研究所时, 创建了我国第一个力学研究室, 并任第一任室主任. (3) 1952 年钱伟长积极支持在北京大学数学力学系成立我国第一个力学专业. (4) 在数学研究所的力学研究室的基础上, 钱伟长和钱学森于 1956 年创办了我国第一个力学研究所——中国科学院力学研究所, 所长为钱学森, 副所长为钱伟长. (5) 1957 年, 中国科学院力学研究所与清华大学联合举办了 3 期力学培训班, 简称“力学班”, 钱伟长亲自参与创办了“力学班”. 他和郭永怀先后担任班主任, 为我国培养了一大批力学急需人才. (6) 1957 年中国力学学会成立, 钱伟长任第一任副理事长. (7) 1979 年组建中国力学学会理性力学与力学中的数学方法专业组, 任第一任组长, 专业组后改为专业委员会, 连任两届顾问. 并创办了两个重要系列学术会议, 即全国现代数学和力学 (MMM) 会议和国际非线性力学会议 (ICNM). (8) 1980 年创办《应用数学和力学》杂志, 任主编. 据统计创刊初期的 57 位编委中, 后来有 8 位两院院士、8 位副校长、校长乃至副省长, 所有编委都成了学术骨干. (9) 1984 年, 创建上海市应用数学与力学研究所, 任所长. (10) 从 20 世纪 70 年代开始, 在全国举办了 50 多期应用数学和力学讲座和讲习班, 广泛传播力学和应用数学的重要理论和科学进展, 听讲者数千人次.

钱伟长 1954 年任中国科学院学部委员, 1955 年任中国科学院学术秘书. 从 20 世纪 50 年代开始就亲自指导研究生, 曾经指导陈至达、叶开沅、潘立宙等 18 名研究生, 80 年代以来, 他又指导了陈山林、黄黔、周哲玮等 50 多名研究生. 并亲自为 3 期力学研究班近 300 名学员授课, 而他们中的许多人后来成为我国著名的力学家.

由上面这些事实看到, 钱伟长不仅在学术研究方面对力学和应用数学进行了多方面的开创性和奠基性的工作, 取得了举世瞩目的研究成果, 成为科学宝库的明珠, 为世人留下了珍贵的财富. 同时, 他在推动我国力学和应用数学的发展、培养我国力学和应用数学的人才等方面也进行了许多艰苦而卓越的工作. 钱伟长先生对力学和应用数学的贡献是巨大的, 如今, 他走了, 永远地离开了我们, 但是他为世人留下的丰碑将永远屹立于人们的心中.

谨以此文表示对钱伟长先生的深切悼念之情!

致 谢: 感谢戴世强、黄黔、周哲玮、郭兴明、张俊乾等教授的建议和提供的资料; 也感谢朱媛媛副教授和胡育佳博士后细心全面地收集和整理了钱伟长先生关于力学和应用数学的论著目录, 见附录 1 和 2.

附录 1 钱伟长关于力学和应用数学的论著目录

- 1 Tsien Weizang, Ku Hanchang. Atmospheric electricity in Peking. Annual Meeting of Chinese Society of Physics, Presented in Qingdao, June 1935
- 2 Tsien Weizang. The spectrum of double ionized calcium(CaIII). *Chinese Journal of Physics*, 1937, 3(1): 1~15
- 3 Tsien Weizang. Analysis of the spectrum of singly ionized cerium. *Chinese Journal of Physics*, 1939, 4(1): 89~116
- 4 Tsien Weizang. Highly ionized potassium and calcium spectra. *Chinese Journal of Physics*, 1939, 4(1): 117~147
- 5 Chien Weizang, Syngge J L. The intrinsic theory of elastic shells and plates. *Applied Mechanics, Theodore von Karman Anniversary Volume*, 1941, 103~120
- 6 Chien Weizang. The intrinsic theory of elastic shells and plates. [Ph.D Dissertation]. Canada: University of Toronto, 1942. 219
- 7 Chien Weizang. The resistances of antennae of various shapes and positions in rectangular and circular wave guides. National Research Council of Canada, Special Committee on Applied Math., Radio Report No.5, Feb. 1943. 13
- 8 Chien Weizang. The reactance, matching conditions and matching resistance of a circular wave guides in the cases of a E01 wave. National Research Council of Canada, Special Committee on Applied Math., Radio Report No.6, Mar. 1943. 18
- 9 Weinstein A, Chien Weizang. On the vibrations of a clamped plate under tension. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1943, 1(1): 61~68
- 10 Chien Weizang. The intrinsic theory of thin shells and plates, part I: General theory. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1944, 1(4): 297~327
- 11 Chien Weizang. The intrinsic theory of thin shells and plates, part II: Application to the plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1944, 2(1): 43~59
- 12 Chien Weizang. The intrinsic theory of thin shells and plates, part III: Application to thin shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1944, 2(2): 120~135
- 13 Chien Weizang. The trajectories of missile XF10S1000. Progress Report, No. 4-1, Jet Propulsion Laboratory(JPL), Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology(GALCIT), Pasadena, California, USA, Feb. 1944
- 14 Chien Weizang. Differential corrections for the rocket trajectories. Progress Report, No. 4-2, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, April 1944
