

功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展*

仲 政^{1,†} 吴林志² 陈伟球³

¹ 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092

² 哈尔滨工业大学复合材料研究所, 哈尔滨 150001

³ 浙江大学工程力学系, 杭州 310027

摘 要 功能梯度材料的宏观材料特性在空间上是连续变化的, 因此即使在线弹性理论范围内, 由于控制偏微分方程是变系数的, 相应的力学分析具有很大的挑战性. 综述了功能梯度材料与结构若干力学问题的最新研究进展, 包括功能梯度材料梁、板、壳结构的解析解与半解析解以及简化理论的研究、功能梯度材料结构的数值计算方法研究、功能梯度材料的断裂力学研究. 最后对未来功能梯度材料与结构的力学研究进行了展望.

关键词 功能梯度材料, 结构分析, 数值计算, 断裂力学

1 引 言

功能梯度材料是一种多相材料, 在材料的制备过程中通过连续地控制各组分含量的分布, 使材料宏观特性在空间位置上呈现梯度变化, 从而满足结构元件不同部位对材料使用性能的不同要求, 达到优化结构整体使用性能的目的. 功能梯度材料在自然界早就存在, 如竹子、贝壳和动物的骨头等. 但是功能梯度材料作为一种材料设计的概念, 是由日本科学家在 20 世纪 80 年代中期提出来的, 旨在满足航天、国防等高新技术领域对材料提出的苛刻要求. 最早研制的功能梯度材料一面为耐高温的陶瓷, 而另一面为高强度、高韧性的金属, 中间部分为不同混合比的陶瓷和金属相. 这种材料及结构中各组分相呈连续变化, 不存在明显的界面, 相应的热力学性能和物理性能也呈现梯度变化的形式. 通过对梯度材料进行剪裁, 可设计出理想的功能梯度复合材料及结构, 使高温条件下表层陶瓷和底层金属之间热膨胀失配导致的热应力得到很大程度的缓解. 现在功能梯度材料已经拓展到各种材料体系, 在许多工程领域都有广阔的应用前景.

在功能梯度材料与结构的设计、制造与服役过程中出现了大量富有挑战性的力学研究课题. 固有的材料性能不均匀性, 给力学分析带来了很

大的困难, 以往针对均匀材料引入和发展的力学概念、理论、计算方案和实验手段, 有许多已不再适用于功能梯度材料, 需要进行探索和创新. 对这些力学问题的深入研究, 是进一步推广应用功能梯度材料的前提, 同时也促进非均匀介质力学研究的发展. 因此, 对功能梯度材料与结构的关键力学问题进行系统深入的研究, 具有重要的理论意义和深厚的应用背景.

本文首先介绍功能梯度材料与结构若干力学问题的最新研究进展, 包括: (1) 功能梯度材料梁、板、壳结构分析的理论研究; (2) 功能梯度材料结构的数值计算方法; (3) 功能梯度材料的断裂力学研究. 在此基础上, 指出了今后值得重视的若干研究方向.

2 功能梯度材料梁、板、壳结构的理论分析

梁、板、壳以及它们的组合是目前功能梯度材料的常见结构形式, 对这些典型结构进行受力与变形分析乃至多场耦合分析是功能梯度材料与结构一体化设计所不可缺少的. 分析方法主要以简化的结构理论为主^[1~5], 也有一些是从三维方程出发进行直接求解^[6~10]. 功能梯度材料板壳结构力学方面的综述可见文献^[11~13]. 由于以往针对均匀材料建立的经典梁、板、壳结构理论并不能完

收稿日期: 2009-03-05, 修回日期: 2010-07-05

* 国家自然科学基金重点资助项目 (10432030)

† E-mail: zhongk@tongji.edu.cn

全适用于功能梯度材料, 因此必须发展针对功能梯度材料特点的梁、板、壳结构分析方法, 寻找功能梯度材料梁、板、壳结构的解析解、半解析解以及简化理论解, 下面将分别阐述.

2.1 解析解

对于功能梯度材料梁、板、壳结构, 由于控制方程通常为变系数的微分方程, 其边值问题的解析求解难度非常大, 因此在现有文献中, 解析解非常少. 解析解的价值在于它们能为其他理论模型或计算方案提供假设的依据和验证的考题. Sankar^[14] 针对材料常数沿厚度为指数分布的正交各向异性功能梯度梁受任意垂直载荷作用的情形推导得到了弹性力学精确解. 稍后 Sankar 等^[15] 给出了考虑温度效应的一个精确解. 仲政等^[16] 基于状态空间列式给出了四边简支压电矩形板的精确解. 这些工作都假设材料参数沿厚度以同一指数变化. 对于沿厚度非指数变化的情况, 还没有弹性力学精确解的报道. 在解析解方面, Lekhnitskii 在其名著^[17] 中给出了正交各向异性悬臂梁端部受剪/弯的解, 但其后近 40 年几乎没有任何进展.

最近几年, 仲政等^[18~23] 和丁皓江等^[24~28] 系统发展了考虑力、热、电、磁等作用的各向异性功能梯度材料直梁二维问题的广义应力函数解法, 获得的解析解适用于各材料参数沿厚度方向的任意梯度分布情况, 可在 Saint-Venant 意义上考虑简支、固支等不同的位移约束边界条件和集中力、弯矩等端部载荷作用. 这一方法将 Lekhnitskii^[17] 在各向异性平面弹性问题上的研究推进了一大步, 丰富了非均匀材料力学的求解手段, 具有重要的科学意义. Huang 等^[29] 进一步研究了功能梯度压电执行器的响应特性, 给出了解析表达式并与一维梁理论、有限元和实验结果等进行了比较, 说明了解析解的有效性及一维梁理论解的不足之处. Jiang 等^[30,31] 则发展了基于调和函数表示的通解解法, 求得了密度功能梯度材料悬臂梁的两个解析解.

智能功能梯度结构的响应特性近几年得到了很多研究者的关注^[32,33]. 已有的研究大都假设压电层和功能梯度材料主体结构之间粘结完好. 文献^[34,35] 则提出在此类结构中考虑界面弱化的影响, 采用界面的线弹簧模型以模拟实际使用中粘结剂性能退化或者由于粘结过程中操作不当引起的粘结不良等现象. 计算发现, 由于界面的弱化, 使得结构系统的静动力特性发生了一定程度的改变, 从而可能导致作动器或者传感器性能的变化, 必

须加以重视.

陈伟球等^[36] 将辛空间的弹性力学解法^[37] 推广应用到功能梯度材料结构的解析研究中, 提出了移位 Hamilton 矩阵的概念, 发现材料的功能梯度属性将改变有关特征函数的形式, 对不同的特征函数建立了共轭辛正交关系, 并提出了稳定的数值计算方法^[38]. 最近, 他们又将工作进一步推广到功能梯度压电材料, 详细研究了非均匀参数对 Saint-Venant 解的影响^[39].

在轴对称载荷作用下的圆/环板的弯曲问题是弹性力学的一个经典问题^[40]. Horgan 等^[41] 假设弹性模量沿径向按幂律分布, 考察了功能梯度旋转圆盘的一维轴对称变形问题. Li 等^[42,43] 将 Ding 等^[24~28] 提出的直梁的分析方法进一步推广应用于功能梯度弹性圆板. 对于横观各向同性功能梯度圆板的纯弯曲问题, 首次给出了解析形式的弹性力学解. 与直梁问题类似, 这一方法可以考察材料常数沿厚度方向的任意变化以及圆周边界上的简支或固支边界条件. Li 等^[44] 通过在位移表达式中引入适当的对数函数项, 获得了内外圆周边界条件任意组合时在均布载荷作用下横观各向同性功能梯度圆环板的解析解, 该解可以考虑材料常数沿厚度方向的任意分布. 对于均匀电势作用下的功能梯度圆板和均布载荷作用下的功能梯度压电电压磁板, 同样通过假设位移、电势和 (或) 磁势的适当形式, 导出了相应的轴对称解析解^[45,46].

针对沿厚度方向材料常数任意变化的情形, Kaprielian 等^[47] 及 Mian 等^[6] 提出了一种非常有效的求解方法, 即通过假设位移的适当形式将三维问题化为二维问题以简化求解过程; 但与经典的板壳理论不同, 在位移模式中含有很多与厚度坐标有关的未知函数, 因此可以考虑材料特性沿板厚的任意变化. 但他们的研究仅局限于各向同性材料, 且板的上下表面没有载荷作用. Yang 等^[48] 推广了非均匀材料板的 Spencer 分析方法, 并求解了均布载荷作用下横观各向同性材料环板的位移和应力场, 从二维简化解构造出相应的材料沿厚度方向任意变化的圆环板的三维解. 在文献^[49] 中, Yang 等人将推广的 Spencer 方法进一步用于分析矩形板的柱形弯曲, 获得了可考虑板厚方向任意材料梯度变化的解析解. 对于对边简支矩形板的弯曲问题, 通过在级数项外引入适当的多项式项, 一方面简化了求解, 另一方面也加快了收敛^[50].

张晓日等^[51] 假设材料的力学和电学性质

沿板厚方向按统一的指数函数形式梯度分布, 获得了周边为广义刚性滑动和广义简支两种边界条件下轴对称功能梯度压电圆板自由振动问题的精确频率方程, 数值求解不同板厚和不同梯度变化情况下的轴对称圆板自由振动的固有频率. Chen 等 [52,53] 通过假设径向位移和轴向位移的适当形式, 获得了匀速旋转的横观各向同性功能梯度圆板和圆环板问题的解析解, 该解可考虑材料参数沿厚度方向的任意分布情形.

