

超弹性材料的不稳定性问题*

任九生[†] 程昌钧

上海大学力学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200444

摘要 超弹性材料是一类性能独特、不可替代且有广泛工程应用的高分子材料, 对其独特的材料不稳定性问题的研究极大地推动了连续介质力学有限变形理论和超弹性理论的发展. 综述了超弹性材料中的材料不稳定性问题的研究成果和最新进展, 包括 Rivlin 立方块问题、薄壁球壳和薄壁圆筒的内压膨胀问题、圆柱的扭转问题、块体的表面不稳定性问题、空穴的生成、增长和闭合问题等. 阐述了这类材料中各类非线性不稳定性问题的特点、问题的求解、主要结果及今后进一步的研究方向等.

关键词 超弹性材料, 材料不稳定性, 非线性, 分叉

1 引言

超弹性材料泛指橡胶材料, 聚合物、合成弹性体等高分子材料和血管、肌肉、皮肤等生物软组织为代表的类橡胶材料^[1~3], 它们具有大变形和高弹性的独特特点和诸多优点. 在国民经济各领域几乎都有应用, 而且其应用越来越广泛, 在材料领域中的地位也越来越重要, 特别是近年来在航空航天等高科技领域中的应用. “挑战者”号航天飞机因“O”型橡胶密封圈的缘故造成的失事使人们认识到材料力学及超弹性材料不稳定性的重要性, 因此这类材料受到人们的极大关注, 已成为材料科学的前沿性课题; “哥伦比亚”号航天飞机的失事再一次昭示了材料问题的重要性. 超弹性材料的应力应变关系完全由它们的应变能函数给出, 且其材料特性和几何特性都是非线性的. 问题的数学模型一般是非线性的微分方程的初边值问题, 求解非常困难, 大变形问题的求解和材料应变能函数的确定一起构成超弹性材料的两个核心问题.

超弹性材料属于高分子材料, 其微观结构是由长长的分子链交结在一起的网状结构(图 1). 在外力作用下, 卷曲的长分子链可以逐渐伸长, 在宏观上表现为高达百分之几百的大变形. 且当外力消失后, 拉直的长链可以恢复到原来的状态, 这就是材料的高弹性^[4,5]. 当外载荷达到某一程度时,

材料内部可以突然出现滑移带或局部化的损伤构造, 材料由稳定的连续变形状态突然过渡到另一状态, 在宏观上可以表现为许多令人感兴趣的特殊现象, 如软化, 相变, 变形局部化, 裂纹起裂、传播和分叉, 空洞的形成、扩大和联合等不稳定现象^[6~9], 并进而引起材料和结构的损伤或破坏, 从而产生材料不稳定性问题. 超弹性材料因其独特的大变形特性使其稳定性问题更为奇妙: 材料从一个平衡状态向另一个平衡状态转变的分岔现象尤其重要, 分岔也正是叙述超弹性材料不稳定性问题的核心; 考虑到类橡胶材料的物理性质和力学性质对温度影响的敏感性, 在一定环境下还必须考虑温度场及温度场和应力场的耦合作用对超弹性材料各类不稳定性问题的影响.

本文在简要介绍连续介质力学有限变形理论和超弹性本构理论的基础上, 概述了超弹性材料不稳定性问题的研究进展, 主要包括: Rivlin 立方块问题、薄壁球壳和薄壁圆筒的内压膨胀问题、圆柱的扭转问题、块体的表面不稳定性问题、空穴的生成、增长和闭合问题等问题的特点、问题的求解、主要结果及今后进一步的研究方向. 问题的研究一方面可以丰富连续介质力学的大变形弹性理论, 另一方面能够为橡胶复合材料的工程应用提供参考, 特别是关于材料的断裂和疲劳寿命等方面.

收稿日期: 2008-02-20, 修回日期: 2009-04-22

* 国家自然科学基金项目 (10772104), 上海市教委科研创新项目 (09YZ12) 和上海市重点学科建设项目 (S30103) 资助

[†] E-mail: jsren@shu.edu.cn

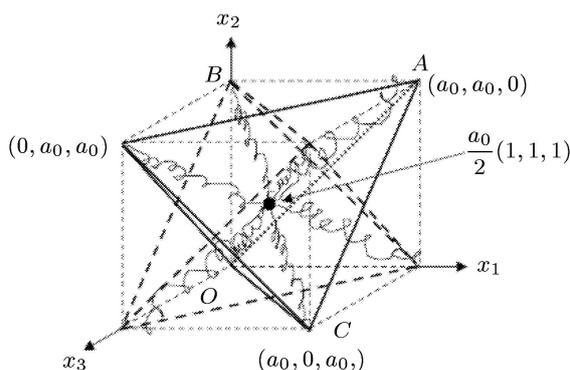


图 1 橡胶弹性的八条链微观模型^[5]

2 问题的基本方程

因超弹性材料的大变形特点，其变形或运动由连续介质力学的有限变形几何描述^[10,11]，需建立初始时刻的物质坐标 X 和当前时刻 t 的空间坐标 x ，两者之间存在一一对应的可逆关系

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{1}$$

即材料的变形模式，相应的变形梯度张量

$$\mathbf{F} = x_{k,K} \tag{2}$$

描述物体的变形信息，是超弹性理论中一个关键的量，其最大特征是成立极分解

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \tag{3}$$

式中， \mathbf{R} 是正交张量，表示纯转动； \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 是对称的正定张量，表示局部伸长变形，分别称为右和左 Cauchy-Green 伸长张量，它们具有相同的主值即 3 个主伸长 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，但两个伸长张量是一个平方根张量，求解困难，故引入相应的右和左 Cauchy-Green 变形张量。

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \tag{4}$$

这两个变形张量具有 3 个相同的主值 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ 或 3 个相同的不变量 I_1, I_2, I_3

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{B} = (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + (\lambda_3)^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} [I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2)] = (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_3 \lambda_1)^2 \\ I_3 &= \det \mathbf{B} = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

