土的本构方程与热力学

赵成刚 † 张雪东 郭 璇
北京交通大学土建学院岩土所，北京 100044

摘 要 介绍一种基于热力学理论建立土力学本构方程的一般性理论框架. 这一方法利用两个势函数即自由能势函数和耗散势函数 (或屈服函数) 以及固定的过程和框架，建立土的本构方程. 简要介绍了建立热力学本构方程中所用到的热力学内变量理论，利用 Legendre 变换建立了热力学势函数之间以及各耗散函数与屈服函数之间的关系；利用自由能势函数和耗散势函数 (或屈服函数) 建立土的本构方程及其具体步骤. 最后讨论了土力学本构方程研究的意义以及它和应用之间的关系.

关键词 热力学，土的本构方程，自由能势函数，耗散势函数

1 引 言

土力学中的本构关系是属于土力学中的基础理论，它涉及到土的最基本的研究对象：土的应力、应变和强度，它的重要性是毫无疑问的，因此吸引了许多优秀的土力学学者和某些力学学者的关注，建立了数百计的土力学本构模型. 建立土力学本构模型通常是采用经典塑性力学的方法，即根据试验观测结果，建立宏观唯象的能反映各种材料特性的屈服面和塑性势面、硬化函数以及塑性流动法则. 它们的选择或多或少地都具有一定的独立性和经验性，由此得到土的本构方程. 利用这种方式建立的本构方程是半经验性的，对不同的材料其本构方程是各异的；这些不同的本构方程不能通过普遍性原理建立起相互之间的联系，有些本构方程还违背热力学基本定律.

本文介绍一种基于热力学理论建立土力学本构方程的一般性理论框架. 基于这种方法建立的本构方程会自动满足热力学第一和第二定律. 而目前使用的一些土力学本构方程并不满足热力学定律；因此，它们在使用中就会具有局限性，我们就不会放心和有把握地应用它们.

基于热力学的塑性理论研究开始主要集中在金属材料方面 [1]. 最近在其他材料方面 (特别是土、岩石和混凝土材料)[2~13] 也出现了一些基于热力学的塑性本构关系的研究，并建立了针对这些材料本构方程的一般框架. 这些研究致力于建立一种适用于更广泛材料类型的理论以及更加严密和协调一致的方法，用于构建本构方程；用这种方法建立的本构方程有时也称为超塑性本构方程. 以热力学为基础建立本构方程的优点为：

(1) 能够确保本构方程不违背热力学定律.

(2) 能够提供更加普遍的、其范围更大的用于建立本构方程的定理. 可以很自然地得到摩擦性材料 (例如土体、岩石、混凝土等材料) 在真实的应力空间中必然具有不相关流动的性质.

(3) 可以构筑一些具有竞争力的本构模型，并可以较容易地对它们进行比较、分析，并且建模过程中各部分之间具有更加直接和紧凑的联系.

这种建立本构方程的基本原则是由 Ziegler[14,15] 提出来的. 法国学者在这方面做了大量的工作 [16~18]. Collins 和 Houlsby[2] 把这种建立本构方程的方法用于岩土或摩擦材料中. Houlsby 和 Puzrin[3] 把这种利用热力学框架建立本构方程的方法用于率无关的耗散材料中. Houlsby 和 Puzrin[4] 把这种方法推广到率相关材料中. Puzrin 和 Houlsby[5,6] 分别把文献 [3, 4] 的方法由内变量为简单变量拓展到内变量为函数的情况. Puzrin 和 Houlsby[7] 把文献 [3, 5] 的方法用于运动硬化的塑性模型中. Collins 和 Hilder[8,9] 利用热力学理论建立了一簇弹塑性本构模型，用于描述无黏性土在三轴条件下的变形特性. Collins[10]

收稿日期：2005-10-08 修回日期：2006-04-20
† E-mail: cgzhao@center.njtu.edu.cn

以热力学的观点讨论了弹塑性耦合材料本构关系中的相关联流动与非相关联流动以及这种材料的刚度矩阵的对称性和非对称性． Collins[11] 以热力学的观点分析了摩擦性颗粒材料在剪切变形过程中的应力 - 剪胀关系．指出这种材料的塑性变形会产生一种储存在土体内部并可恢复的自由能． Collins[12] 以热力学为基础详细讨论了土体在塑性变形中储存的并可恢复的弹性能的概念以及它们产生的机理和模型． Houlsby 等人 [13] 基于热力学的理论建立了一种不违反热力学定律并和压力相关的土的弹性模量，即一种超弹性公式 (而以前的超弹性公式是违反热力学定律的)．

本文简要介绍了建立热力学本构方程中所用到的热力学内变量理论，利用 Legendre 变换建立了热力学能量之间和各耗散函数与屈服函数之间的关系；利用自由能函数和耗散函数 (或屈服函数) 给出了土的本构方程建立的具体步骤. 最后还讨论了土力学本构方程研究的意义以及它和应用之间的关系.