- 15 Chien Weizang. The trajectories of the missile Wac Corporal. Progress Report, No. 4-5, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, June 1944
- 16 Chien Weizang. Testing report on missile Wac Corporal. Progress Report, No. 4-8, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, Sept. 1944
- 17 Chien Weizang. The trajectories of the missile XF30L2000(corporal). Progress Report, No. 4-7, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, Jan. 1945
- 18 Chien Weizang. The dynamics of parachutes. Progress Report, No. 4-9, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, Feb. 1945
- 19 Chien Weizang. The calculation of satellite orbits. Progress Report, No. 7-1, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, April 1945
- 20 Chien Weizang. The loss of altitude per revolution in satellite orbit. Progress Report, No. 7-3, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, June 1945
- 21 Chien Weizang. The trajectories of missile Corporal E (11000 lb). Progress Report, No. 4-12, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA. Oct. 1945
- 22 Chien Weizang. Aerodynamic coefficients of Wac Corpora. Progress Report, No. 4-15, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, Nov. 1945
- 23 Chien Weizang. Preliminary report on the snapping pressure of a thin spherical cap (未公开发表), 1945. 本文主要内容已由科学出版社 1954 年出版的《圆薄板大挠度》一书 76~98 页 (胡海昌“球面扁薄圆壳的跳跃问题”一文) 中详细引用
- 24 Chien Weizang. Design formulas for the snapping pressure of a thin spherical cap(未公开发表), 1945. 本文主要内容已由科学出版社 1954 年出版的《圆薄板大挠度》一书 76~98 页 (胡海昌“球面扁薄圆壳的跳跃问题”一文) 中详细引用
- 25 Chien Weizang. Estimated values of the aerodynamic coefficients of the Corporal E. Progress Report, No. 4-20, JPL, GALCIT, Pasadena, California, USA, Feb. 1946
- 26 Th von Karman, Chien Weizang. Torsion with variable twist. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1946, 13(10): 503~510
- 27 Infeld L, Smith V G, Chien Weizang. On some series of Bessel Functions. *Journal of Mathematical Physics*, 1946, 26(1): 22~28
- 28 Chien Weizang. Symmetrical flow at supersonic speed by perturbation method. *The Engineering Reports of National Tsinghua University*, 1947, 3(1): 1~14
- 29 Chien Weizang. Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure. *Chinese Journal of Physics*, 1947, 7(2): 102~113
- 30 Chien Weizang, Ho S T. Asymptotic method on the problems of thin elastic ring shells with rotational symmetrical load. *The Engineering Reports of National Tsinghua University*, 1947, 3(2): 71~86
- 31 Chien Weizang. Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection. *The Science Reports of National Tsinghua University, Series A*, 1948, 5(1): 71~94
- 32 Chien Weizang. Derivation of the equations of equilibrium of an elastic shell from the general theory of elasticity. *The Science Reports of National Tsinghua University, Series A*, 1948, 5(2): 240~251
- 33 Chien Weizang. The true leaving angle for diaphragm and bucket wheel with curved guides at the discharge end. *The Engineering Reports of National Tsinghua University*, 1948, 4(1): 78~102
- 34 Chien Weizang, Infeld L, Pounder J R, Stevenson A F, Syngge J L. Contributions to the theory of wave guides. *Canadian Journal of Research*, 1949, A27: 69~129
- 35 Chien Weizang. Hydrodynamic theory of lubrication for plane sliders of finite width. *Chinese Journal of Physics*, 1949, 7 (4): 192~229
- 36 钱伟长, 陈至达. 压延理论. *中国物理学报*, 1953, 9(2): 57~92