如第 3 不变量 $I_3 = 1$ ，则称材料为不可压材料，否则称为可压材料。

关于超弹性材料的应变能函数 W ，已有各种各样的形式^[12~15]，包括不可压的或可压的，各向

同性的、横观各向同性的、各向异性的，小变形的或大变形的，等温的或考虑温度变化影响的，不考虑材料硬化效应的或考虑材料硬化效应的，微观模型或连续介质模型，以不变量形式表示的或以主伸长形式表示的等。如最常用的有不可压 neo-Hookean 材料

$$W = \frac{\mu}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) \tag{6}$$

式中，材料常数 μ 为小变形时材料的剪切模量。不可压 Mooney-Rivlin 材料

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \tag{7}$$

式中， C_1, C_2 为材料常数。不可压 Ogden 材料

$$W = \sum_r \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\lambda_r^{\alpha_r} + \lambda_\theta^{\alpha_r} + \lambda_z^{\alpha_r} - 3) \tag{8}$$

式中， μ_r, α_r 为材料常数。

材料的应力状态由作用于物体已变形构形上的 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ ，“虚拟”的作用在物体初始构形上的第 1 类 Piola-Kirchhoff 应力张量 \mathbf{T} 或第 2 类 Piola-Kirchhoff 应力张量 \mathbf{S} 描述。它们分别满足各自的运动方程和边界条件，并由应变能函数确定。以 Cauchy 应力张量为例，满足运动方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{x}} \tag{9}$$

式中， \mathbf{f} 为体力密度，且应力张量由下式确定

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T = \\ &= 2J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} \end{aligned} \tag{10}$$

不变量 $J = \sqrt{I_3}$ ，以变形不变量形式表示的应力应变关系

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{B}^2 \tag{11}$$

式中， $a_0 = 2\rho I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}$ ， $a_1 = 2\rho \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$ ， $a_2 = -2\rho \frac{\partial W}{\partial I_2}$ 。

对于不可压超弹性材料， $I_3 = J = 1$ ，相应的应力应变关系为

$$\boldsymbol{\tau} = -p \mathbf{I} + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{B}^2 \tag{12}$$

式中， p 为非确定的静水压力，是作为约束应力引入的，是超弹性材料受到不可压条件的约束限制

时对应力应变关系的修正. 3 类应力张量之间具有如下关系

$$\mathbf{T} = J\tau\mathbf{F}^{-T}, \mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T} \quad (13)$$

3 Rivlin 立方块问题

受到突然施加的、面内均匀分布、3 个方向大小相等的拉伸死载荷作用的不可压 neo-Hookean 材料立方块, 当载荷较小时, 平衡状态是唯一的, 即立方块保持不变形; 但当载荷达到某一临界值时, 除不变形的平凡解外还有 6 个分岔解存在, 且分岔解是稳定的, 即立方块不再保持均匀变形, 而是在 3 个方向发生了大小不一的非对称变形. 这类在对称载荷作用下产生了非对称变形的分岔问题称为 Rivlin 非对称分岔问题. 关于问题的求解, Rivlin^[16,17] 从最小势能原理出发, 构造结构的总势能, 然后通过变分方法找到了问题的解析解. 3 个方向均受拉伸死载荷 p_0 作用的立方块的总势能为

$$\Phi = \int_v [W(\mathbf{F}) - \mathbf{T}\mathbf{F} - p(|\mathbf{F}| - 1)]dV \quad (14)$$

可由变分 $\delta\Phi = 0$ 找到问题的解, 由 $\delta^2\Phi$ 的符号判定解的稳定性.

当 $\frac{p_0}{\mu} < 3\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}$ 时, 问题只有一个平凡解 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; 但当 $\frac{p_0}{\mu} > 3\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}$ 时, 问题除平凡解 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 外还有 6 个解

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2, 0 < \lambda_3 < \frac{1}{3}\frac{p_0}{\mu} & \quad \lambda_1 = \lambda_2, \frac{1}{3}\frac{p_0}{\mu} < \lambda_3 < \frac{p_0}{\mu} \\ \lambda_2 = \lambda_3, 0 < \lambda_1 < \frac{1}{3}\frac{p_0}{\mu} & \quad \lambda_2 = \lambda_3, \frac{1}{3}\frac{p_0}{\mu} < \lambda_1 < \frac{p_0}{\mu} \\ \lambda_3 = \lambda_1, 0 < \lambda_2 < \frac{1}{3}\frac{p_0}{\mu} & \quad \lambda_3 = \lambda_1, \frac{1}{3}\frac{p_0}{\mu} < \lambda_2 < \frac{p_0}{\mu} \end{aligned} \quad (15)$$

Rivlin 立方块问题在平面应力状态下就是方板的对称拉伸问题. Kearsley^[18] 分析了受均布拉伸载荷 q 作用的 Mooney-Rivlin 材料方板, 在面内各边完全相同的拉伸载荷作用下, 当载荷较小时, 问题只有平凡解, 相应的平衡状态是唯一的, 即方板在面内两个方向的伸展大小相等; 但当载荷达到某一临界值 q_{cr} 时, 除对称性的伸展外, 方板会产生非对称的伸长变形, 在面内两个方向的伸展大小不再相等, 且它是稳定的. 另外, 非对称分岔问题在实验上也得到了证实. Treloar^[19] 于 1948 年在

实验中发现四边受相同的拉力作用的方形超弹性薄板有 3 个平衡状态, 其中有两个是非对称的.

双向等拉伸方板的变形控制方程为

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \{ (\lambda_1^3\lambda_2^3 + 1)W_1 + \\ (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^4\lambda_2^4)W_2 \} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

当 $q < q_{cr} = 2.26 \text{ MPa}$ 时 (取定材料常数 $C_1 = 0.179 \text{ MPa}$, $C_2 = 0.015 \text{ MPa}$), $\lambda_1 = \lambda_2$, 方板仅产生对称的变形; 当 $q \geq q_{cr} = 2.26 \text{ MPa}$ 时, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 方板产生非对称的变形. 不可压 Mooney-Rivlin 材料方板的分岔曲线如图 2 所示^[20].