2 热力学基础

热力学也称为热动力学 (thermodynamics) 是关于系统与其周围环境相互作用的宏观描述的学问. 系统的性质可以用系统的状态或状态变量描述. 因此，系统所处的状态不同，系统的热力学性质也不同. 从某种角度看，系统的状态决定了系统的热力学性质.

确定系统状态的量称为状态变量．一般有 4 类状态变量用来描述系统的状态：

(1) 几何状态变量；

(2) 力学状态变量；

(3) 化学状态变量；

(4) 电磁状态变量.

通常并不是所有这 4 种状态变量都要求使用，究竟选用哪些状态变量要由所研究的问题和系统本身的性质决定.

在一个热力学系统中，设其状态变量为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 状态方程有如下一般形式

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) = 0 \tag{1}$$

式 (1) 中，θ 为绝对温度，它也作为一个独立变量. 从上式中选择其中任何 n 个量作为独立状态变量，余下的一个量作为这 n 个独立变量的函数，这就是状态函数的概念，所建立的状态函数方程称为状态方程. 状态方程在连续介质力学中也称为本构方程. 值得指出的是：各种不同物质的状态方程 (或本构方程) 的具体形式不可能由热力学理论推导而得到. 它们通常是由实验确定的. 本构方程被认为是表示材料基本单元行为的表达式. 因此，不同材料行为的差异主要体现在其本构方程中.

考虑一个连续体的基本单元，假定它的状态可以用绝对温度 θ 和应变张量 ε_{ij} 描述 (它们为独立状态变量)．由热力学可知：内能 u 为状态函数可用这两个独立的状态变量表示为 $u = u(\varepsilon_{ij}, \theta)$, 类似可定义熵 s 的状态函数为 $s = s(\varepsilon_{ij}, \theta)$, 如果不考虑辐射效应，则单位时间热供应为 $-q_{i,i}$, q_i 为热流向量. 设 σ_{ij} 为应力张量.

热力学第一定律 [3]

$$\dot{u} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - q_{k,k} \tag{2}$$

热力学第二定律有多种表达方式，但各种表达方式都是等效的，并可逻辑地证明它们的等效性. 从本文的方便出发，热力学第二定律的表达式为 [3]

$$\theta\dot{S} + q_{k,k} - \frac{q_k\theta_{,k}}{\theta} \geq 0 \tag{3}$$

不等式 (3) 中的第 1 项与第 2 项之和 $\theta\dot{S} + q_{k,k} = d$, d 表示机械能耗散，本文称为耗散函数，第 3 项表示热耗散．假设 $d \geq 0$, 这一假定比热力学第二定律式 (3) 更严格一些，但已被广泛接受．关于连续介质热力学的一般理论可参考文献 [14, 18 ~ 20].

3 内变量、热力学势、耗散势和屈服面

3.1 内变量

随着研究的深入，人们认为材料的基本单元 (有时也称为代表性单元) 具有内部结构和内部行为．但若按此观点把材料基本单元作为十分复杂的结构处理，则失去了基本单元的含义. 为此通常采用一种简化的处理方法，即对基本单元的内部结构、化学成分及行为，尤其是大变形以后的内部结构和局部材料属性均可能发生急剧又不可逆的变化 (例如损伤、位错、微孔隙、塑性变形的历史等)，它可用若干个变量或变量函数进行唯象的描述.

这种代表材料基本单元内部状态的量称为内变量. 内变量的变化通常是不可逆的．它们是可测的，但不能直接由宏观的办法进行测量，并且不可控．它们是状态变量，并且通常作为可观测变量处理.

它们是隐藏的变量，因为只有借助于显微仪器才能使这些物理内变量显示出来，而且严格的宏观塑性理论应该包括无穷多个内变量，但这样的理论就会变得无法驾驭. 所以最可取的近似办法是针对所求解的问题，适当的选择最少的变量. 这种选择没有固定的方法可以套用，这里仍然是经验、物理意义，更常见的是应用材料的类型引导着人们对这些变量进行选择．以下将选择单一的运动张量作为内变量 (例如塑

性应变张量 α_{ij}), 当然也可以选择多个内变量甚至多个内变量函数.