Zhong 等 [54] 假设材料的力学、电学和热学性质沿板厚方向按统一的指数函数形式梯度分布, 获得了四边简支、接地和等温的正交各向异性功能梯度压电材料矩形板, 在上下表面作用机械载荷、电载荷和热载荷情况下的三维静力精确解. 文献 [55] 获得了四边简支、接地的正交各向异性功能梯度压电材料矩形板 (指数梯度分布) 在不同表面边界条件下的自由振动和强迫振动的三维精确解. 文献 [56] 则给出了当弹性模量或弹性柔度为厚度方向坐标的线性函数情况下, 四边简支的各向同性功能梯度矩形板在上下表面受机械载荷作用的封闭解析解. Zhang 等 [57] 对于任意的材料梯度分布形式, 利用 Haar 小波级数展开法, 得到四边简支功能梯度材料矩形板和功能梯度压电材料矩形板弯曲问题的三维 Haar 小波级数解. 文献 [58~60] 还利用 Peano 级数展开法对功能梯度平板的二维和三维问题进行了分析. Huang 等 [61] 考察了双参数地基对功能梯度材料板弯曲特性的影响, 发现地基参数的变化对结构的应力分布影响较大, 尤其是对于较厚的梁板, 地基参数越大, 中性面的位置逐渐向加载的表面移动, 应力分布也逐渐趋于缓和, 即应力水平逐渐减小.

研究结构的瞬态响应, 在工程实际中有重要的意义, 这是因为结构的瞬态响应中包含丰富的信息, 如载荷、材料特性以及结构特性等, 通过分析瞬态响应特征, 可以在更深层次上把握结构特性, 但是瞬态响应分析一直是理论难点. 一般采用的积分变换法在实现时间域的反变换过程中通常会遇到很大的困难, 目前仍没有非常有效的手段. 在已有的均匀壳体动力分析的研究基础上, Wang 等 [62~66] 发展了适合于多层结构瞬态响应的有效分析方法, 将静态分解技术、分离变量技术、正交展开技术以及传递矩阵列式完美地结合了起来. 这一方法与采用积分变换求解方法相比, 具有分析精度高、计算速度快的优点. 利用该方法, 他们研究了多层球面各向同性压电球壳的球对称动力

响应问题, 得到波前的精确演化过程 [62]; 在此基础上还进一步获得了热电耦合和磁电耦合球壳的球对称动力响应问题的解 [63,64], 并研究了多层压电和热释电柱壳的广义平面应变动力问题 [65,66]. 结合层合近似模型, 这一解析方法可以方便地用于功能梯度壳体的动力响应分析. 将上述方法推广到材料常数是径向坐标的幂函数的功能梯度材料球壳和柱壳的动力响应分析上, 发现改变梯度参数, 可以调整环向应力, 但对不同部位所起的作用是不同的 [67,68], 因此在进行动载荷作用下的功能梯度圆柱壳的设计时需要作仔细的计算分析.

高立名等采用分层法 [69]、Frobenius 法 [70] 和同伦分析法 [71] 研究功能梯度平板表面波的传播问题, 发现表面波的两变化模式在功能梯度材料中的效应是不同的. 分层法虽然概念简单, 但收敛速度较慢; Frobenius 法可以求出精确解, 但求解过程繁琐, 而且对数值计算过程的精度要求比较高; 同伦法可以求得包括 Frobenius 解的一般解, 而且收敛速度和精度可以通过选择适当的参数来调整. 潘永东等利用 Peano 级数展开法研究功能梯度材料中波的传播特性 [72,73], 求解了圆杆和圆管表面上功能梯度涂层的表面波频散曲线, 通过数值计算说明了表面波频散曲线对涂层材料声速梯度分布的依赖性, 为激光超声实验测量表征材料梯度分布特性提供了理论依据. 针对功能梯度材料厚板中波的传播问题, Chen 等 [74,75] 提出了回传射线矩阵分析方法. 采用均匀层合模型将各向同性功能梯度材料板划分成若干层, 在每层建立互反的两个局部坐标系并获得层内的相位关系, 根据界面处连续条件获得散射关系, 最终建立体系的回传矩阵整体代数方程. 由于采用了两个局部坐标系, 该方法摒除了具有正实部指数的指数函数, 从而在计算中避免了传统状态空间法中普遍存在的大数相减, 得到了绝对稳定的数值计算结果, 表明回传射线矩阵法对于结构高频振动计算具有不可替代的优越性. 从上述最一般的理论出发, 文献 [76~79] 对非均匀弹性杆、各向异性功能梯度板 (包括层合板) 和功能梯度压电薄膜及其体波谐振器内的波传播问题进行了系统的研究.

2.2 半解析半数值解

传统的状态空间法只能适用于具有特殊边界条件 (如简支、滑支) 的结构的求解. 为了克服这一限制, 范家让提出用叠加原理和广义函数的 Fourier 级数展开来求解具有固支和自由边界的板壳结构静动力响应 [80], 但该方法收敛速度慢, 且不

容易使用. Chen 等^[81,82] 针对复合材料梁板提出了一种有效的半解析半数值方法, 该方法将状态空间法和微分求积法结合在一起, 在面内采用微分求积法离散可以处理任意侧面边界条件, 而在厚度方向采用状态空间法进行精确求解. 该方法拓宽了弹性力学传统状态空间法的求解范围, 可以用于分析层合和厚度方向功能梯度梁、板、壳结构静动力问题. Lü 等利用该方法获得了功能梯度层合梁^[83~86] 以及压电层合板^[87] 在简支、固支、自由等边界条件下的自由振动与静力弯曲问题的解答. 在计算中发现, 当微分求积法中点数取值较大时, 会产生一定的数值不稳定问题, 为此 Lü 等^[88] 采用 Nagem 和 Williams 针对空间结构分析提出的耦合节点矩阵法, 进行功能梯度梁的热应力分析和多跨板的振动分析, 克服了数值不稳定的现象.

Nie 等^[89~91] 对状态空间法和微分求积法相结合的半解析半数值方法进行了改进, 提出了将位移和位移的一阶导数作为状态变量的求解方法, 与应力和位移混合作为状态变量的状态空间法相比较, 更易处理某些边界条件和圆板中心的正则性条件. 利用该方法, 研究了功能梯度圆板、圆环板、扇形板在简支、固支、自由等各种边界条件下的静力响应与自由振动问题. 基于状态空间的微分求积法还被推广应用于求解双向功能梯度材料梁^[92] 和双向功能梯度材料圆板^[93] 的分析.

文献^[94] 针对一般微分求积法求解结构受不连续载荷、集中载荷作用时精度不高的缺陷, 将小波函数与微分求积法相结合, 提出了结合小波微分求积法和一般微分求积法各自优点的混合微分求积法, 对功能梯度材料平板柱形弯曲以及一组对边简支、一组对边任意边界情况下的功能梯度材料平板弯曲问题进行了分析. 文献^[95~97] 构造半解析单元对复杂边界条件的功能梯度板进行了三维分析.

2.3 简化理论解

曹志远等人采用经典板壳理论, 获得了各类功能梯度矩形板固有频率与振型的解析解^[98~101] 和各类功能梯度复合材料圆柱壳固有频率的解析解^[102~105].

为了对更复杂条件下功能梯度梁、板、壳结构进行分析, 必须发展适合于功能梯度材料特点的梁、板、壳简化理论. 在各种高阶板理论中, Soldatos 等^[106] 提出的含有随厚度坐标变化的翘曲函数理论独具优势. Bian 等^[107] 将 Soldatos 层

合板理论推广用于功能梯度板的分析, 构造了状态空间列式来确定翘曲函数的厚度方向分布, 然后针对 Soldatos 层合板理论构造了状态空间列式对单跨以及多跨柱形板的弯曲进行求解.

Lü 等^[108] 针对功能梯度材料薄膜, 基于经典薄板假设, 提出了考虑表面弹性的连续介质模型. 研究表明, 对于给定的表面材料性质, 当薄膜厚度减小到微米尺度时, 其抗弯刚度和固有频率表现出明显的尺度效应, 并随厚度的进一步减小, 表面效应的影响越来越明显. 采用 Soldatos 板理论的位移假设, 以表面力学基本方程代替经典理论中表面剪应力为零的约束条件, 确定自适应形函数的具体形式, 获得了无限长功能梯度材料薄膜的解析解.

李尧臣等^[109] 基于若干基本假设, 提出了指数型功能梯度压电材料圆板在轴对称载荷作用下的简化理论与解析解, 获得了板的周边固定或简支并接地情况下中性层法线转角的解和用 Fourier-Bessel 级数表示的电势解, 这个解有足够的精度, 在形式上比精确解简洁得多, 便于数值计算和应用.

3 功能梯度材料梁、板、壳结构的数值分析

对于较复杂的功能梯度结构, 数值计算方法是强有力的分析工具. 但是将常规的数值计算方法如有限元法用于功能梯度结构的分析, 技术上存在着很大的困难. 由于材料性质宏观上的不均匀性, 利用常规有限元对功能梯度材料结构进行三维分析, 势必需要划分大量的单元, 计算工作量巨大. 因此建立针对功能梯度材料特点的、新的或改进的有限元法是十分必要的. 人们提出了各种梯度有限元法^[110~113], 但仍需要进一步的深入研究, 例如即使在一维波动问题中, 文献^[110,113] 所提出的梯度有限元与精确解的比较也并不令人满意.