- 37 Chien Weizang, Chen Chihta. Theory of rolling. *Acta Scientia Sinica*, 1953, 1(2): 192~229
- 38 钱伟长. 圣维那扭转问题的物理假定. 中国物理学报, 1953, 9(4): 192~239
- 39 Chien Weizang. Assumptions in Saint-Venant's solution for the torsion of an elastic cylinder. *Acta Scientia Sinica*, 1953, 3(2): 165~170
- 40 钱伟长. 不均等的连续梁. 中国物理学报, 1953, 9(3): 170~182
- 41 Chien Weizang. Continuous beams with non-uniform stiffness. *Acta Scientia Sinica*, 1953, 2(2): 116~126
- 42 钱伟长. 轴对称圆薄板在大挠度情况下的一般理论. 见: 弹性圆薄板大挠度问题, 中国科学院数学研究所力学研究室专刊乙种的一号力学论文集, 第一辑, 1954. 1~22
- 43 钱伟长. 圆薄板大挠度问题的摄动法. 弹性圆薄板大挠度问题, 见: 中国科学院数学研究所力学研究室专刊乙种的一号力学论文集, 第一辑, 1954. 37~55
- 44 钱伟长, 叶开沅. 圆薄板大挠度问题. 中国物理学报, 1954, 10(3): 209~238
- 45 Chien Weizang, Yeh Kaiyuan. On the large deflection of circular plate. *Acta Scientia Sinica*, 1954, 3(4): 405~436
- 46 钱伟长, 叶开沅. 圆薄板大挠度问题的设计资料. 中国机械工程学报, 1955, 3(1): 15~35
- 47 Пянь Вэй-чжан, Классические построения Китая, Вопросы Истории Естественного Знания и Техники, Вып. 1, 1956, 124~136, Издательство Академии Наук СССР, Москва
- 48 Chien Weizang. Problem of large deflection of circular plate. *Archiwum Mechaniki Stosowanej, Warszawa*, 1956, 8(1): 1~12
- 49 Chien Weizang, Yeh Kaiyuan. On the large deflection of rectangular plate. Presented on IX International Congress of Applied Mechanics, Brussels, 1956, and Published in the Proceedings of IX International Congress of Applied Mechanics, Brussels, 1956, 403~412
- 50 Chien Weizang, Hu Haichang. On the snapping of a thin spherical cap. Presented on IX International Congress of Applied Mechanics, Brussels, 1956, and Published in the Proceedings IX International Congress of Applied Mechanics, Brussels, 1956, 17 pages
- 51 钱伟长, 林鸿荪, 胡海昌, 叶开沅. 弹性圆薄板的大挠度问题. 中国科学院数学研究所力学研究室专刊乙种一号力学问题论集, 第一辑, 1954; 本文在中国科学院学部成立大会学术会议上宣读, 1956
- 52 Chien Weizang. Problem of elastic circular plates in large deflection(Abstract), Abstract of the paper present in the inauguration meeting of members of Akademia Sinica, 1956
- 53 Пянь Вэй-чжан, Теории круглых пластинок Большого прогиба при осевой симметрии, Теории Гибких Круглых Пластинок, Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1957, 11~37
- 54 Пянь Вэй-чжан, Приложение метода. Возмущений к Теории Круглых Тонких Пластинок Большого Прогиба, Теории Гибких Круглых Пластинок, Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1957, 56~78
- 55 Пянь Вэй-чжан, Е Кай-юань, Приложение о больших прогибах круглых тонких пластинок, Теории Гибких Круглых Пластинок, Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1957, 178~207
- 56 钱伟长. 关于 Kirchhoff-Love 假设在古典小挠度壳理论种的近似性问题. 清华大学材料力学教研组印发, 1963
- 57 钱伟长. 关于弹性力学的广义变分原理及其在板壳问题上的应用, 1964. 当时由于力学学报拒登, 未能发表. 现已在福建教育出版社 1989 年出版的《钱伟长科学论文集》419~443 页中随同《力学学报》编委会退稿信(1964 年 10 月 6 日), 和作者给《力学学报》编委会的复信(1964 年 10 月 13 日)一并发
- 58 钱伟长. 对“半无限弹性体通过刻槽之底施以集中力的平面问题”一文的讨论. 力学学报, 1964, 7(3): 251~259
- 59 钱伟长. 电池内阻和电极电流的分布. 清华大学锌空气电池组研究报告, 1972
- 60 钱伟长. 电池和电瓶升温计算. 清华大学锌空气电池组的总结报告第 9 部分, 1972
- 61 钱伟长. 锌空气(氧)电池组的研制. 清华大学学报, 1973, 1: 37~53 (以清华大学锌空气电池组名义发表)
- 62 钱伟长. 电池和电瓶的升温及热辐射理论. 清华大学锌空气电池组研究报告, 1973
- 63 钱伟长. 车辆用锌空气电池的研制和试验. 清华大学学报, 1973 年 12 月, 1~10 (以清华大学锌空气电池组名义发表)
- 64 钱伟长. 铁路手提信号灯用锌空气电池. 清华大学学报, 1974 年 10 月, 167~178 (以清华大学锌空气电池组名义发表)
- 65 钱伟长. 关于一些三角级数之和. 清华大学学报, 1978, 18(4): 53~78
- 66 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解. 清华大学学报, 1979, 19(1): 27~47, 本文曾在 1978 年 12 月第六届弹性元件会议(上海)上宣读, 也见江苏科学技术出版社出版的《应用数学和力学论文集》, 1980, 11~30