3.2 Legendre 变换简介

Legendre 变换是一个简单但十分有用的分析工具, 它在连续介质热力学中具有非常广泛的应用. 这里仅介绍如何使用 Legendre 变换, 关于它的进一步讨论和证明请参考文献 [2] 的附录.

假定 $X = X(x_i)$, X 是一个势函数, 并且有 $y_i = \dfrac{\partial X}{\partial x_i}$ 成立. 而 X 的 Legendre 变换定义为

$$X + Y = x_i y_i \tag{4}$$

式 (4) 中定义 $Y = Y(y_i)$. 很明显 Y 的 Legendre 变换也是式 (4). 把式 (4) 对 y_i 求导后得到 $x_i = \dfrac{\partial Y}{\partial y_i}$. 因此, X 和 Y 是相互独立的 Legendre 变换, 它们具有对称性.

对于复杂一些的情况, 例如 $X = X(x_i, \alpha_i)$, 这时 X 的偏微分 Legendre 变换同样为式 (4), 但不同的是 $Y = Y(y_i, \alpha_i)$, 并且 α_i 被看作为被动变量. 这时式 (4) 还可得到 $\dfrac{\partial Y}{\partial \alpha_i} = -\dfrac{\partial X}{\partial \alpha_i}$. 如果 $b_i = \dfrac{\partial X}{\partial \alpha_i}$, 则式 (4) 中的主动变量 x_i 和 y_i 可以用 α_i 和 b_i 代替, 而 x_i 和 y_i 这时变为被动变量, 但 Y 的内变量应取为 X 的内变量 α_i 的对偶变量 b_i, 即 $Y = Y(y_i, b_i)$. 这时式 (4) 变为

$$X + Y = \alpha_i b_i$$

3.3 热力学势

在热力学中有 4 种势函数经常被使用: 内能 u; Helmholtz 自由能 f; Gibbs 自由能 g; 焓 h. 可以通过 Legendre 变换建立起这 4 种势函数之间的关系 [2]. 它们是独立状态变量和内变量的函数, 其表达式为

$$\begin{aligned} u &= u(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, s) \\ f &= f(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, \theta) \\ h &= h(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, s) \\ g &= g(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \theta) \end{aligned}$$

既然这些状态函数是能量势函数, 它们就应该是广义运动量与其相对偶的广义应力乘积的结果. 因此, 相应于广义运动内变量 α_{ij}(塑性应变张量) 定义与其对偶的广义应力为

$$\overline{x}_{ij} = -\frac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_{ij}}$$

把内能 u 对时间取全微分, 可得到

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial u}{\partial s} \dot{s} \tag{5}$$

令式 (3) 不等式左端取最小值, 即取式 (3) 为等式, 并考虑式 (2) 可得到

$$\dot{u} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \theta \dot{s} - d \tag{6}$$

对比式 (5) 和 (6) 可知

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{7}$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial s} \tag{8}$$

注意到 $\overline{x}_{ij} = -\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}}$, 比较式 (5) 和式 (6) 可得到

$$d = \overline{x}_{ij} \dot{\alpha}_{ij} \tag{9}$$

耗散势函数也可以类似热力学势函数, 选择不同的独立状态变量和相应的内变量会得到 4 种不同的耗散势函数, 并假定这 4 种耗散势函数还同时依赖于内变量的变化率 $\dot{\alpha}_{ij}$, 由此得到以下 4 种耗散势的表达式

$$\begin{aligned} d &= d^u(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, s, \dot{\alpha}_{ij}) \\ d &= d^f(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, \theta, \dot{\alpha}_{ij}) \\ d &= d^h(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, s, \dot{\alpha}_{ij}) \\ d &= d^g(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \theta, \dot{\alpha}_{ij}) \end{aligned}$$

定义广义耗散应力为

$$X_{ij} = \frac{\partial d^e}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}, \quad e = (u, f, g, h) \tag{10}$$

式 (10) 意味着 e 可分别取为 u, f, g 和 h.