3.1 功能梯度材料结构非传统 Hamilton 变分原理和有限元分析

在 Luo 等^[114] 提出的均匀材料非传统 Hamilton 变分原理基础上, 文献^[115] 系统地建立了针对功能梯度材料结构弹性动力学各类非传统 Hamilton 变分原理, 以及相空间非传统 Hamilton 变分原理. 这类变分原理能够反映功能梯度材料结构弹性动力学初值 - 边值问题的全部特征, 是与动力学问题完全等价的变分原理. 文献^[116] 基于相空间非传统 Hamilton 变分原理提出了针对功能梯度

材料结构的辛空间有限元-时间子域法. 该算法通过引入位移和动量这一组基本变量, 通过空间域和时间域的离散, 将动力学问题归结为求解线性代数方程组, 使计算效率大为提高. 通过对任意梯度变化、多种边界条件以及载荷作用的功能梯度材料矩形板的动力响应问题进行三维分析, 表明辛空间有限元-时间子域法是一种计算精度很高、实用性很强的算法, 计算得到了多种边界条件和载荷作用下功能梯度材料板的动力响应特性.

文献 [117] 引入板变形的 Mindlin 假设和面内电势分布的一种新假设, 基于变分原理, 推导出功能梯度压电材料平板的有限元基本格式, 并对四边简支、接地的功能梯度压电方形板的挠度和电势分布进行了数值模拟.

3.2 功能梯度材料结构分析的细观元法

曹志远等提出了一种适合于功能梯度结构分析的细观元法 [118~130]. 细观元法在结构的常规有限单元内部设置密集细观单元以反映材料的细观构造, 又通过协调条件将各细观元结点自由度转换为同一常规有限元自由度. 这种细观元法既能充分反映材料功能梯度变化特性, 实现材料细观结构到构件宏观响应的跨尺度分析; 其计算单元与自由度又和常规有限元一样, 是一种针对功能梯度结构宏细观跨尺度分析的有效数值方法. 这种细观元法的特点是: (1) 大规模节省计算工作量 (相对于传统有限元法); (2) 适用于材料内部任意梯度变化 (相对于边界元法); (3) 可求解非周期变化构造材料 (相对于渐近均匀化法); (4) 可直接从材料组分或细观结构出发求解宏观响应 (相对于梯度有限元法).

利用细观元法, 可以探讨各种复杂情况下功能梯度材料构件的三维分析. 文献 [120, 121, 123] 对不同梯度分布、不同边界条件的功能梯度矩形板进行了的三维分析. 文献 [119] 则按组分材料配比分布直接进行功能材料构件三维分析. 文献 [122, 125, 126] 对沿结构中面 (而非厚度方向) 单向或双向变化的功能梯度材料构件进行了三维分析. 文献 [124, 126, 128] 利用动力细观元法对功能梯度材料构件进行了三维模态分析.

细观元法还可以实现直接输入金相图片进行功能梯度材料构件宏观与细观力学分析. 文献 [129, 130] 对金相图片进行极密网格划分及所有网格内材料扫描识别, 再将单一网格作为计算单元进行材料参数与空间位置输入, 并利用细观元法转换为常规宏观单元运算矩阵, 进行功能梯

度材料或结构的宏观与细观力学分析. 文献 [127] 基于细观元法的正、反演相结合技术, 从已知的材料内部组分分布识别材料有效性能梯度分布函数.

4 功能梯度材料的断裂力学研究

功能梯度材料的断裂力学研究对于功能梯度材料及其结构的设计、优化及安全评价具有十分重要的意义. 以往的研究表明, 功能梯度材料裂纹尖端应力场的奇异性与普通均匀材料相同 ($r^{-1/2}$), 并且不具有界面裂纹问题的应力振荡性, 因此可以像经典的均匀材料断裂力学那样定义功能梯度材料裂纹尖端的应力强度因子等断裂力学参量, 但是这些断裂参量除了与裂纹及结构尺寸、载荷形式及大小等有关外, 还取决于材料性质的梯度变化规律.

4.1 功能梯度材料的静态断裂力学研究

在静态机械载荷作用下功能梯度材料的断裂力学研究方面, Delale 等 [131] 研究了泊松比为常数, 杨氏模量为指数函数变化的非均匀平面的断裂问题. 他们发现, 泊松比对裂纹尖端应力强度因子的影响非常小. Delale 等 [132] 分析了处于均匀半平面和非均匀半平面之间的界面裂纹问题, 假设两个半平面的力学属性在界面处保持连续, 非均匀材料的剪切模量和泊松比取为指数函数形式. 研究表明, 只要材料的力学属性在裂纹尖端保持连续, 非均匀材料与均匀材料裂纹尖端应力场的奇异性是一致的. 随后的 20 余年间又有大量有关功能梯度材料断裂问题的文章发表, 如文献 [133~136]. 仲政等 [137~141] 针对各向同性功能梯度材料, 假设剪切模量是坐标的幂函数分布而泊松比为常数, 获得了功能梯度材料板条、功能梯度材料夹层、功能梯度材料涂层裂纹问题的应力变形场的解析解, 并研究了材料梯度变化参数、裂纹长度、板厚或层厚等几何参数对裂纹尖端应力强度因子和裂纹起裂角的影响. Guo 等 [142] 研究集中载荷作用下功能梯度涂层-基底结构的界面裂纹问题, 讨论了混合型应力强度因子和应变能释放率随材料非均匀参数的变化规律, 并分析了集中载荷作用位置及材料非均匀参数对裂纹扩展方向的影响. Dag 等 [143] 考虑了含有边裂纹的半无限大功能梯度材料在接触载荷作用下的平面问题, 其中接触载荷由材料表面滑动触头产生, 而裂纹平行于材料属性的变化方向.

上述静态问题研究主要针对无限大功能梯度

材料中的裂纹问题或含有功能梯度层多层介质的界面裂纹问题. 含有垂直于界面或自由表面的裂纹的功能梯度材料断裂问题同样受到较多关注. Erdogan 等^[144]研究了有限厚度各向同性功能梯度材料板的断裂问题. Guo 等人^[145]分析了正交各向异性功能梯度板的埋藏裂纹和边裂纹问题, 推导出了奇异积分方程积分核的高阶渐近表达式, 给出了各种载荷情况下应力强度因子的分布曲线. Ueda^[146]分析了含有功能梯度界面层的层板的表面裂纹问题(表面层内的裂纹垂直于界面). 尽管文中考虑了内部裂纹和边裂纹问题, 但其中所考虑的裂纹位于均匀层内. 与此不同, Guo 等^[147]、Li 等^[148]与 Yong 等^[149]则研究了裂纹垂直于界面且位于某个非均匀层内的功能梯度结构的断裂问题. 关于功能梯度材料中跨界面裂纹问题的研究还非常少, Guo 等^[150]针对垂直并跨越功能梯度材料界面的裂纹问题进行了解析研究, 获得了跨界面裂纹尖端的应力强度因子.

需要指出的是, 在功能梯度材料断裂问题的理论研究工作中, 为了便于问题的解析求解, 材料属性绝大多数采用指数函数来描述, 少数采用幂函数等函数形式来描述. 对于材料属性为任意连续函数的情况, 很难进行直接解析求解, 因此一般采取将功能梯度材料分割为有限层的方法来实现近似解析求解, 目前有 4 种主要模型: (1) 均匀属性分层模型: 该方法中功能梯度材料沿属性梯度方向被分为若干均匀材料层^[151,152]. 在此模型中, 相邻层的材料属性实际上是有突变的, 当裂纹尖端位于相邻层界面上时, 裂纹尖端场不是标准的 $r^{-1/2}$ 奇异性. 为此, 在使用该模型时要避免裂纹尖端位于层间界面上. (2) 分层线性离散模型^[153,154]: 与均匀属性分层模型不同, 每一层介质(子层)的材料属性设为线性函数, 各层介质的属性在界面处保持连续. 该方法已经用于求解垂直于材料属性梯度方向的裂纹问题. (3) 分层弹性柔度线性化模型^[141]: 该模型采用分段线性柔度参数来拟合实际连续变化的柔度参数, 建立了各向同性功能梯度材料裂纹问题求解的新格式, 可以考虑泊松比不为常数的情况. (4) 分段指数模型^[142]: 在每一子层内采用指数函数来逼近层内材料的梯度变化, 因此控制微分方程可以退化为常系数微分方程, 方便求解. 值得指出的是, 过去基于指数函数形式属性的功能梯度材料各种裂纹问题求解方法很容易和分段指数模型对接, 从而使分段指数模型的应用范围非常广泛.

4.2 功能梯度材料的动态断裂力学研究

与功能梯度材料的静态断裂研究相比, 关于功能梯度材料动态断裂问题的研究相对较少. 李春雨等^[155]研究了反平面剪切冲击载荷作用下含裂纹功能梯度材料的瞬态响应问题, 获得了裂纹尖端动态应力场. Li 等^[156]分析了两个同轴均匀材料圆柱间的功能梯度层内的裂纹在扭转冲击下的响应问题, 其中最外层均匀材料沿半径方向为无限大. 结果显示动态应力强度因子总是迅速升高到峰值, 然后逐渐衰减, 直至达到稳定值.