- 67 钱伟长. 半圆弧波纹管的计算——细环壳理论的应用. 清华大学学报, 1979, 19(1): 84~89. 1978 年 12 月曾在第六届弹性元件会议(上海)上宣读, 也见江苏科技出版社出版的《应用数学和力学论文集》, 1980, 94~109
- 68 钱伟长. 波纹管的制造、设计、实验和理论. 应用数学和力学论文集, 江苏: 江苏科学技术出版社, 1979. 110~126
- 69 钱伟长. 弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用. 清华大学科学报告 TH78011(1978 年 11 月), 曾在大连召开的全国高等院校的计算结构力学会议(1978 年 9 月), 以及机械工程学会、航空学会、造船学会在蚌埠召开的全国有限元会议上宣读(主旨发言, 1978 年 11 月), 也见《力学与实践》, 1979, 1(1): 16~24, 1979, 1(2): 18~27 和机械工程学报, 1979, 15(2): 1~23
- 70 钱伟长. 环壳方程级数解的收敛性问题及其有关收敛定理的研究. 兰州大学学报力学专刊, 1979, 1~38; 《应用数学和力学论文集》, 江苏科学技术出版社, 1980, 31~68
- 71 钱伟长, 谢志成, 顾求琳, 等. 在奇异项上叠加有限元法计算应力强度因子. 清华大学学报, 1980, 20(2): 15~24
- 72 钱伟长. 两个积分公式的证明. 见: 应用数学和力学论文集. 南京: 江苏科学技术出版社, 1980. 228~232
- 73 钱伟长. $\sum_{k=1}^{\infty} [k \pm s/m]^{-1} \cos kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} [k \pm s/m]^{-1} \sin kx$ 的数值表. 见: 应用数学和力学论文集. 南京: 江苏科学技术出版社, 1980. 233~265
- 74 钱伟长. 薄壳小挠度理论的合理基础. 见: 应用数学和力学论文集, 南京: 江苏科学技术出版社, 1980. 1~10
- 75 钱伟长. 细环壳极限方程的非齐次解及其在仪器和仪表上的应用. 应用数学和力学论文集, 江苏科学技术出版社, 1980, 69~83; 仪器仪表学报创刊号, 1980, 89~112

- 76 钱伟长, 谢志成, 郑思梁, 王瑞五. 协调三角形弯曲有限元的形函数及其有关刚度矩阵. 曾于 1978 年 11 月在大连工学院召开的全国高等学校计算力学会议上宣读; 又见:《应用数学和力学论文集》, 江苏科学技术出版社, 1980, 153~166; 机械工程学报, 1980, 11(4): 1~11
- 77 钱伟长. 轴对称弹性体的有限元分析. 曾在上海交大, 济南山东工学院, 西安西北工学院报告, 1979~1980; 应用数学和力学论文集, 江苏科学技术出版社, 1980, 167~177; 应用数学和力学, 1980, 1(1), 25~35
- 78 Chien Weizang. Finite element analysis of axisymmetric elastic body problems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, 1(1): 23~33
- 79 钱伟长. 应用数学和力学创刊词. 应用数学和力学, 1980, 1(1): 1, 2
- 80 Chien Weizang. Forwards. *Applied Mathematics and mechanics*, 1980, 1(1): 1, 2
- 81 钱伟长. 16 个和 20 个自由度的四面体有限元的场函数表达式的显式. 应用数学和力学论文集, 江苏科学技术出版社, 1980, 178~182; 应用数学和力学, 1980, 1(2): 153~158
- 82 Chien Weizang. The explicit forms of field functions in tetrahedron element with 16 and 20 degrees of freedom. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, 1(2): 159~164
- 83 钱伟长, 戴福隆. 厚管板的等效弹性常数. 应用数学和力学论文集, 江苏科学技术出版社, 1980, 193~201; 力学学报, 1981, 4: 364~371
- 84 钱伟长. 有限元法的最新发展. 力学与实践, 1980, 4(2): 4~11; 1980 年 4 月在全国弹塑性力学会议(重庆)上的报告; 以及 1980 年 10 月在全国计算结构力学会议(杭州)上的报告
- 85 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的一般解. 应用数学和力学, 1980, 1(3): 287~300
- 86 Chien Weizang, Zheng Seliang. General solution of axial symmetrical ring shells. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, 1(3): 305~318
- 87 钱伟长, 郑思梁. 圆弧波纹管的计算, 环壳一般解的应用. 应用数学和力学, 1981, 2(1): 97~112; 也曾在重庆召开的全国弹塑性力学学会会上宣读, 1980.4
- 88 Chien Weizang, Zheng Seliang. The calculation of semi-circular corrugated tube—An application of general solution of ring shell. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1981, 2(1): 103~116
- 89 钱伟长, 吴明德. U 型波纹管的非线性特性摄动法计算. 在厦门召开的第七届全国弹性元件会议上宣读, 1981; 应用数学和力学, 1983, 4(5): 595~608
- 90 Chien Weizang. Incompatible plate elements based upon the generalized variational principles. International Symposium of Hybrid and Mixed Finite Element in the honor of Prof. Th. H. H. Pian. Atlanta, Georgia, USA, 1981, April 8-10, In: Atluri S N, Gallagher R H, Zienkiewicz O C, eds. Hybrid and Mixed Finite Element Method, John Wiley, 1983. 381~404
- 91 Chien Weizang. Incompatible elements and generalized variational principle. Presented in International Invitation Symposium of Finite Element at Hofe, Anhuei, at May 24, 1981; *Advances in Applied Mechanics, U.S.A.*, 1984, 24: 93~153
- 92 钱伟长. 非协调元和广义变分原理. 有限元法国际学术邀请报告会, 安徽合肥, 1981 年 5 月 24 日; 上海工业大学学报, 1985, 3: 1~44