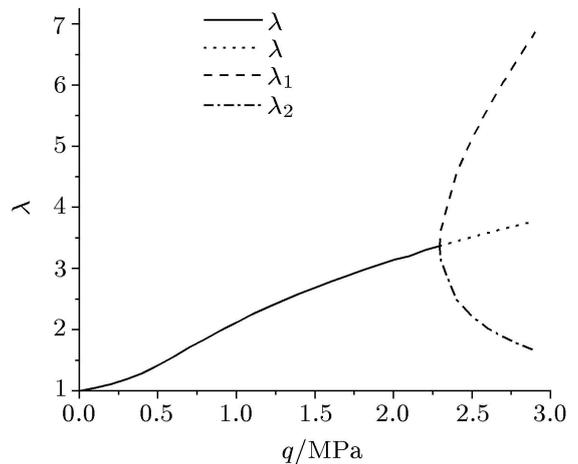


图 2 方板的分岔曲线

4 薄壁球壳和薄壁圆筒的内压膨胀问题

对于受均布内压作用的不可压超弹性薄壁球壳, 当内压较小时, 球壳保持原来的形状, 发生对称的均匀膨胀变形; 但当内压大于某一临界值时, 球壳产生复杂的非对称变形, 其中一部分膨胀变形很大, 而另外部分仅仅是轻微膨胀, 且球壳的形状逐渐远离球形^[21,22]. 如对变形前半径为 r_0 , 厚度为 d_0 ($d_0 \ll r_0$) 的 Gent 材料气球在膨胀压力 p 作用下的变形问题, 可根据能量守恒定理得到其变形与压力间的关系为

$$p(\lambda) = \frac{t_0}{r_0\lambda^2} \frac{dW(\lambda)}{d\lambda} \quad (17)$$

$\lambda_\theta = \lambda_\varphi = \lambda$ 表示气球的变形, 材料常数 $J_m = 97.2$, $E = 3.5 \times 10^6 \text{ MPa}$. 气球的变形曲线如图 3 所示.

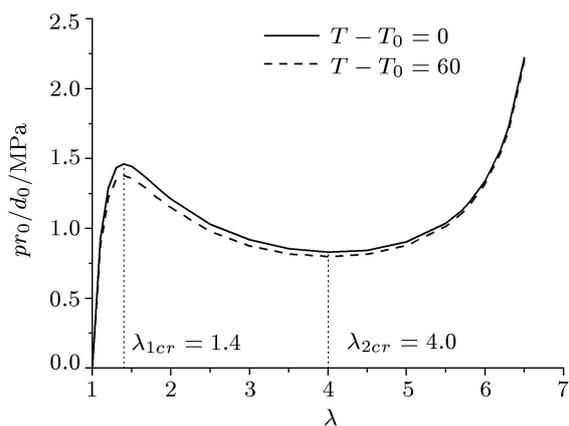


图 3 气球的膨胀曲线

可见存在一个膨胀压力的极大值 $p_1 = p(\lambda = \lambda_{1cr} = 1.4)$. 当压力小于这个极大值时, 随着变形的增加, 压力迅速增加, 气球有一个稳定的变形且大致呈球形; 但当压力大于这个极大值时, 随着变形的增加, 压力反而减小, 气球的变形变得不稳定, 微幅膨胀后的气球有一个复杂的变形, 其一部分只被轻微的拉伸而其他部分却被高强度拉伸, 所以明显地远离球形而变得不规则; 最后, 当压力大于压力的极小值 $p_2 = p(\lambda = \lambda_{2cr} = 4.0)$ 时, 随着变形的增加, 压力持续地增加, 气球的变形又成为稳定的变形, 并恢复了球形. 典型的气球膨胀实验结果也是基本如此.

对于受均布内压作用的不可压超弹性薄壁圆筒, 当内压较小时, 圆筒发生稳定的均匀膨胀变形;

当内压大于某一临界值时, 圆筒产生复杂的非均匀变形. 其中一段膨胀变形很大, 形如“灯泡”状, 而另外部分仅仅是轻微膨胀 [23,24], 生物血管中形成的血管瘤就是一个典型的例子, 如图 4 所示.

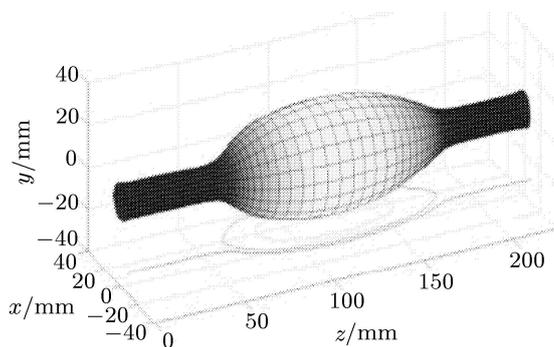


图 4 血管瘤示意图

对不可压材料薄壁球壳或薄壁圆筒, 总是可以借助于不可压条件得到变形模式函数, 得到积分形式的压力和变形之间的关系式. 如对内、外半径分别为 a 和 b , 且受到内压 p 作用的广义不可压 Ogden 热弹性材料

$$W = \sum_r \frac{\mu_r}{\alpha_i} (\lambda_r^{\alpha_r} + \lambda_\theta^{\alpha_r} + \lambda_z^{\alpha_r} - 3) + \rho c_3 T \ln T/T_0 + 2c_4(T - T_0)(I_1 - 3)$$

c_3, c_4 为材料常数, T 为温度场, T_0 为给定的参考温度. 对薄壁圆筒, 有

$$p = \int_{v(b)}^{v(a)} \frac{\sum_r \mu_{\alpha_r} (\lambda_3^{-\alpha_r} v^{-1-\alpha_r} - v^{\alpha_r-1}) + 4c_4(T - T_0) (\lambda_3^{-2} v^{-3} - v)}{1 - \lambda_3 v^2} dv \tag{18}$$

由上式得到相应的变形曲线, 对等温条件下壁厚比 (内外半径之比) 为 $\eta = \frac{a}{b} = 0.7$ 的圆筒在不同轴向拉伸情况下的变形曲线如图 5 所示 [24]. 结合圆筒的能量比较曲线图 6 可知, 当内压小于某一极大值 p_{max} 时, 圆筒随着内压的增加而均匀膨胀; 当内压大于极大值时, 圆筒产生复杂的非均匀变形; 当圆筒的变形大于某一极小值 p_{min} 时, 圆筒会达到第 2 个稳定的变形状态.