关于含垂直于边界的裂纹的功能梯度材料动态断裂问题的文章非常少. Chen 等^[157]研究了含有垂直于边界的内部埋藏裂纹的正交各向异性功能梯度条的平面瞬态响应问题, 采用奇异积分方程和 Laplace 数值反演方法获得了瞬态应力强度因子随材料非均匀参数的变化规律. Li 等^[158]开展了功能梯度材料中反平面界面裂纹问题的瞬态响应分析. Guo 等^[159~162]假设材料的弹性模量按指数函数形式梯度分布, 获得了功能梯度材料板条、夹层和涂层在裂纹面冲击载荷作用下的瞬态响应, 并研究了材料性质的梯度变化参数、裂纹长度与层厚等几何参数对裂纹尖端动应力强度因子的影响. 研究表明, 内部裂纹尖端瞬态应力强度因子往往比边裂纹尖端瞬态应力强度因子更容易趋于稳态值.

Ma 等^[163,164]和 Cheng 等^[165]利用 Fourier 积分变换技术研究了指数梯度分布的功能梯度材料中定长 Yoffe 型裂纹的匀速运动问题, 分析了裂纹运动速度、材料梯度参数、结构几何参数等对裂纹尖端动应力强度因子的影响. Ma 等^[166]假设材料的弹性模量按指数函数形式分布, 研究了含裂纹功能梯度材料的弹性波散射问题. 结果发现, 与均匀材料类似, 当入射波频率达到某些特定值时, 动应力强度因子会出现明显的共振峰, 由于材料梯度变化的影响, 功能梯度材料中动应力强度因子的变化规律与均匀材料相比表现出明显的不同. 文献^[167,168]分别研究了正交各向异性功能梯度材料的反平面散射波问题和平面散射波问题, 给出了动应力强度因子随入射波数和材料参数变化的规律.

对于沿厚度方向具有一般材料属性的功能梯度材料板的瞬态断裂问题, 可以采用前面提到的均匀属性分层模型和分段指数模型进行近似解析求解. 采用均匀属性分层模型, Wang 等^[169]利用 Fourier 变换和 Laplace 变换方法将相应的边值问

题转化为 Laplace 域内的奇异积分方程组, 并利用加权残数法和 Laplace 数值反演方法求得时间域内的全场解. 结果表明该方法对于研究材料属性沿厚度方向变化的非均匀材料的断裂问题是有效的. Guo 等^[170] 求解了具有指数函数形式属性的功能梯度材料跨界面裂纹瞬态响应问题, 而采用分段指数模型可以将该工作扩展到求解具有一般属性的功能梯度材料瞬态断裂问题.

4.3 功能梯度材料的多场耦合断裂力学研究

功能梯度材料的多场耦合断裂力学研究主要涉及力、热、电和磁等场作用下的裂纹问题. 热载荷作用下的断裂破坏问题是功能梯度材料研究的一个重要方面. 对于一般的非均匀材料, Jin 等^[171] 指出, 只要材料属性连续且分段可微, 那么非均匀材料裂纹尖端场的奇异性是与均匀材料一致的. Erdogan 等^[172] 计算了功能梯度板条裂纹尖端的稳态热应力强度因子. Noda^[173] 系统阐述了功能梯度材料中的热应力问题. 针对材料破坏问题, 文中分别采用解析和数值方法分析了含各种类型裂纹的功能梯度材料的热应力强度因子, 并且讨论了热冲击作用下裂纹的扩展路径. 王保林等^[174] 分析了含多个平行裂纹的无限长功能梯度材料板的热动态断裂问题. Noda 等^[175] 研究了含垂直于表面的裂纹的功能梯度板的热冲击问题, 其中采用了摄动法求解瞬态温度场. Jin 等^[176] 研究了含边裂纹的功能梯度材料的瞬态热应力问题. 他们采用了多层模型求解温度场, 并且假设材料的杨氏模量和泊松比为常数, 材料的热属性沿着厚度方向变化, 通过 Laplace 变换和渐近分析得到了第一阶温度场的解. 对于具有一般热属性和机械属性的功能梯度材料板, Guo 等^[177] 已经把前述分段指数模型扩展到求解稳态热断裂问题.

功能梯度压电/压磁材料断裂问题的分析与上述机械载荷或热载荷情况下的求解基本相似. 例如, 假设材料的力学和电学性质按指数函数梯度分布, 文献^[178] 获得了面内电场和反平面剪切力作用下功能梯度压电材料夹心层中的裂纹尖端力电场和能量释放率, 文献^[179] 解得了功能梯度压电材料板条中移动裂纹的力电场和能量释放率, 文献^[180~189] 研究了指数型功能梯度压电/压磁板条的裂纹问题. Zhou 等^[190] 利用广义 Almansi 理论和 Schmidt 方法给出了功能梯度压电/压磁材料平面中 I 型裂纹断裂问题的基本解, 同时还分析了裂纹内部介质的电导通性和磁导通性对裂纹断裂特性的影响. 研究表明, 电磁载荷对于裂纹尖端

的能量释放率有明显的影晌.

4.4 功能梯度材料裂纹问题的非局部理论解

文献^[191~196] 将非局部理论运用到功能梯度材料断裂分析中, 利用 Schmidt 方法, 以裂纹面张开位移为未知变量对单裂纹及多裂纹的静力学和动力学问题进行了研究, 克服了以往 Eringen^[197~199] 在此类问题研究中数学上存在的积分方程积分核不收敛问题, 得到了裂纹尖端的非奇异应力场和电位移场, 拓宽了非局部理论的应用范围. 对于冲击载荷作用下功能梯度材料的断裂问题、多裂纹间的相互作用问题的非局部理论解以及非局部理论实验验证等方面的研究有待进一步展开.

4.5 功能梯度材料的断裂实验

由于功能梯度材料的非均匀特征, 功能梯度材料断裂行为实验研究具有很大的挑战性. Parameswaran 等^[200] 采用高速摄影技术和光弹实验研究了功能梯度材料动态裂纹扩展问题, 其中所使用的多层聚合物材料具有非连续的梯度材料属性. 在准静态载荷条件下, Butcher 等^[201] 采用光干涉法和三点弯曲试件对环氧树脂与玻璃颗粒形成的功能梯度材料进行了材料属性测量和断裂性能测试. Marur 等^[202] 采用实验和有限元相结合的方法研究了冲击载荷作用下不同材料界面裂纹和功能梯度材料界面裂纹的动态响应问题. Rousseau 等^[203] 采用光反射和高速摄影技术研究了功能梯度材料在低速冲击下沿着材料梯度方向的动态裂纹扩展问题. Abanto-Bueno 等^[204] 采用数字图像全场测量技术研究了功能梯度材料的裂纹生长行为, 他们选取对光敏感的聚合物利用紫外线照射的办法生成功能梯度材料, 进而制成含有边裂纹的试件. 程军等^[205] 采用云纹干涉法对 SiC/Al 梯度功能材料在机械载荷与热载荷作用下的应变进行了测量. 文献^[206~208] 分别利用数字散斑方法和相干梯度敏感方法对环氧树脂与玻璃微珠制备而成的功能梯度材料试件 I 型静态断裂特性进行实验研究, 分析了不同梯度变化规律对材料断裂性能的影响. 许蔚等^[209] 采用焦散线方法与高速摄影技术结合, 对线性规律功能梯度材料的 I 型静、动态断裂特性进行了实验研究, 提出通过迭代方法根据功能梯度材料的焦散线方程求解应力强度因子. Jin 等^[210] 选用材料组分变化为 50%NiCr50%ZrO₂-100%ZrO₂ 的功能梯度材料, 研究了材料梯度变化对其断裂行为的影响, 对于 I-II 混合型断裂问题,

实验分析了弹性梯度变化和断裂韧性对于裂纹起裂的影响。

总之, 功能梯度材料的断裂力学实验研究还非常有限, 目前也很难形成完备的实验标准, 还有大量的工作有待开展。

5 展 望

功能梯度材料与结构的关键力学问题研究具有重要的学术价值和应用前景。但是由于问题的复杂性和挑战性, 该领域还存在大量尚未很好解决、需要进一步探讨的问题, 对这些问题深入的研究, 是进一步推广应用功能梯度材料所不可缺少的, 也将促进非均匀介质力学研究的突破。需要进一步研究和发展的方向包括功能梯度材料的无损检测与性能表征的理论及实验技术、考虑黏弹性、塑性等复杂材料性质的功能梯度结构的力学分析、多场耦合的功能梯度结构的动力学分析、功能梯度材料结构的优化设计理论与方法等。