- 93 钱伟长. 广义变分原理. 贵州省自然科学学术讲座, 1981 年 9 月; 上海工业大学应用数学和力学讲座, 1981 年 11 月 3 日
- 94 钱伟长. 非线性有限元. 贵州省自然科学学术讲座, 1981 年 9 月; 上海工业大学应用数学和力学讲座, 1981 年 11 月 3 日
- 95 钱伟长, 王志忠, 徐尹格, 等. 圆薄板中心部分受均布载荷产生的对称变形. 应用数学和力学, 1981, 2(6): 599~611; 钱伟长科学论文选集(1937~1987)
- 96 Chien Weizang, Wang Z Z, Xu Y G, et al. The symmetrical deformation of circular membrane under the action of uniformly distributed loads in its central portion. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1981, 2(6): 653~668
- 97 Chien Weizang, Xie Zhicheng, Gu Qiulin, Yang Zongfa, Zhou Chuntian. The superposition of the finite element method on the singularity terms in determining the stress intensity factor. (*An International Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 1982, 16(1): 95~101
- 98 钱伟长. 具有对角线化的一致质量矩阵的动力有限元和弹塑性撞击计算. 应用数学和力学, 1982, 3(3): 281~296
- 99 Chien Weizang. Dynamic finite element with diagonalized consistent mass matrix and elastic-plastic impact calculation. Proceeding of the International Conference of Finite Element Methods, Shanghai, 2-6, Aug, 1982, 47~56; *Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, 3(3): 319~334
- 100 钱伟长. 轴对称问题的对角线化的一致质量矩阵和弹塑性撞击的动力有限元分析. 应用数学和力学, 1982, 3(4): 429~448
- 101 Chien Weizang. Diagonalized consistent mass matrix and the dynamic finite element analysis of elastic-plastic impact in axisymmetrical problems. Read at Dalian International symposium on mixed/Hybrid Finite Element Method, 11~29, Aug.1982; *Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, 2(4): 469~489
- 102 钱伟长. 具有对角线化的一致质量矩阵的协调动力有限元. 应用数学和力学, 1982, 3(5): 565~576
- 103 Chien Weizang. Compatible dynamic finite element with diagonalized consistent mass matrix. Paper read at Dalian International Symposium on mixed/Hybrid Finite Element Method, 11~29, Aug.1982; *Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, 3(5): 609~622
- 104 钱伟长. 柱形弹体撞击塑性变形的泰勒理论的分析解及其改进. 见: 王竹溪编, 理论物理及力学论文集. 科学出版社, 1982, 73~90; 应用数学和力学, 1982, 3(6): 743~756
- 105 Chien Weizang. An analytical solution of G.I. Taylor's theory of plastic deformation in impact of cylindrical projectiles and its improvement. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, 3(6): 801~815
- 106 钱伟长. 穿甲力学的历史, 现况和尚待解决的问题. 应用力学(兵工学会), 1982, 1: 1~15; 钱伟长科学论文选集(1937~1987)
- 107 Chien Weizang, Wu Mingde. The non-linear characteristics of U shaped bellows-Calculated by the method of perturbation. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1983, 4(5): 649~665
- 108 钱伟长. 高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理. 应用数学和力学, 1983, 4(2): 137~150
- 109 Chien Weizang. Method of high-order Lagrange multiplier and generalized variational principles of elasticity with more general forms of functionals. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1983, 4(2): 143~157
- 110 钱伟长. 再论弹性力学中的广义变分原理——就等价定量问题和胡海昌先生商榷. 力学学报, 1983, 4: 325~340
- 111 钱伟长. 关于非线性力学. 力学进展, 1983, 13(2): 117~119

- 112 Chien Weizang. Generalized variational principles in elasticity. In: Borelli A P, Chong K P, eds. *Engineering Mechanics in Civil Engineering*. Academic Press, 1984. 1: 507~510
- 113 钱伟长. 黏性流体力学中的变分原理和广义变分原理. *应用数学和力学*, 1984, 5(9): 305~322
- 114 Chien Weizang. Variational principles and generalized variational principles in hydrodynamics of viscous fluids. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1984, 5(3): 1281~1296
- 115 钱伟长. 亦论广义变分原理和无条件变分原理——就本题答胡海昌先生. *固体力学学报*, 1984, 3: 461~468
- 116 钱伟长. 弹性理论中各种变分原理的分类. *应用数学和力学*, 1984, 5(6): 765~776