不同材料和其特性是通过选择不同形式的自由能势函数和耗散势函数以及不同的状态变量和内变量来表示的. 例如 [15]: 弹性材料, 可设: $d = 0$, $f = f(\varepsilon_{(1)}, \theta)$; 当其为不考虑温度变化的线弹性体时, $f = (\lambda/2)\varepsilon_{(1)}^2 + \mu\varepsilon_{(2)}$. 对于理想弹塑性土体可以选择两个势函数为 [15]

$$\begin{aligned} f &= (\lambda/2)\varepsilon_{(1)}^2 + \mu(\varepsilon - \alpha)_{(2)} \\ d &= A[B - \sqrt{3}(\lambda + 2/3\mu)\varepsilon_{(1)}]\dot{\alpha}_{(2)}^{1/2} \end{aligned}$$

这些式中下脚标 (1) 、 (2) 分别表示相应张量的第 1 和第 2 不变量, 例如

$$\varepsilon_{(1)} = \varepsilon_{ii}, \quad \varepsilon_{(2)} = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}$$

$\alpha_{(2)}$ 和 $(\varepsilon - \alpha)_{(2)}$ 也类似表示. 当然应该根据具体的问题选择不同的势函数及其状态变量和内变量. 因

此它们的选择是本构方程建立的关键．正确地选择这两个势函数依赖于人们对本构关系和这两个势函数所反映的具体物理现象的认识和理解，有时还依赖于实验和测试手段．

对于率独立的材料，假设耗散势是 $\dot{\alpha}_{ij}$ 的各向同性一阶函数，因为耗散势能量的大小必须和 $\dot{\alpha}_{ij}$ 的大小成正比．由 Euler 定理可得到

$$\frac{\partial d^e}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}\dot{\alpha}_{ij} = x_{ij}\dot{\alpha}_{ij} = d \tag{11}$$

比较式 (11) 和式 (9) 可以得到

$$(\overline{x}_{ij} - x_{ij})\dot{\alpha}_{ij} = 0 \tag{12}$$

由于式 (12) 中 x_{ij} 可能是 $\dot{\alpha}_{ij}$ 的函数，所以 $\dot{\alpha}_{ij}$ 与 $(\overline{x}_{ij} - x_{ij})$ 不是一种非常严格的正交关系，虽然 $\dot{\alpha}_{ij}$ 可以是任意值，但在这种正交条件下可以满足描述工程中遇到的绝大多数材料，当然包括摩擦性材料和率无关耗散材料．

由式 (12) 的正交条件可以得到

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij} \tag{13}$$

式 (13) 表明广义应力等于广义耗散应力．

从试验角度，确定屈服函数要比确定耗散函数容易．下面将建立屈服函数 y 与耗散函数之间的关系，以便于在建立本构方程中应用．文献 [3] 给出了它们之间的 Legendre 变换关系如下

$$\lambda y = x_{ij}\dot{\alpha}_{ij} - d = 0 \tag{14}$$

式 (14) 中 λ 为非负乘积因子，当 λ 为无量纲的常量时，从式 (14) 的右端可知 y 为能量；当 λ 的量纲为应变率时，y 则具有应力的量纲．根据式 (14)，屈服函数与耗散势函数相对应，也有以下 4 种形式

$$\begin{aligned} y &= y^u(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},s,x_{ij}) \\ y &= y^f(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},\theta,x_{ij}) \\ y &= y^h(\sigma_{ij},\alpha_{ij},s,x_{ij}) \\ y &= y^g(\sigma_{ij},\alpha_{ij},\theta,x_{ij}) \end{aligned} \tag{15}$$

把式 (14) 两端对 x_{ij} 微分后可得到流动法则为

$$\dot{\alpha}_{ij} = \lambda\frac{\partial y^e}{\partial x_{ij}},\quad e = (u,f,g,h) \tag{16}$$

式 (16) 是一个重要的公式．$\dot{\alpha}_{ij}$ 可以定义为塑性应变率 (同传统方法相同)，该式把塑性应变率同屈服面对广义应力的微分建立了联系，并表明仅在广义应力空间中，正交流动法则仍然适用．但同经典塑性理论不同的是：在真实的应力空间中不满足相关联流动法则；另外屈服面是对广义应力 x_{ij} 的微分，而不是对真实应力 σ_{ij} 的微分．Collins 和 Houlsby[2] 以热力学为基础并利用式 (16) 证明了摩擦材料在真实应力空间中不满足正交流动法则，但在广义应力空间中，正交流动法则仍然适用；并且还在真实应力空间给出了非正交流动法则的数学表达式．这就奠定了广义塑性力学的理论基础，而不仅是经验性地定性地论述；或仅给出一种特定的不正交流动的本构方程就称为广义塑性力学的一般性理论．

4 由热力学能量势和耗散势推导本构方程

4.1 全量形式的本构方程

文献 [3] 指出，材料的本构行为 (或本构方程) 可以通过两个热力学势函数而完全确定；第 1 个是能量势函数，第 2 个是耗散势函数或屈服面函数．这两种势函数有 16 种不同的组合情况可供选用，见表 1.