参 考 文 献

- Loy CT, Lam KY, Reddy JN. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, 41(3): 309~324
- Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(1-3): 663~684
- Cheng ZQ, Batra RC. Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(4): 879~895
- Wu XH, Chen CQ, Shen YP, et al. A high order theory for functionally graded piezoelectric shells. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(20): 5325~5344
- Javaheri R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA Journal*, 2002, 40(1): 162~169
- Mian MA, Spencer AJM. Exact solutions for functionally graded laminated elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, 46(12): 2283~2295
- Chen WQ, Wang X, Ding HJ. Free vibration of a fluid-filled hollow sphere of a functionally graded material with spherical isotropy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1999, 106(5): 2588~2594
- Chen WQ, Ding HJ. Bending of functionally graded piezoelectric rectangular plates. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2000, 13(4): 312~319
- Tarn JQ. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(46-47): 8189~8206
- Vel SS, Batra RC. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 272(3-5): 703~730
- 王保林, 杜善义. 功能梯度材料的热/机耦合分析研究进展. *力学进展*, 1999, 29(4): 528~548
- 沈惠申. 功能梯度复合材料板壳结构的弯曲、屈曲和振动. *力学进展*, 2004, 34(1): 53~60
- Birman V, Byrd LW. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, 60(5): 195~216
- Sankar BV. An elasticity solution for functionally graded beams. *Composites Science and Technology*, 2001, 61(5): 689~696
- Sankar BV, Tzeng JT. Thermal stresses in functionally graded beams. *AIAA Journal*, 2002, 40(6): 1228~1232
- Zhong Z, Shang ET. Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(2): 5335~5352
- Lekhnitskii SG, Tsai SW, Cheron T. *Anisotropic Plates*. New York: Gordon and Breach, 1968
- Zhong Z, Yu T. Two-dimensional analysis of functionally graded beams. *AIAA Journal*, 2006, 44(12): 3160~3164
- 于涛, 仲政. 均布载荷作用下功能梯度悬臂梁弯曲问题的解析解. *固体力学学报*, 2006, 27(1): 15~20
- 仲政, 于涛. 功能梯度悬臂梁弯曲问题的解析解. *同济大学学报 (自然科学版)*, 2006, 34(4): 443~447
- Zhong Z, Yu T. Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*, 2007, 67(3~4): 481~488
- Yu T, Zhong Z. Bending analysis of a functionally graded piezoelectric cantilever beam. *Science in China (Series G)*, 2007, 50(1): 97~108
- Zhong Z, Yu T. Electroelastic analysis of functionally graded piezoelectric material beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2008, 19(6): 707~713
- Ding HJ, Huang DJ, Chen WQ. Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(1): 176~196
- Huang DJ, Ding HJ, Chen WQ. Analytical solution for functionally graded anisotropic cantilever beam subjected to linearly distributed load. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, 28(7): 855~860
- Huang DJ, Ding HJ, Chen WQ. Piezoelectricity solutions for functionally graded piezoelectric beams. *Smart Materials and Structures*, 2007, 16(3): 687~695
- Huang DJ, Ding HJ, Chen WQ. Analytical solution for functionally graded magneto-electro-elastic plane beams. *International Journal of Engineering Science*, 2007, 45(2~8): 467~485
- Huang DJ, Ding HJ, Chen WQ. Analytical solution for functionally graded anisotropic cantilever beam under thermal and uniformly distributed load. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2007, 8(9): 1351~1355
- Huang DJ, Ding HJ, Chen WQ. Analysis of functionally graded and laminated piezoelectric cantilever actuators subjected to constant voltage. *Smart Materials and Structures*, 2008, 17(1): 1~11
- Jiang AM, Ding HJ. The analytical solutions for orthotropic beam (II): Solutions for density functionally graded beams. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2005, 6A(3): 155~158
- Jiang AM, Ding HJ. Analytical solutions for density functionally gradient magneto-electro-elastic cantilever beams. *Smart Structures and Systems*, 2007, 3(2): 173~188
- Ootao Y, Tanigawa Y. Three-dimensional transient piezothermoelasticity in functionally graded rectangular plate bonded to a piezoelectric plate. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(32): 4377~4401

- 33 He XQ, Liew KM, Ng TY, et al. A FEM model for the active control of curved FGM shells using piezoelectric sensor/actuator layers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54(6): 853~870.
- 34 Bian ZG, Ying J, Chen WQ, et al. Bending and free vibration analysis of a smart functionally graded plate. *Structural Engineering and Mechanics*, 2006, 23(1): 97~113
- 35 Yan W, Chen WQ. Electro-mechanical response of functionally graded beams with imperfectly integrated surface piezoelectric layers. *Science in China (Series G)*, 2006, 49(5): 513~525
- 36 陈伟球, 赵莉. 功能梯度材料平面问题的辛弹性力学解法. *力学学报*, 2009, 41(4): 588~594
- 37 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- 38 Zhao L, Chen WQ. On the numerical calculation in symplectic approach for elasticity problems. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2008, 9(5): 583~588
- 39 Zhao L, Chen WQ. Symplectic analysis of plane problems of functionally graded piezoelectric materials. *Mechanics of Materials*, 2009, 41(12): 1330~1339
- 40 Timoshenko SP, Goodier JN. *Theory of Elasticity*, 3rd Ed. New York: McGraw Hill, 1970
- 41 Horgan CO, Chan AM. The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks. *Journal of Elasticity*, 1999, 55(3): 219~230
- 42 Li XY, Ding HJ, Chen WQ. Pure bending of simply supported circular plate of transversely isotropic functionally graded material. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2006, 7(8): 1324~1328
- 43 Li XY, Ding HJ, Chen WQ. Elasticity solutions for a transversely isotropic functionally graded circular plate subject to an axisymmetric transverse load qr^k . *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(1): 191~210
- 44 Li XY, Ding HJ, Chen WQ. Axisymmetric elasticity solutions for a uniformly loaded annular plate of transversely isotropic functionally graded materials. *Acta Mechanica*, 2008, 196(3-4): 139~159
- 45 Li XY, Ding HJ, Chen WQ. Three-dimensional analytical solution for a transversely isotropic functionally graded piezoelectric circular plate subject to a uniform electric potential difference. *Science in China (Series G)*, 2008, 51(8): 1116~1125
- 46 Li XY, Ding HJ, Chen WQ. Three dimensional analytical solutions for functionally graded magneto-electro-elastic circular plates subjected to uniform load. *Composite Structures*, 2008, 83(4): 381~390
- 47 Kaprielian PV, Rogers TG, Spencer AJM. Theory of laminated elastic plates: I. isotropic laminae. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A)*, 1988, 324(1582): 565~594
- 48 Yang B, Ding HJ, Chen WQ. Elasticity solutions for a uniformly loaded annular plate of functionally graded materials. *Structural Engineering and Mechanics*, 2008, 30(4): 501~512
- 49 Yang B, Ding HJ, Chen WQ. Elasticity solutions for functionally graded plates in cylindrical bending. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, 29(8): 999~1004
- 50 Yang B, Ding HJ, Chen WQ. Elasticity solutions for a uniformly loaded rectangular plate of functionally graded materials with two opposite edges simply supported. *Acta Mechanica*, 2009, 207(3-4): 245~258
- 51 张晓日, 仲政. 功能梯度压电圆板自由振动问题的三维精确分析. *力学季刊*, 2005, 26(1): 81~86
- 52 Chen JY, Ding HJ, Chen WQ. Three-dimensional analytical solution for a rotating disc of functionally graded materials with transverse isotropy. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, 77(4): 241~251
- 53 Chen JY, Chen WQ. 3D analytical solution for a rotating transversely isotropic annular plate of functionally graded materials. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2007, 8(7): 1038~1043
- 54 Zhong Z, Shang ET. Exact analysis of a simply supported functionally graded piezothermoelectric plates. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2005, 16(7~8): 643~651
- 55 Zhong Z, Yu T. Vibration of a simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate. *Smart Materials and Structures*, 2006, 15(5): 1404~1412
- 56 Zhong Z, Shang ET. Closed-form solutions of three-dimensional functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2008, 15(5): 355 ~ 363
- 57 Zhang C, Zhong Z. Three-dimensional analysis of functionally graded plate based on the Haar wavelet method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2007, 20(2): 95~109
- 58 刘五祥, 仲政. 功能梯度平板的二维热弹性分析. *力学季刊*, 2008, 29(1): 40~47
- 59 刘五祥, 仲政. 任意梯度分布功能梯度板的柱形弯曲分析. *武汉理工大学学报*, 2008, 30(4): 106~109
- 60 刘五祥, 仲政. 任意梯度分布简支功能梯度板的三维弯曲分析. *复合材料学报*, 2009, 26(2): 195~199
- 61 Huang ZY, Lu CF, Chen WQ. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Composite Structures*, 2008, 85(2): 95~104
- 62 Wang HM, Ding HJ, Chen YM. Transient responses of multilayered spherically isotropic piezoelectric hollow sphere. *Archive of Applied Mechanics*, 2005, 74(9): 581~599
- 63 王惠明, 丁皓江, 陈云敏. 层合球面各向同性热释电空心球的瞬态响应. *力学学报*, 2005, 37(3): 287~294
- 64 Wang HM, Ding HJ. Transient responses of a magneto-electro-elastic hollow sphere for fully coupled spherically symmetric problem. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 2006, 25(6): 965~980
- 65 Wang HM, Chen YM, Ding HJ. Dynamic responses of a multilayered piezoelectric hollow cylinder under electric potential excitation. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2005, 6(9): 933~937
- 66 Wang HM, Ding HJ, Chen YM. Dynamic responses of multilayered pyroelectric hollow cylinder of crystal class 2mm for axisymmetric plane strain problems. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, 47(6): 799~821
- 67 Wang HM, Ding HJ. Transient responses of a special non-homogeneous magneto-electro-elastic hollow cylinder for fully coupled axisymmetric plane strain problem. *Acta Mechanica*, 2006, 184(1~4): 137~157
- 68 Wang HM, Ding HJ. Spherically symmetric transient responses of functionally graded magneto-electro-elastic hollow sphere. *Structural Engineering and Mechanics*, 2006, 23(5): 525~542
- 69 Gao LM, Wang J, Zhong Z, et al. An analysis of surface acoustic wave propagation in a plate of functionally graded materials with a layered model. *Science in China (Series G)*, 2008, 51(2): 165~175
- 70 Gao LM, Wang J, Zhong Z, et al. An analysis of surface acoustic wave propagation in functionally graded plates with homotopy analysis method. *Acta Mechanica*, 2009, 208(3-4): 249~258
- 71 高立名. 功能梯度材料板中声表面波传播的分析. [博士学位论文]. 上海: 同济大学, 2007