但对壁厚较厚的球壳或圆筒, 则不存在不稳定的变形状态. 内压总是随着球壳或圆筒变形的增加而增加, 即变形曲线是单调的, 而不稳定变形曲线则是非单调的. 由此可得圆筒可以发生不稳定的

变形的临界壁厚条件 (如对圆筒)

$$\eta_{cr} = \left(\frac{1.47^2 - \lambda_3^{-1}}{3.5^2 - \lambda_3^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

圆筒的临界壁厚值随着轴向伸长的增加而增加, 如 $\lambda_3 = 1.0$ 时, $\eta_{cr} = 0.32$; $\lambda_3 = 1.2$ 时, $\eta_{cr} = 0.34$; $\lambda_3 = 1.5$ 时, $\eta_{cr} = 0.36$. 当圆筒的壁厚小于这个临界壁厚时, 圆筒中可以产生不稳定的变形; 但圆筒的壁厚大于临界壁厚时, 圆筒的变形则总是稳定的; 轴向伸长的增加可提高发生不稳定变形的圆筒的壁厚.

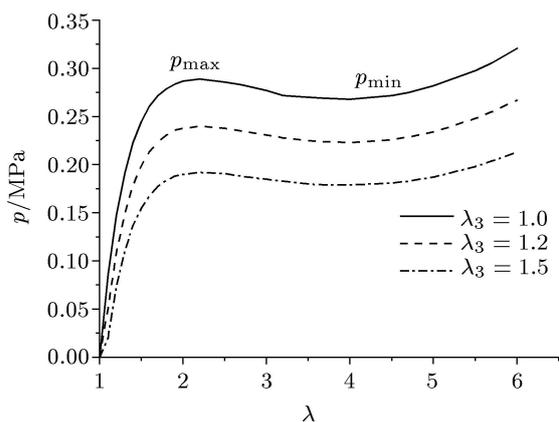


图 5 薄壁圆筒的变形曲线

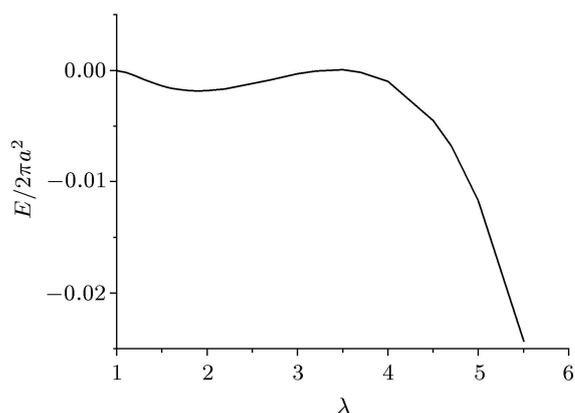


图 6 薄壁圆筒的能量曲线

5 圆柱的扭转问题

对于受轴向拉伸和强扭转作用的不可压超弹性圆柱体, 当外加扭矩较小时, 圆柱体发生均匀的扭转变形; 当其受到足够大的扭转作用时, 柱体产生复杂的非对称变形, 柱体转动圈数的一圈会被释放, 在柱体内某一点会突然生成一个“结”^[25,26], 如图 7 所示^[26]. 问题的求解是从最小势能原理出发, 构造结构的总势能, 然后通过变分找到了问题的解. 如受扭不可压 Mooney-Rivlin 超弹性材料圆柱的总势能为^[25]

$$W = \pi L_0 a^2 \left[C_1 \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 + \frac{\lambda k^2 a^2}{2} \right) + C_2 \left(2\lambda + \frac{2}{\lambda^2} - 3 + \frac{k^2 a^2}{2} \right) \right] \quad (20)$$

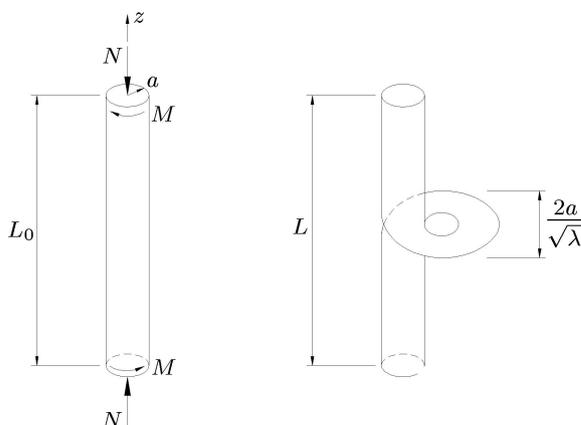


图 7 受扭圆柱的变形

式中, k 为柱体单位长度的扭转角, λ 为柱体的轴向伸长率. 由 $\Delta W = 0$ 可得扭转的临界值

$$4C_1 \left[\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{a^2 k^2}{4} \right) \left(\frac{\pi}{k} - \frac{a}{\sqrt{\lambda}} \right) - 2\pi a^2 k \right] + 4C_2 \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left(\frac{\pi}{k} - \frac{a}{\sqrt{\lambda}} \right) - \frac{2\pi a^2 k}{\lambda} \right] = 0 \quad (21)$$

由上式所得扭转的临界值 ak_{cr} 如图 8 所示, 可见扭转的临界值 ak_{cr} 随柱体伸长率的增加而增加. 且当 $ak > ak_{cr}$, 柱体中的“结”形成时, 外加扭矩和轴向拉力会发生不连续的跳跃, 柱体中的应力也会发生不连续的跳跃.