- 117 Chien Weizang. Classification of variational principles in elasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1984, 5(6): 1737~1743
- 118 钱伟长. 各向异性的非线性静磁场的磁能原理、余能原理以及有关的广义变分原理. *上海工业大学学报*, 1984, 3: 1~14
- 119 钱伟长, 樊大钧, 黄黔. 环壳理论与直交异性板理论在计算三圆弧波纹膜片上的比较. *应用数学和力学*, 1984, 5(1): 41~48
- 120 Chien Weizang, Fan Dajun, Hwang Chien. Comparison of the calculations of threeconvolution circular arc corrugated diaphragms by toroidal shell theory and by orthogonal anisotropic plate theory. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1984, 5(1): 1019~1027
- 121 钱伟长. 带有环向加强肋的任意截面柱壳理论. *上海工业大学学报*, 1984, 1: 1~30
- 122 钱伟长. 有加强肋的任意闭合截面(椭圆截面)柱壳的均布外压下的渐近解. *上海工业大学学报*, 1984, 2: 1~40
- 123 钱伟长. 对合变换和薄板弯曲问题的多变量变分原理. *应用数学和力学*, 1985, 6(1): 25~40
- 124 Chien Weizang. Involutory transformations and variational principles with multivariables in thin plate bending problems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, 6(1): 25~39
- 125 钱伟长, 陈山林. 合成展开法求解圆薄板大挠度问题. *应用数学和力学*, 1985, 6(2): 103~120
- 126 Chien Weizang, Chen Shanlin. The solution of large deflection problem of thin circular plate by the method of composite expansion. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, 6(2): 103~120
- 127 Chien Weizang. Preface. *Advances of Applied Math. and Mech. in China*, 1987, 1, 2 pages
- 128 Chien Weizang. Further study of generalized variational principle in elasticity. *Advances of Applied Math. and Mech. in China*, 1987, 1: 1~14
- 129 钱伟长. 非线性弹性体的弹性力学变分原理. *应用数学和力学*, 1987, 8(7): 567~577
- 130 Chien Weizang. Variational principles in elasticity with non-linear stress-strain relation. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, 8(7): 589~601
- 131 钱伟长. 大位移非线性理论的变分原理和广义变分原理. *应用数学和力学*, 1988, 9(1): 1~11
- 132 Chien Weizang. Variational principles and generalized variational principles for non-linear elasticity with finite displacement. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, 9(1): 1~12
- 133 钱伟长. 论拉氏乘法及其唯一性问题. *力学学报*, 1988, 20(4): 313~323
- 134 钱伟长. 傅氏变换在三角级数求和中的应用. *应用数学和力学*, 1989, 10(6): 273~283; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 135 Chien Weizang. Summation of trigonometric series by Fourier transformations. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, 10(5): 385~397
- 136 钱伟长, 宁杰. 用有限元结合动态光弹性分析的方法确定动态应力强度因子. *应用数学和力学*, 1989, 10(10): 865~870; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 137 Chien Weizang, Ning Jie. Finite element method combined with dynamic photoelastic analysis to determine dynamic stress intensity factors. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, 10(10): 909~914
- 138 钱伟长, 王刚. 基于广义变分原理的矩形极单元. *应用数学和力学*, 1989, 10(11): 947~953; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 139 Chien Weizang, Wang Gang. A rectangular element of thin plates based upon the generalized variational principles. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, 10(11): 997~1003
- 140 钱伟长, 卢文达, 王蜀. 动力学分区变分原理及其广义变分原理. *力学学报*, 1989, 21(3): 300~306; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 141 钱伟长, 王刚. 曲线边界薄板弯曲问题的一种新单元——曲边四边形单元. *应用数学和力学*, 1990, 11(4): 295~300; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 142 Chien Weizang, Wang Gang. A new element for thin plate of bending with curvilinear boundary quadrilateral element. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, 11(4): 315~320
- 143 钱伟长. 旋转壳的抗扭刚度. *应用数学和力学*, 1990, 11(5): 373~381; 钱伟长科学论文集 (1989~1994).