- 72 Pan YD, Song XH, Zhong Z, et al. Dispersion of surface acoustic wave for a functionally graded coating on curved surfaces. In: Fan J H, Chen H B, eds. *Advances in Heterogeneous Material Mechanics 2008*. Proceedings of the Second International Conference on Heterogeneous Material Mechanics, Huangshan (China), 2008-06-03~08. Lancaster, Pennsylvania: DEStech Publications Inc, 2008. 501~504
- 73 潘永东, 仲政, Audoin B. 柱形空腔内功能梯度涂层的表面波频散特性. *声学技术*, 2008, 27 (5, Part 2): 188~189
- 74 Chen WQ, Wang HM, Bao RH. On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate. *Composite Structures*, 2007, 81(2): 233~242
- 75 Pao YH, Chen WQ, Su XY. The reverberation-ray matrix and transfer matrix analyses of unidirectional wave motion. *Wave Motion*, 2007, 44(6): 419~438
- 76 Jiang JQ, Chen WQ. Reverberation-ray analysis of moving or distributive loads on a non-uniform elastic bar. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 319(1~2): 320~334
- 77 Guo YQ, Chen WQ. On free wave propagation in anisotropic layered media. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2008, 21 (6): 500~506
- 78 Guo YQ, Chen WQ. Wave propagation in functionally graded piezoelectric thin-films. In: Fan J H, Chen H B, eds. *Advances in Heterogeneous Material Mechanics 2008*, Proceedings of the Second International Conference on Heterogeneous Material Mechanics, Huangshan (China), 2008-06-03~08. Lancaster, Pennsylvania: DEStech Publications Inc. 2008. 1612~1615
- 79 Chen WQ, Guo YQ. Modeling of FGM-TFBARS with the method of reverberation-ray matrix. In: Fan J H, Chen H B, eds. *Advances in Heterogeneous Material Mechanics 2008*, Proceedings of the Second International Conference on Heterogeneous Material Mechanics, Huangshan(China), 2008-06-03~08. Lancaster, Pennsylvania: DEStech Publications Inc, 2008. 1626~1630
- 80 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论. 北京: 中国科学出版社, 1996
- 81 Chen WQ, Lü CF, Bian ZG. Elasticity solution for free vibration of laminated beams. *Composite Structures*, 2003, 62(1): 75~82
- 82 Chen WQ, Lü CF, Bian ZG. Free vibration analysis of generally laminated beams via state-space-based differential quadrature. *Composite Structures*, 2004, 63(3-4): 417~425
- 83 Lü CF, Chen WQ. Free vibration of orthotropic functionally graded beams with various end conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, 2005, 20(4): 465~476
- 84 Lü CF, Huang ZY, Chen WQ. Semi-analytical solutions for free vibration of anisotropic laminated plates in cylindrical bending. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 304 (3-5): 987~995
- 85 Lü CF, Lim CW, Xu F. Stress analysis of anisotropic thick laminates in cylindrical bending using a semi-analytical approach. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2007, 8(11): 1740~1745
- 86 Ying J, Lü CF, Chen WQ. Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations. *Composite Structures*, 2008, 84(3): 209~219
- 87 Zhou YY, Chen WQ, Lü CF, et al. Free vibration of cross-ply piezoelectric laminates in cylindrical bending with arbitrary edges. *Composite Structures*, 2009, 87(1): 93~100
- 88 Lü CF, Chen WQ, Zhong Z. Two-dimensional thermoelasticity solution for functionally graded thick beams. *Science in China (Series G)*, 2006, 49(4): 451~460
- 89 Nie GJ, Zhong Z. Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(49-52): 4901~4910
- 90 Nie GJ, Zhong Z. Axisymmetric bending of two-directional functionally graded circular and annular plates. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2007, 20(4): 289~295
- 91 Nie GJ, Zhong Z. Vibration analysis of functionally graded annular sectorial plates with simply supported radial edges. *Composite Structures*, 2008, 84(2): 167~176
- 92 Lü CF, Chen WQ, Xu RQ, et al. Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(1): 258~275
- 93 Nie GJ, Zhong Z. Asymmetric bending of bi-directional functionally graded circular plates. In: Fan J H, Chen H B, eds. *Advances in Heterogeneous Material Mechanics 2008*, Proceedings of the Second International Conference on Heterogeneous Material Mechanics, Huangshan(China), 2008-06-03~08. Lancaster, Pennsylvania: DEStech Publications Inc, 2008. 1013~1016
- 94 张纯. 基于小波方法的功能梯度结构静力分析与车桥耦合振动分析: [博士论文]. 上海: 同济大学, 2006
- 95 程国华, 曹志远. 复杂边界条件功能梯度板三维分析的半解析方法. *功能材料*, 2006, 37(8): 1348~1351
- 96 曹志远, 程国华. 变厚度及加肋功能梯度板分析的半解析方法. *同济大学学报 (自然科学版)*, 2007, 35(10): 1373~1378
- 97 曹志远, 程国华. 功能梯度材料板件三维分析的半解析梯度有限元法. *计算力学学报*, 2007, 24(6): 865~868
- 98 曹志远. 不同边界条件功能梯度矩形板固有频率解的一般表达式. *复合材料学报*, 2005, 22(5): 172~177
- 99 曹志远, 王华宁. 功能梯度开孔矩形板的动力特性解. *功能材料*, 2005, 36(8): 1273~1277
- 100 曹志远. 功能梯度板的非线性动力分析. *固体力学学报*, 2006, 27(1): 21~25
- 101 曹志远. 各种边界条件平行四边形功能梯度板的动力特性解析解. *力学季刊*, 2006, 27(2): 255~261
- 102 Cao ZY, Wang HN. Free vibration of FGM cylindrical shells with holes under various boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306(1-2): 227~237
- 103 曹志远. 功能梯度复合材料圆柱壳固有频率解. *地震工程与工程振动*, 2005, 25(6): 38~42
- 104 曹志远. 功能梯度复合材料圆柱壳基本理论及长壳固有振动解. *玻璃钢/复合材料*, 2006, (4): 3~6
- 105 曹志远. 功能梯度壳体力学的一般理论. *玻璃钢/复合材料*, 2008, (2): 7~11
- 106 Soldatos KP, Watson P. A method for improving the stress analysis performance of one-and two-dimensional theories for laminated composites. *Acta Mechanica*, 1997, 123(1-4): 163~186
- 107 Bian ZG, Chen WQ, Lim CW, et al. Analytical solutions for single- and multi-span functionally graded plates in cylindrical bending. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(24~25): 6433~6456
- 108 Lü CF, Lim CW, Chen WQ. Size-dependent elastic behavior of FGM ultra-thin films based on generalized refined theory. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(5): 1176~1185
- 109 李尧臣, 元峰, 仲政. 功能梯度压电材料圆板的简化理论与解析解. *力学学报*, 2008, 40(5): 636~645
- 110 Santare MH, Lambros J. Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2000, 67(4): 819~822