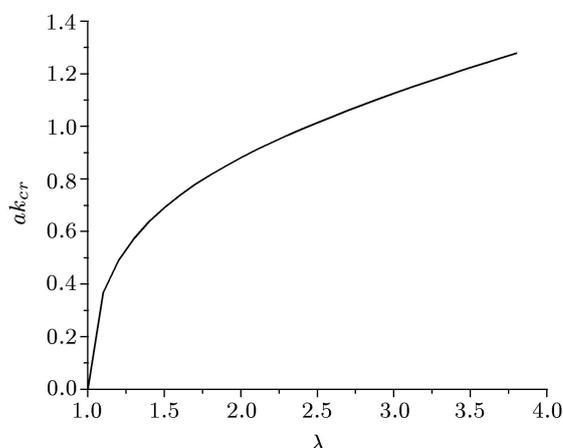


图 8 $ak_{cr} \sim \lambda$ 曲线

6 块体的表面不稳定性问题

受表面压缩作用的不可压 neo-Hookean 材料

半空间体, 当表面压缩作用达到其临界状态时, 半空间体表面会变得不稳定, 表面上会突然出现各种各样的折叠和起皱现象^[27,28], 预示着强烈的应

力集中和材料可能的提前破坏. 另外, 对于受弯的不可压 neo-Hookean 材料块体, 其内表面会处于表面受压状态, 从而当达到其临界状态时出现表面不稳定现象^[29,30]. Gent^[31] 在对受弯块体的实验中发现其内表面会突然出现很强的折叠和起皱现象. 实际结构中, 轮胎经常处于强烈的弯曲状态, 其内表面会出现折叠和起皱现象.

受压不可压 neo-Hookean 材料块体表面产生表面不稳定现象时, 面内两个主伸长 λ_1, λ_3 满足方程^[27]

$$\xi^3 + \xi^2 + 3\xi - 1 = 0 \quad (22)$$

式中, $\xi = \lambda_1^2 \lambda_3$. 如块体除受压方向外的两个方向都能自由扩张, 则表面不稳定现象发生时的 $\lambda_{1cr} = 0.444$; 如块体受压表面的另一方向固定 (即 $\lambda_3 = 1$), 则 $\lambda_{1cr} = 0.544$; 如块体双向受压, 则 $\lambda_{1cr} = 0.666$.

7 空穴的生成和增长问题

空穴的分岔问题有从实心固体中突然生成空穴和预存空穴的突然增长两种解释^[32~34]. 对受均匀分布的法向拉伸载荷作用的超弹性体, 除有一个均匀变形的平凡解外, 当外载荷达到其临界值时, 问题存在分岔解, 即物体中有空穴突然生成. Gent 与 Lindley^[35] 在对橡胶圆柱的侧面径向拉伸试验中就观察到柱体轴向上的空穴的生成和贯通; Williams 和 Schapery^[36] 对橡胶球体的拉伸实验中也观察到类似的现象; Ball^[32] 应用非线性弹性理论解决了当外加载荷达到其临界值时各向同性不可压超弹性材料球体和柱体中的空穴生成现象, 并将其归结为非线性分岔问题, 并提出了超弹性材料中空穴生成的基本理论.

另外, 当载荷接近空穴生成的临界值时, 超弹性物体中的预存微孔会突然得到快速的增长, Horgan 和 Aberaratne^[33], Sivaloganathan^[34] 研究了不可压超弹性材料中预存微孔的突然增长问题, 也将其解释为一类分岔问题.

关于不可压和可压超弹性材料中的空穴生成和突然增长的分岔问题的进展, 可见 Horgan 和 Polignone^[37], Gent^[38], Horgan^[39] 的综述. 对不可压材料而言, 由不可压条件可得到变形模式函数, 应用逆解法或半逆解法可以得到问题的解, 目前已经讨论了各向异性、非均质、非对称情况下的分岔问题.

不可压材料球体中空穴半径 c 和外加压力 p_0

之间的关系如下^[40]

$$p_0 = v^2(b) \int_{v(b)}^{\infty} \frac{W'(v)}{v^3 - 1} dv \quad (23)$$

式中, b 为球体的半径, $v = v(R) = (1 + \frac{c^3}{R^3})^{\frac{1}{3}}$. 对给定的压力, 如果上式有根 $c > 0$, 就意味着有空穴生成, 此时的临界压力为

$$p_{cr} = \int_1^{\infty} \frac{W'(v)}{v^3 - 1} dv \quad (24)$$

如材料的应变能函数表示为 $W = \sum_0^n a_i v^i$, 则该应变能函数能够描述空穴生成问题的条件是 $n < 3$.

而关于可压缩材料要求解二阶微分方程, 问题的解法通常采用两类换元降阶积分方法^[39], 一

类是 $R = R(t), r = r(t), t = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{R\dot{r}}{r}$; 另一类是

$R = e^s, u = \frac{r}{R}, p = \frac{du}{ds}$. 目前, 仅对 Blatz-Ko 材料、广义 Blatz-Ko 材料和广义 Varga 材料等为数不多的几种材料的轴对称和球对称问题有封闭解析解, 其他情况下只有打靶法等数值解.

关于均匀材料, 空穴生成的分岔曲线均为右分岔; 关于横观各向同性材料, 空穴生成时的临界压力随材料各向异性程度的增加而增大; 且当其各向异性参数较小时, 也为右分岔曲线, 但当各向异性参数大于某一临界值时, 存在左分岔曲线^[41,42]; 如对径向横观各向同性的 Ogden 材料球体, 其应变能函数为

$$W = \frac{\mu}{\alpha} [(\lambda_R^\alpha + \lambda_\Theta^\alpha + \lambda_3^\alpha - 3) + a(I_5^3 - 3I_5 + 2)] \quad (25)$$

式中, a 表示材料各向异性的程度, $a = 0$ 时材料为各向同性的; 能够发生左分岔的各向异性程度的临界值为 $a_{cr} = 0.215$.

关于由两种材料组合而成的非均质材料, 当外部材料强于内部材料时, 存在右分岔曲线, 但当外部材料弱于内部材料时, 有可能存在左分岔曲线^[43,44]. 两种不可压 Valanis-Landel 材料组合圆柱体中的空穴生成的分岔曲线 (图中 d 为预存空穴的半径) 如图 9, 图 10 所示^[44], 材料中空穴生成的分岔曲线可以看作空穴增长曲线的极限.