- 144 Chien Weizang. Torsional rigidity of shells of revolution. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, 11(5): 403~412
- 145 钱伟长. 一般旋转壳在轴对称变形下的复变量方程. *应用数学和力学*, 1990, 11(7): 565~579; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 146 Chien Weizang. Equation in complex variable of axisymmetrical deformation problems for a general shell of revolution. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, 11(7): 605~620
- 147 冯桐, 钱伟长, 孙厚钧. 180° 弯曲方管中牛顿流体和非牛顿流体湍性流动的数值模拟. *应用数学和力学*, 1991, 12(1): 1~14; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 148 Feng Tong, Chien Weizang, Sun Houjun. The numerical simulation of turbulent flows of Newtonian and a sort of non-Newtonian fluid in 180-degree square sectioned bend. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, 12(1): 1~11
- 149 钱伟长, 潘立宙. 椭圆板的大挠度问题. *应用数学和力学*, 1992, 13(10): 855~871; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 150 Chien Weizang, Pan Lizhou, Liu Xiaoming. Large deflection problem of a clamped elliptical plate subjected to uniform pressure. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, 13(10): 891~908
- 151 钱伟长. 周边固定椭圆板在均布载荷下的大挠度问题. *应用数学和力学*, 1992, 13(10): 855~871; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 152 钱伟长. 不用克希霍夫-拉夫假设的弹性板理论初探. *上海工业大学学报*, 1994, 15(1): 1~26; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 153 钱伟长, 茹学萍. 不用克希霍夫-拉夫假设的弹性圆板理论初探. *上海工业大学学报*, 1994, 15(4): 283~298; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)

- 154 钱伟长, 黄黔, 冯伟. 复合材料对称层合板单向拉伸与面内剪切下的三维应力分析. *应用数学和力学*, 1994, 15(2): 95~103; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 155 Chien Weizang, Huang Qian, Feng Wei. Three dimensional stress analysis of symmetric composite laminates under uniaxial extension and in-plane pure shear. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, 15(2): 101~108
- 156 钱伟长, 黄黔, 冯伟. 对称复合材料层合板弯曲的三维数值分析. *应用数学和力学*, 1994, 15(1): 1~6
- 157 Chien Weizang, Huang Qian, Feng Wei. 3-D numerical study on the bending of symmetric composite laminates. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, 15(1): 1~6
- 158 钱伟长, 茹学萍. 不用克希霍夫-拉夫假设的弹性圆板理论再探. *应用数学和力学*, 1995, 16(2): 95~106; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 159 Chien Weizang, Ru Xue-ping. A further study of the theory of elastic circular plates with non-kirchhoff-love assumptions. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, 16(2): 101~113
- 160 Chien Weizang. Non-Kirchhoff-Love theory of elastic circular plate fixed in the boundary and loaded on one of the surfaces. 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 161 钱伟长. 不用 Kirchhoff-Love 假定的三维弹性板近似理论及其边界条件. *应用数学和力学*, 1995, 16(3): 189~209; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 162 Chien Weizang. Approximation theory of three dimensional elastic plates and its boundary conditions without using Kirchhoff-Love assumptions. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, 16(3): 203~224
- 163 钱伟长. 不用 Kirchhoff-Love 假设的三维弹性板二级近似理论及其边界条件. *应用数学和力学*, 1995, 16(5): 381~402; 钱伟长科学论文集 (1989~1994)
- 164 Chien Weizang. The second order approximation theory of three dimensional elastic plates and its boundary conditions without using kirchhoff-love assumptions. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, 16(5): 405~427
- 165 钱伟长. 关于非线性科学. *自然杂志*, 1995, 17(1): 1~3
- 166 徐凯宇, 周哲伟, 钱伟长. 各向异性层合圆柱壳的亚谱分叉. *上海大学学报 (自然科学版)*, 1997, 3(1): 381~402
- 167 Chien Weizang, Ru Xueping. Preliminary report on the theory of elastic circular plate with no Kirchhoff-Love Assumptions. *Journal of Shanghai University*, 1997, 1(1): 1~14.