- 111 Li CY, Zou ZZ, Duan ZP. Multiple isoparametric finite element method for nonhomogeneous media. *Mechanics Research Communications*, 2000, 27(2): 137~142
- 112 Kim JH, Paulino GH. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2002, 69(4): 502~514
- 113 Santare MH, Thamburaj P, Gazonas GA. The use of graded finite elements in the study of elastic wave propagation in continuously nonhomogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(21): 5621~5634
- 114 Luo E, Huang WJ, Zhang HX. Unconventional Hamilton-type variational principle in phase space and symplectic algorithm. *Science in China (Series G)*. 2003, 46(3): 248~258
- 115 Zhong Z, Liu M, Luo E. Variational principles for functionally graded material and structures. In: Proceedings of the Asian Conference on Mechanics of Functional Materials and Structures, Matsue, Shimane, Japan, 2008.25~28
- 116 刘淼. 功能梯度材料结构的非传统 Hamilton 变分原理及其有限元法: [硕士学位论文]. 上海: 同济大学, 2008
- 117 朱昊文, 李尧臣, 杨昌锦. 功能梯度压电材料板的有限元解. *力学季刊*, 2005, 26(4): 567~571
- 118 曹志远, 程红梅. 非匀质材料板的微结构优化设计. *应用力学学报*, 2005, 22(3): 373~376
- 119 程红梅, 曹志远. 由材料组分直接计算功能梯度复合材料开孔板宏观响应的跨尺度分析. *复合材料学报*, 2006, 23(5): 161~167
- 120 程红梅, 曹志远. 复杂边界条件功能梯度板三维分析的细观元法. *工程力学*, 2006, 23(12): 19~24
- 121 程红梅, 曹志远. 具有不同功能梯度分布函数的板件的三维分析. *应用力学学报*, 2006, 23(4): 516~519
- 122 曹志远, 程红梅. 沿板平面材料组分变异功能梯度板件的跨尺度分析. *同济大学学报 (自然科学版)*, 2007, 35(11): 1460~1465
- 123 曹志远, 程红梅. 功能梯度材料构件三维分析的细观元模型. *计算力学学报*, 2007, 24(4): 392~396
- 124 曹志远, 程红梅. 空隙、杂质及组分突变对功能梯度构件动力特性的影响. *复合材料学报*, 2007, 24(5): 136~141
- 125 曹志远, 程红梅. 沿板平面材料梯度变化功能材料板件分析. *力学季刊*, 2007, 28(2): 203~208
- 126 程红梅, 曹志远. 沿板平面变异功能梯度板件的三维动力特性. *振动工程学报*, 2007, 20(3): 238~242
- 127 程红梅, 曹志远. 功能梯度材料与构件的静动力识别. *功能材料*, 2007, 38(11): 1859~1862
- 128 程红梅, 曹志远, 仲政. 不同功能梯度材料组分板件的跨尺度动力特性分析. *中国矿业大学学报*, 2008, 37(5): 719~725
- 129 Cao ZY, Tan SG, Cheng HM. Mechanical analysis of functionally graded plates based on the input data of metallographic diagrams. *Chinese Science Bulletin*, 2008, 53(9): 1294~1299
- 130 曹志远, 程红梅. 具有细观结构新材料跨尺度分析的细观元法. *数值计算与计算机应用*, 2008, 29(3): 186~196
- 131 Delale F, Erdogan F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50(3): 609~614
- 132 Delale F, Erdogan F. Interface crack in a nonhomogeneous elastic medium. *International Journal of Engineering Science*, 1988, 26(6): 559~568
- 133 Choi HJ. A periodic array of cracks in a functionally graded nonhomogeneous medium loaded under in-plane normal and shear. *International Journal of Fracture*, 1997, 88(2): 107~128
- 134 Chan YS, Paulino GH, Fannjiang AC. The crack problem for nonhomogeneous materials under antiplane shear loading—a displacement based formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(17): 2989~3005
- 135 Li YD, Jia B, Zhang N, et al. Anti-plane fracture analysis of functionally gradient material infinite strip with finite width. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(6): 773~780
- 136 Wang BL, Mai YW, Sun YG. Anti-plane fracture of a functionally graded material strip. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 2003, 22(3): 357~368
- 137 程站起, 仲政. 功能梯度板条断裂分析. *力学季刊*, 2005, 26(4): 544~548
- 138 Cheng ZQ, Zhong Z. Fracture analysis of a functionally graded strip under plane deformation. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2006, 19(2): 114~121
- 139 Cheng ZQ, Zhong Z. Fracture analysis of a functionally graded interfacial zone between two dissimilar homogeneous materials. *Science in China (Series G)*, 2006, 49(5): 540~552
- 140 程站起, 仲政. 功能梯度材料涂层平面裂纹分析. *力学学报*, 2007, 9(5): 685~691
- 141 Zhong Z, Cheng ZQ. Fracture analysis of a functionally graded strip with arbitrary distributed material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(13): 3711~3725
- 142 Guo LC, Noda N. Modeling method for a crack problem of functionally graded materials with arbitrary properties—piecewise-exponential model. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(21): 6768~6790
- 143 Dag S, Erdogan F. A surface crack in a graded medium loaded by a sliding rigid stamp. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69(14~16): 1729~1751
- 144 Erdogan F, Wu BH. The surface crack problem for a plate with functionally graded properties. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64(3): 449~456
- 145 Guo LC, Wu LZ, Zeng T, et al. Mode I crack problem for a functionally graded orthotropic strip. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 2004, 23(2): 219~234
- 146 Ueda S. The surface crack problem for a layered plate with a functionally graded nonhomogeneous interface. *International Journal of Fracture*, 2001, 110(2): 189~204
- 147 Guo LC, Wu LZ, Ma L, et al. Fracture analysis of a functionally graded coating-substrate structure with a crack perpendicular to the interface - Part I: Static problem. *International Journal of Fracture*, 2004, 127(1): 21~38
- 148 Li YD, Lee KY. An anti-plane crack perpendicular to the weak/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities. *International Journal of Fracture*, 2007, 146(4): 203~211
- 149 Yong HD, Zhou YH. Analysis of a mode III crack problem in a functionally graded coating-substrate system with finite thickness. *International Journal of Fracture*, 2006, 141(3~4): 459~467
- 150 Guo LC, Noda N. Fracture mechanics analysis of functionally graded layered structures with a crack crossing the interface. *Mechanics of Materials*, 2008, 40(3): 81~99
- 151 Itou S. Stress intensity factors around a crack in a nonhomogeneous interfacial layer between two dissimilar elastic half-planes. *International Journal of Fracture*, 2001, 110(2): 123~135
- 152 Wang BL, Mai YW, Noda N. Fracture mechanics analysis model for functionally graded materials with arbitrarily distributed properties. *International Journal of Fracture*, 2002, 116(2): 161~177

- 153 Wang YS, Gross D. Analysis of a crack in a functionally gradient interface layer under static and dynamic loading. *Key Engineering Materials*, 2000, 183-187: 331~336
- 154 Huang GY, Wang YS, Yu SW. Fracture analysis of a functionally graded interfacial zone under plane deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41(3-4): 731~743
- 155 李春雨, 邹振祝, 段祝平. 功能梯度材料裂纹尖端动态应力场. *力学学报*, 2001, 33(2): 270~274
- 156 Li CY, Weng GJ, Duan ZP. Dynamic behavior of a cylindrical crack in a functionally graded interlayer under torsional loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(42-43): 7473~7485
- 157 Chen J, Liu ZX, Zou ZZ. Transient internal crack problem for a nonhomogeneous orthotropic strip (Mode I). *International Journal of Engineering Science*, 2002, 40(15): 1761~1774
- 158 Li YD, Tan W, Zhang HC. Anti-plane transient fracture analysis of the functionally gradient elastic bi-material weak/infinitesimal-discontinuous interface. *International Journal of Fracture*, 2006, 142(1-2): 163~171
- 159 Guo LC, Wu LZ, Zeng T. The dynamic response of an edge crack in a functionally graded orthotropic strip. *Mechanics Research Communications*, 2005, 32(4): 385~400
- 160 Guo LC, Wu LZ, Sun YG, et al. The transient response of a crack in a functionally graded strip under an in-plane impact load. *ZAMM*, 2005, 85(10): 711~720
- 161 Guo LC, Wu LZ, Sun YG, et al. The transient fracture behavior for a functionally graded layered structure subjected to an in-plane impact load. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 21(3): 257~266
- 162 Guo LC, Wu LZ, Zeng T, et al. The transient response of a coating-substrate structure with a crack in the functionally graded interfacial layer. *Composite Structures*, 2005, 70(1): 109~119
- 163 Ma L, Wu LZ, Guo LC, et al. On the moving Griffith crack in a non-homogeneous orthotropic medium. *European Journal of Mechanics— A/Solids*, 2005, 24(3): 393~405
- 164 Ma L, Wu LZ, Guo LC. On the moving Griffith crack in a nonhomogeneous orthotropic strip. *International Journal of Fracture*, 2005, 136(1~4): 185~203
- 165 Cheng ZQ, Zhong Z. Analysis of a moving crack in a functionally graded strip between two homogeneous layers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, 49(9): 1038~1046
- 166 Ma L, Wu LZ, Guo LC, et al. Dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials. *Mechanics of Materials*, 2005, 37(11): 1153~1165
- 167 Ma L, Nie W, Wu LZ, et al. Scattering of anti-plane stress waves by a crack in a non-homogeneous orthotropic medium. *Composite Structures*, 2007, 79(2): 174~179
- 168 Ma L, Li J, Abdelmoula R, et al. Dynamic stress intensity factor for cracked functionally graded orthotropic medium under time-harmonic loading. *European Journal of Mechanics— A/Solids*, 2007, 26(2): 325~336
- 169 Wang BL, Han JC, Du SY. Crack problems for non-homogeneous composites subjected to dynamic loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(9): 1251~1274.
- 170 Guo LC, Noda N. Dynamic investigation of a functionally graded layered structure with a crack crossing the interface. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(1): 336~357
- 171 Jin ZH, Noda N. Crack-tip singular fields in nonhomogeneous materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1994, 61(3): 738~740
- 172 Erdogan F, Wu BH. Crack problem in FGM layers under thermal stresses. *Journal of Thermal Stresses*, 1996, 19(3): 237~265
- 173 Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*, 1999, 22(4): 477~512
- 174 王保林, 杜善义, 韩杰才. 非均匀复合材料的动态热弹性断裂力学分析. *力学学报*, 1999, 31(5): 550~562
- 175 Noda N, Guo LC. Thermal shock analysis for a functionally graded plate with a surface crack. *Acta Mechanica*, 2008, 195(1~4): 157~166
- 176 Jin ZH, Paulino GH. Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *International Journal of Fracture*, 2001, 107(1): 73~98
- 177 Guo LC, Noda N, Wu LZ. Thermal fracture model for a functionally graded plate with a crack normal to the surfaces and arbitrary thermomechanical properties. *Composites Science and Technology*, 2008, 68(3~4): 1034~1041
- 178 Hu KQ, Zhong Z, Jin B. Anti-plane shear crack in a functionally gradient piezoelectric layer bonded to dissimilar half spaces. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, 47(1): 82~93
- 179 Hu KQ, Zhong Z. A moving mode-III crack in a functionally graded piezoelectric strip. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2005, 2(1~2): 61~79
- 180 Ma L, Wu LZ, Zhou ZG, et al. Fracture analysis of a functionally graded piezoelectric strip. *Composite Structures*, 2005, 69(3): 294~300
- 181 Ma L, Wu LZ, Zhou ZG, et al. Scattering of the harmonic anti-plane shear waves by a crack in functionally graded piezoelectric materials. *Composite Structures*, 2005, 69(4): 436~441
- 182 Ma L, Nie W, Wu LZ, et al. Scattering of the harmonic stress wave by cracks in functionally graded piezoelectric materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2005, 18(4): 295~301
- 183 Zhou ZG, Zhang PW, Wu LZ. The closed form solution of a Mode-I crack in the piezoelectric/piezomagnetic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(2): 419~435
- 184 Zhang PW, Zhou ZG, Wu LZ. Solutions of two or four parallel Mode-I permeable cracks in magneto-electroelastic composite materials. *Philosophical Magazine*, 2007, 87(22): 3175~3208
- 185 Zhou ZG, Wu LZ, Du SY. The dynamic behavior of two parallel interface cracks in magneto-electro-elastic materials under the harmonic anti-plane shear stress waves. *Strength, Fracture and Complexity*, 2006, 4(3), 169~184
- 186 Zhou ZG, Zhang PW, Wu LZ. Solutions to a limited-permeable crack or two limited-permeable collinear cracks in piezoelectric/piezomagnetic materials. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, 77(2): 861~882
- 187 Zhang PW, Zhou ZG, Chen ZT. Basic solution of two parallel Mode-I permeable cracks in functionally graded piezoelectric materials. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, 78(6): 411~430
- 188 Zhou ZG, Hui JF, Wu LZ. Basic solution of a Mode-I limited-permeable crack in functionally graded piezoelectric materials. *Mechanica*, 2008, 43(1): 21~35
- 189 Zhou ZG, Wang JZ, Wu LZ. Two collinear Mode-I cracks in piezoelectric/piezomagnetic materials. *Structural Engineering and Mechanics*, 2008, 29(1): 55~75
- 190 Zhou ZG, Chen ZT. Basic solution of a Mode-I limited-permeable crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(7~8): 2265~2296