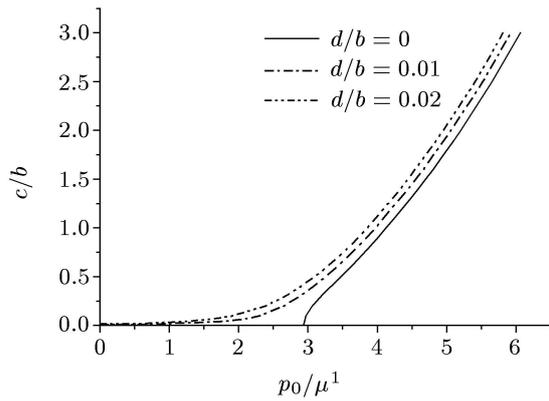


图 9 空穴的右分岔曲线

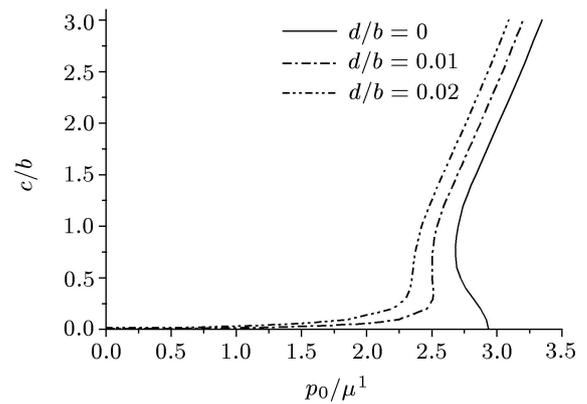


图 10 空穴的左分岔曲线

关于温度的影响,空穴生成时的临界压力随材料温度的降低而增大,随材料温度的升高而减小;在均匀温度场的情况下,不论温度升高或降低,均为右分岔曲线;在非均匀温度场的情况下,温度降低时为右分岔曲线,但温度升高时为左分岔曲线.

另外,通过能量比较可以看到,右分岔曲线总是稳定的,即右分岔发生时,材料中的空穴是从零开始生成;左分岔曲线在曲线的拐点前是不稳定的,仅在拐点后才是稳定的,因此左分岔发生时,材料中的空穴是以一个有限的大小突然生成的,即左分岔是一个跳跃性的分岔.

空穴生成前材料中的应力分布是均匀的,但空穴生成后材料中应力分布发生显著的变化;且不论是右分岔还是左分岔,空穴生成时空穴边缘均存在明显的应力集中和应力间断现象^[45,46].对不可压材料,空穴生成时其环向应力在其表面处可达无穷大;但对可压材料,空穴生成时其环向应力在其表面处是一个有限的值.不可压材料中空穴生成时空穴边缘的应力间断现象示于图 11,可压材料中空穴生成时空穴边缘的应力间断现象类似,只是环向应力是一个有限的值.

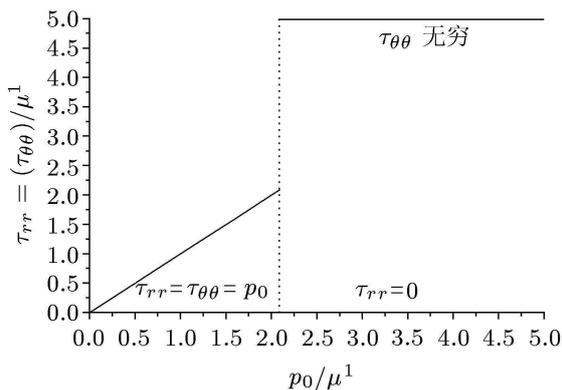


图 11 空穴边缘应力间断示意

相应于空穴突然生成的右分岔情况,当外加载荷较小时,材料中预存空穴缓慢增长或几乎保持不变,而当外加载荷接近于其临界值时,材料中预存空穴突然会产生快速的增长;相应于左分岔情况,当外加载荷接近于其临界值时,材料中预存空穴突然会产生更快的跳跃性的增长^[44,47].

关于不可压超弹性材料受到表面突加的均布拉伸载荷作用时空穴的动态生成问题,利用材料的不可压条件,可以得到空穴半径和外加载荷之间的二阶非线性常微分方程,应用换元法将其降阶可得到问题的解.对于不可压超材料球体或圆柱体,不论外加载荷大小,问题总存在一个平凡解;当外加载荷达到其临界值时,材料中有空穴突然生成,利用动力学规律对其相图进行分析,可证明生成后的空穴会产生周期性的非线性振动^[48,49].对于均匀材料,空穴的振动会缩小到零,但对于非均匀材料和横观各向同性材料,空穴的振动在某些情况下缩小到零,而某些情况下只能缩小到一个有限的值^[50].振动的相图(图 12 和图 13)可说明这一点,图中 $x = \frac{c}{b}$, x_m 为其极大值, x_{\min} 为极小值.