- 168 钱伟长. 弹性圆板在一侧受均载而四周固定的条件下不用 Kirchhoff-Love 假设的一级近似理论 (I). *应用数学和力学*, 1997, 18(1): 1~17
- 169 Chien Weizang. The first order approximation of non-Kirchhoff-Love theory for elastic circular plate with fixed boundary under uniform surface loading (I). *Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, 18(1): 1~18
- 170 钱伟长. 弹性圆板在一侧受均载而四周固定的条件下不用 Kirchhoff-Love 假设的一级近似理论 (II). *应用数学和力学*, 1997, 18(2): 95~103
- 171 Chien Weizang. The first-order approximation of non-Kirchhoff-Love theory for elastic circular plate with fixed boundary under uniform surface loading (II). *Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, 18(2): 103~112
- 172 钱伟长, 盛尚仲. 弹性圆板在一侧受均载而四周固定的条件下不用克希霍夫-拉夫假设的一级近似理论 (III) 数值计算结果. *应用数学和力学*, 1997, 18(5): 385~393
- 173 Chien Weizang, Sheng Shangzhong. The first-order approximation of non-Kirchhoff-Love theory for elastic circular plate with fixed boundary under uniform surface loading (III)—Numerical results. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, 18(5): 411~419
- 174 徐凯宇, 周哲伟, 钱伟长. 对称铺设正交各向异性层合板的亚谱参数共振. *力学季刊*, 1997, 18(1): 1~9.
- 175 Sheng Shangzhong, Chien Weizang, Huang Qian. A non-linear theory of elastic plates without using kirchhoff-love assumptions and its application. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 1998, 2(1): 84~85
- 176 郭仲三, 肖帆, 郭四稳, 伍岳庆, 古乐野, 钱伟长. 微循环系统动力学综合数学模型研究 (II)——计算方法及结果. *应用数学和力学*, 2000, 21(5): 523~528
- 177 钱伟长. 宁波甬江大桥的大挠度非线性计算问题. *应用数学和力学*, 2002, 23(5): 441~451
- 178 Chien Weizang. Second order approximation solution of nonlinear large deflection problems of Yongjiang Railway Bridge in Ningbo. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(5): 493~506

附录 2 钱伟长关于力学和应用数学的专著目录

- 1 钱伟长, 林鸿荪, 胡海昌, 等. 弹性圆薄板大挠度问题. 北京: 科学出版社, 1954
- 2 钱伟长, 林鸿荪, 胡海昌, 等. 弹性柱体的扭转理论. 北京: 科学出版社, 1956
- 3 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学. 北京: 科学出版社, 1956
- 4 钱伟长 (以清华大学锌空气电池研究组名义编译). 锌空气(氧)电池进展. 北京: 科学出版社, 1975
- 5 钱伟长, 冯思慎编. 波纹管、波登管、弯管膨胀接头、环壳和旋转壳文献目录. 清华大学材料力学教研组印, 1978
- 6 钱伟长. 变分法及有限元 (上册). 北京: 科学出版社, 1980
- 7 钱伟长. 应用数学与力学论文集. 南京: 江苏科学技术出版社, 1980
- 8 钱伟长. 奇异摄动理论及其在力学中的应用. 北京: 科学出版社 1981
- 9 爱林根 (Eringen, A.C.) 著, 钱伟长译. 张量分析. 南京: 江苏科学技术出版社, 1981
- 10 钱伟长. 穿甲力学. 北京: 国防工业出版社, 1984
- 11 钱伟长. 广义变分原理. 上海: 知识出版社, 1985
- 12 钱伟长. 钱伟长科学论文选集 (1937~1987). 福州: 福建教育出版社, 1989
- 13 钱伟长. 微分方程的理论及其解法. 北京: 国防工业出版社, 1992
- 14 钱伟长. 电机设计强度计算的理论基础. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1992
- 15 钱伟长. 钱伟长文选. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1992
- 16 钱伟长. 应用数学. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1992
- 17 钱伟长. 钱伟长学术论著自选集. 北京: 首都师范大学出版社, 1994
- 18 钱伟长. 钱伟长科学论文集 (1989~1994). 济南: 山东科学技术出版社, 1995
- 19 钱伟长. 格林函数和变分法在电磁场和电磁波计算中的应用. 上海: 上海科技出版社, 2000
- 20 钱伟长. 钱伟长文选 (第 1 卷). 上海: 上海大学出版社, 2004
- 21 钱伟长. 钱伟长文选 (第 2 卷). 上海: 上海大学出版社, 2004
- 22 钱伟长. 钱伟长文选 (第 3 卷). 上海: 上海大学出版社, 2004
- 23 钱伟长. 钱伟长文选 (第 4 卷). 上海: 上海大学出版社, 2004
- 24 钱伟长. 钱伟长文选 (第 5 卷). 上海: 上海大学出版社, 2004