- 191 Zhou ZG, Wu LZ, Du SY. Non-local theory solution for a mode I crack in piezoelectric materials. *European Journal of Mechanics— A/Solids*, 2006, 25(5): 793~807
- 192 Zhou ZG, Liang J, Wu LZ. The nonlocal theory solution of a mode-I crack in functionally graded materials subjected to harmonic stress waves. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2006, 1(3): 447~470
- 193 Zhou ZG, Zhang PW, Wu LZ. Investigation of the behavior of a Mode-I crack in the functionally graded materials by non-local theory. *International Journal of Engineering Science*, 2007, 45(2-8): 242~257
- 194 Zhou ZG, Wu LZ, Du SY. Non-local theory solution of two Mode-I collinear cracks in the piezoelectric materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2007, 14(3): 191~201
- 195 Zhou ZG, Du SY, Wu LZ. Investigation of anti-plane shear behavior of a Griffith permeable crack in functionally graded piezoelectric materials by use of the non-local theory. *Composite and Structures*, 2007, 78(4): 575~583
- 196 Zhou ZG, Wu LZ. The non-local theory solution of a crack in the functionally graded piezoelectric materials subjected to the harmonic anti-plane shear stress waves. *Key Engineering Material*, 2007, 353~358: 258~262
- 197 Eringen AC, Speziale CG, Kim BS. Crack tip problem in non-local elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1977, 25(5): 339~355
- 198 Eringen AC. Linear crack subject to shear. *International Journal of Fracture*, 1978, 14(4): 367~379
- 199 Eringen AC. Line crack subject to antiplane shear. *Engineering Fracture Mechanics*, 1979, 12(2): 211~219
- 200 Parameswaran V, Shukla A. Dynamic fracture of a functionally gradient material having discrete property variation. *Journal of Material Science*, 1998, 33(13): 3303~3311
- 201 Butcher RJ, Rousseau CE, Tippur HV. A functionally graded particulate composite: preparation, measurements and failure analysis. *Acta Materialia*, 1999, 47(1): 259~268
- 202 Marur PR, Tippur HV. Dynamic response of bimaterial and graded interface cracks under impact loading. *International Journal of Fracture*, 2000, 103(1): 95~109
- 203 Rousseau CE, Tippur HV. Influence of elastic gradient profiles on dynamically loaded functionally graded materials: cracks along the gradient. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(44~45): 7839~7856
- 204 Abanto-Bueno J, Lambros J. Investigation of crack growth in functionally graded materials using digital image correlation. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69(14-16): 1695~1711
- 205 程军, 陈英, 李禾. SiC/Al 梯度功能材料在机械载荷及热载下的应变测试. *力学季刊*, 2006, 27(1): 70~75
- 206 Xu W, Yao XF, Wu LZ. Experimental study on K-dominance of static crack tip in functionally gradient materials. *Key Engineering Materials*, 2007, 348~349: 789~792
- 207 许蔚, 孟庆杰, 李俊. 功能梯度材料的数字散斑相关方法实验研究. *哈尔滨工业大学学报*, 2008, 40(9): 1408~1411
- 208 许蔚. 功能梯度材料静态断裂的 CGS 方法实验研究. *哈尔滨工业大学学报*, 2007, 39(5): 765~770
- 209 许蔚, 姚学锋. 线性规律对功能梯度材料断裂行为实验研究. *力学学报*, 2008, 40(4): 485~495
- 210 Jin X, Wu LZ, Guo LC, et al. Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO₂/NiCr functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, 76(12): 1800~1810

PROGRESS IN THE STUDY ON MECHANICS PROBLEMS OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS AND STRUCTURES*

ZHONG Zheng^{1,†} WU Linzhi² CHEN Weiqiu³

¹School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092

²Institute of Composite Materials, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150001

³ Department of Engineering Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027

Abstract Owing to the continuously varying characteristics of macroscopic material properties of functionally graded materials (FGMs), the governing partial differential equations, even within the framework of linear elasticity, are those with variable coefficients, making the mechanics study a tough challenge. This paper gives a survey on the recent advances in the study on functionally graded materials and structures. We focus on the following three aspects: (1) the analytical and the semi-analytical solutions of functionally graded beams, plates and shells as well as their simplified theories, (2) the numerical methods for FGM structures, and (3) the fracture analysis of functionally graded materials. Perspective is finally given for future development of mechanics analysis of functionally graded materials and structures.

Keywords functionally graded materials, structural analysis, numerical methods, fracture mechanics

* The project supported by National Natural Science Foundation of China (10432030)

† E-mail: zhongk@tongji.edu.cn



仲政, 同济大学教授, 福建漳州人. 分别于 1985 年、1987 年和 1991 年获清华大学学士、硕士和博士学位. 现任同济大学同济大学航空航天与力学学院院长. 兼任中国力学学会常务理事兼断裂与损伤专业组组长、上海市力学学会副理事长兼秘书长、上海市复合材料学会副理事长, 担任《中国科学》、《力学学报》、《力学进展》、《固体力学学报》、《应用力学学报》、《同济大学学报》和 *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, *Journal of Mechanics and MEMS*, *Open Mechanical Engineering Journal* 编委, 《力学季刊》副主编. 主要研究方向是先进材料与结构的力学行为、计算力学与仿真、结构的振动、噪声与控制等. 2000 年获首届全国高校青年教师奖、2001 年获国家杰出青年科学基金、2005 年获国务院政府特殊津贴、2006 年入选上海市优秀学科带头人计划、2007 年入选上海市领军人才计划和新世纪百千万人才工程国家级人选.



吴林志, 哈尔滨工业大学教授, 黑龙江省哈尔滨市人. 1992 年毕业于哈尔滨工业大学固体力学专业, 获博士学位. 多年来从事复合材料细观力学、先进复合材料及其结构的设计/制备/分析/评价一体化、功能梯度材料断裂力学等方面的研究工作. 现任中国力学学会常务理事、中国力学学会固体力学专业委员会副主任、*Acta Mechanica Sinica* 编委、《固体力学学报》编委、《力学进展》编委等职. 截止目前, 发表论文 200 余篇.



陈伟球, 浙江大学航空航天学院工程力学系教授, 江苏吴江人. 1996 年浙江大学力学系固体力学专业博士毕业. 研究方向为压电材料及功能梯度材料等先进功能材料及其结构的力学分析、三维断裂和接触问题、结构健康监测技术理论及实验、流固耦合等. 已与人合作出版英文专著 2 部和中文专著 1 部, 发表期刊论文 200 余篇, 担任《力学学报》、《固体力学学报》、《振动工程学报》、*Journal of Zhejiang University (Science A)* 和 *The Open Acoustics Journal* 编委, 中国力学学会理事, 中国力学学会电子电磁器件力学工作组副组长, 中国力学学会固体力学专业委员会、计算力学专业委员会和青年工作委员会委员, 微纳米力学工作组组员以及固体力学专业委员会断裂与疲劳专业组和智能材料与结构专业组组长, 浙江省力学学会常务理事. 2002 年获教育部高校科学技术奖二等奖和霍英东青年教师奖研究类三等奖各一项. 2005 年入选“教育部新世纪优秀人才支持计划”, 2007 年获得国家自然科学基金委员会杰出青年基金 (200 万) 资助, 2008 年获“浙江省优秀留学回国人员”荣誉称号, 2009 年获得第十届中国力学学会青年科技奖.