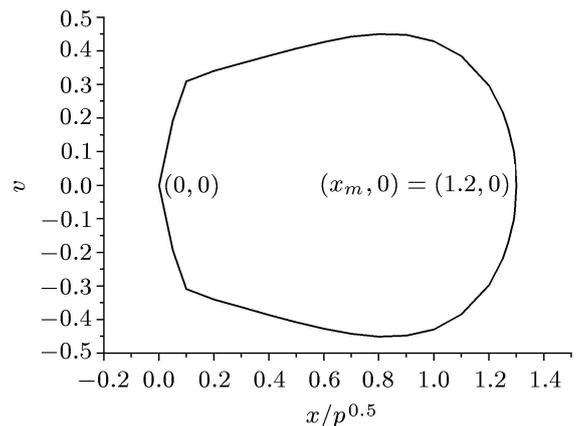


图 12 相图

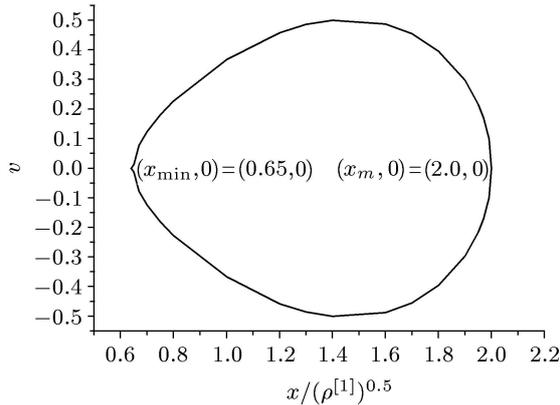
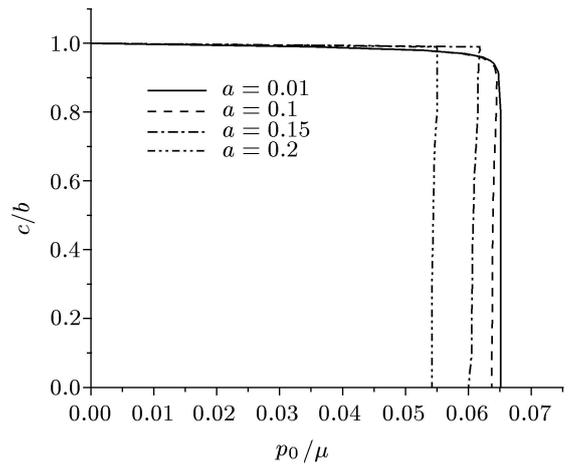


图 13 相图



14 空穴闭合的分岔曲线

8 空穴的闭合问题

作为空穴生成和突然增长问题的补充是空穴的闭合问题, 当含有空穴的物体受到足够大的压力作用时, 空穴会突然塌陷或闭合. 一个受均匀布径向压力作用的、中心含有一个空穴的不可压超弹性球体, 对任何压力, 相应于球体保持均匀应力和空穴保持张开状态的平凡解是存在的; 当压力足够大时, 存在相应于空穴塌陷的分岔解^[51], 此时, 空穴突然塌陷, 并迅速完全闭合. 空穴半径 c 和外加压力 p_0 之间精确的关系式如下

$$p_0 = v^2(b) \int_{c/d}^{v(b)} \frac{W'(v)}{v^3 - 1} dv \quad (26)$$

式中, b 为球壳的内半径, d 为球壳的外半径, $v = v(R) = (1 + \frac{c^3 - d^3}{R^3})^{1/3}$ 对给定的压力, 如果上式有根 $c = 0$, 就意味着球壳中的空穴塌陷了, 此时的临界压力为

$$p_{cr} = \left(1 - \frac{d^3}{b^3}\right)^{2/3} \int_0^{v(b)} \frac{W'(v)}{v^3 - 1} dv \quad (27)$$

如材料的应变能函数表示为 $W = \sum_0^n a_i v^i$, 则该应变能函数能够描述空穴塌陷问题的条件是 $n > 1$. 不可压形式的超弹性材料中空穴塌陷的分岔曲线如图 14 所示.

9 结束语

鉴于超弹性材料在国民经济各领域中应用的日益广泛, 加强对此类材料稳定性等性能的研究的重要性是不言而喻的, 美国“挑战者”号航天飞机因 O 型橡胶密封圈的缘故造成的失败充分说明了这一点. 今后, 需要加强对纤维增强或颗粒填充的橡胶类复合材料的研究, 加强对特殊橡胶材料的研究, 另外要充分考虑温度对橡胶材料力学性能的影响, 包括各类材料应变能函数的构造及对各类不稳定性问题的求解.

参考文献

- 1 爱林根. 连续统力学. 程昌钧, 俞焕然译. 北京: 科学出版社, 1990
- 2 Beatty M F. Topics in finite elasticity. *Applied Mechanics Review*, 1987, 40: 1699~1734
- 3 Fu Y B, Ogden R W. *Nonlinear Elasticity*. New York: Cambridge University Press, 2001
- 4 詹特 A N. 橡胶工业. 张立群等译. 北京: 化学工业出版社, 2002
- 5 Elias Z A. A non-Gaussian network model for rubber elasticity. *Polymer*, 2006, 47: 907~914
- 6 朱兆祥等. 材料和结构的不稳定性. 北京: 科学出版社, 1994
- 7 武际可, 苏先樾. 弹性系统的稳定性. 北京: 科学出版社, 1994
- 8 白以龙. 材料的不稳定性. 见: 黄克智, 徐秉业编. 固体力学发展趋势. 北京: 北京理工大学出版社, 1995. 95~107
- 9 Gent A N. Elastic instability in rubber. *Int J of Nonlinear Mechanics*, 2005, 40: 165~175
- 10 黄筑平. 连续介质力学基础. 北京: 高等教育出版社, 2003

- 11 金明. 非线性连续介质力学. 北京: 清华大学出版社, 北京交通大学出版社, 2005
- 12 徐立. 有限元分析中橡胶应变能函数的若干形式. 橡胶工业, 1999, 46: 707~710
- 13 Chalton D T, Yang J. A review of methods to characterize rubber elastic behavior for use in finite element analysis. *Rubber Chemistry and Technology*, 1994, 67: 481~503
- 14 朱艳峰等. 橡胶材料的本构模型. 橡胶工业, 2006, 53: 119~125
- 15 李晓芳, 杨晓翔. 橡胶材料的超弹性本构模型. 弹性体, 2005, 15: 50~58
- 16 Rivlin R S. Large elastic deformations of isotropic materials. II, Some uniqueness theorems for pure homogeneous deformations. *Philosophical Trans R Soc*, 1948, 240: 419~508
- 17 Rivlin R S. Stability of plane homogeneous deformation of an elastic cube under dead loading. *Q of Applied Mathematics*, 1974, 32: 265~271
- 18 Kearsley E A. Asymmetric stretching of asymmetrically loaded elastic sheet. *International J of Solids and Structures*, 1986, 22: 111~119
- 19 Treloar L R G. Stresses and birefringence in rubber subjected to general homogeneous strain. *Proc Phys Soc*, 1948, 60: 135~143
- 20 任九生, 程昌钧. 热超弹性薄板非对称拉伸的分岔和稳定性. 力学季刊. 2007, 28: 81~85
- 21 Haughton D M, Ogden R W. On the incremental equations in non-linear elasticity-II: bifurcation of pressurized spherical shells. *J Mech. Phys. Solids*, 1978, 26: 111~138
- 22 任九生, 程昌钧. 受内压热超弹性球壳的不稳定性. 上海大学学报, 2007, 13, 732~735
- 23 Haughton D M, Ogden R W. Bifurcation of inflated circular cylinders of elastic material under axial loading -II: exact theory for thick-walled tubes. *J Mech Phys Solids*, 1979, 27: 489~512
- 24 任九生, 程昌钧. 热超弹性圆筒的不稳定性. 力学学报, 2007, 39: 283~288
- 25 Gent A N, Hua K C. Torsional instability of stretched rubber cylinders. *Int J of Nonlinear Mechanics*, 2004, 39: 483~489
- 26 Ren J S, Cheng C J. Finite elastic torsional instability of an incompressible thermo-hyperelastic cylinder. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22: 156~161
- 27 Biot M. *Mechanics of Incremental Deformation*. New York: Wiley, 1965
- 28 Usmani S A, Beatty M F. On the surface instability of a highly elastic half-space. *J of Elasticity*, 1974, 4: 249~263
- 29 Levinson M. Stability of a compressed neo-Hookean rectangular parallelepiped. *J Mech Phys Solids*, 1968, 16: 403~415
- 30 Fosdick R L, Shield R T. Small bending of a circular bar superposed on finite extension or expression. *Arch Ration Mech Anal*, 1963, 12: 223~248
- 31 Gent A N, Cho I S. Surface instability in compressed or bent rubber blocks. *Rubber Chemistry and Technology*, 1999, 72: 253~262
- 32 Ball J M. Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity. *Phil Trans R Soc London*, 1982, A306 (3): 557~610
- 33 Horgan C O, Abeyaratne R. A bifurcation problem for a compressible nonlinearly elastic medium: growth of a micro-void. *J of Elasticity*, 1986, 16(2): 189~200
- 34 Sivaloganathan J. Uniqueness of regular and singular equilibria for spherically symmetric problems of nonlinear elasticity. *Arch Rational Mech Anal*, 1986, 96(1): 96~136
- 35 Gent A N, Lindley P B. Internal rupture of bonded rubber cylinders in tension. *Proc R Soc London*, 1959, A249: 195~205
- 36 Williams M L, Schapery R A. Spherical flaw instability in hydrostatic tension. *Int J Fracture*, 1965, 1: 64~71
- 37 Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinearly elastic solids: A review. *Applied Mechanics Review*, 1995, 48: 471~485
- 38 Gent A N. Cavitation in rubber: a cautionary tale. *Rubber Chemistry and Technology*, 1990, 63: G49~G53
- 39 Horgan C O. Equilibrium solutions for compressible nonlinearly elastic materials. In: Fu Y B, Ogden R W, ed. *Nonlinear Elasticity*. Cambridge University Press, 2001: 135~159
- 40 任九生. 非线性材料中的空穴生成与增长问题: [博士论文]. 上海: 上海大学出版社, 2006
- 41 Polignone D A, Horgan C O. Cavitation for incompressible anisotropic nonlinearly elastic spheres. *J of Elasticity*, 1993, 33: 27~65
- 42 Ren J S, Cheng C J. Cavitated bifurcation for incompressible transverse isotropic hyper-elastic materials. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, 44: 245~257
- 43 Horgan C O, Pence T J. Void nucleation in tensile dead-loading of a composite incompressible nonlinearly elastic sphere. *J of Elasticity*, 1989, 21: 61~82
- 44 Ren J S, Cheng C J. Cavitated bifurcation for composed compressible hyper-elastic materials. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 15(3): 208~213
- 45 Shang X C, Cheng C J. Exact solution for cavitated bifurcation for compressible hyperelastic materials. *Int J of Engineering Science*, 2001, 39: 1101~1117
- 46 任九生, 程昌钧, 朱正佑. 可压超弹性材料组合球体中心的空穴生成. 应用数学和力学, 2003, 24: 892~898
- 47 尚新春, 程昌钧. 弹性固体材料中的空穴萌生与增长. 北京科技大学学报, 2002, 24: 380~382
- 48 M-S Chou-Wang, Horgan C O. Cavitation in nonlinear elastodynamic for neo-Hookean materials. *Int J of Engineering Science*, 1989, 27: 967~973
- 49 任九生, 程昌钧. 超弹性材料中空穴的动态生成. 固体力学学报, 2004, 25: 42~46
- 50 Ren J S, Cheng C J. Dynamical formation of cavity in transversely hyperelastic spheres. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 19: 320~323
- 51 Abeyaratne R, Hou H S. Void collapse in an elastic solid. *J of Elasticity*, 1991, 20: 23~42

INSTABILITY PROBLEMS FOR HYPER-ELASTIC MATERIALS*

REN Jiusheng[†] CHENG Changjun

Department of Mechanics, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200444, China

Abstract Hyper-elastic materials are a kind of irreplaceable macromolecule materials with unique characteristics and wide applications. Researches on the unique instability problems of hyper-elastic materials have greatly promoted the development of finite deformation and hyper-elastic theory in the field of continuum mechanics. Various instability problems for hyper-elastic materials are reviewed in this paper, such as the Rivlin cube problem, inflation of thin-walled cylindrical tubes and thin-walled spherical shells, torsional instability of cylindrical tubes, surface instability of compressed or bent blocks, the formation of void and the sudden growth and collapse of void. The characteristics and solution methods are then analyzed for this nonlinear problem of material instability, and finally, main results and future developments are given and discussed.

Keywords hyper-elastic material, instability of material, nonlinear, bifurcation

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10772104), the Innovation Project of Shanghai Municipal Education Commission (09YZ12) and Shanghai Leading Academic Discipline Project (S30106)

[†] E-mail: jsren@shu.edu.cn