表 1　两种势函数的 16 种组合情况 [3]

能量函数		u 或 $\overline{u}$	f 或 $\overline{f}$	h 或 $\overline{h}$	g 或 $\overline{g}$
耗散函数 $d^e \geq 0$	α_{ij}	$u(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},s)$ $d^u(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},s,\dot{\alpha}_{ij})$	$f(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},\theta)$ $d^f(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},\theta,\dot{\alpha}_{ij})$	$h(\sigma_{ij},\alpha_{ij},s)$ $d^h(\sigma_{ij},\alpha_{ij},s,\dot{\alpha}_{ij})$	$g(\sigma_{ij},\alpha_{ij},\theta)$ $d^g(\sigma_{ij},\alpha_{ij},\theta,\dot{\alpha}_{ij})$
	$\overline{\chi}_{ij}$	$\overline{u}(\varepsilon_{ij},\overline{\chi}_{ij},s)$ $d^{\overline{u}}(\varepsilon_{ij},\overline{\chi}_{ij},s,\dot{\alpha}_{ij})$	$\overline{f}(\varepsilon_{ij},\overline{\chi}_{ij},\theta)$ $d^{\overline{f}}(\varepsilon_{ij},\overline{\chi}_{ij},\theta,\dot{\alpha}_{ij})$	$\overline{h}(\sigma_{ij},\overline{\chi}_{ij},s)$ $d^{\overline{h}}(\sigma_{ij},\overline{\chi}_{ij},s,\dot{\alpha}_{ij})$	$\overline{g}(\sigma_{ij},\overline{\chi}_{ij},\theta)$ $d^{\overline{g}}(\sigma_{ij},\overline{\chi}_{ij},\theta,\dot{\alpha}_{ij})$
屈服面 $y^e = 0$	α_{ij}	$u(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},s)$ $y^u(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},s,\chi_{ij})$	$f(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},\theta)$ $y^f(\varepsilon_{ij},\alpha_{ij},\theta,\chi_{ij})$	$h(\sigma_{ij},\alpha_{ij},s)$ $y^h(\sigma_{ij},\alpha_{ij},s,\chi_{ij})$	$g(\sigma_{ij},\alpha_{ij},\theta)$ $y^g(\sigma_{ij},\alpha_{ij},\theta,\chi_{ij})$
	$\overline{\chi}_{ij}$	$\overline{u}(\varepsilon_{ij},\overline{\chi}_{ij},s)$ $y^{\overline{u}}(\varepsilon_{ij},\overline{\chi}_{ij},s,\chi_{ij})$	$\overline{f}(\varepsilon_{ij},\overline{\chi}_{ij},\theta)$ $y^{\overline{f}}(\varepsilon_{ij},\overline{\chi}_{ij},\theta,\chi_{ij})$	$\overline{h}(\sigma_{ij},\overline{\chi}_{ij},s)$ $y^{\overline{h}}(\sigma_{ij},\overline{\chi}_{ij},s,\chi_{ij})$	$\overline{g}(\sigma_{ij},\overline{\chi}_{ij},\theta)$ $y^{\overline{g}}(\sigma_{ij},\overline{\chi}_{ij},\theta,\chi_{ij})$

应当注意的是，材料的本构方程是在不违背物理基本定律的前提下，通过试验进行观察而确定的．选择哪种组合以及能量势函数和耗散势函数的具体形式依赖于问题的具体情况．一旦选定这两个势函数，就可以按照表 2 给出的表达式求出相应的本构方程．

表 2　能量与耗散 / 屈服函数的求导结果 [3]

能量函数		u 或 $\overline{u}$	f 或 $\overline{f}$	h 或 $\overline{h}$	g 或 $\overline{g}$
耗散函数 $d^e \geq 0$	α_{ij}	$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}$ $\theta=\dfrac{\partial u}{\partial s}$ $\overline{\chi}_{ij}=-\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}}$ $\chi_{ij}=\dfrac{\partial d^u}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}$	$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}$ $s=-\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ $\overline{\chi}_{ij}=-\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}}$ $\chi_{ij}=\dfrac{\partial d^f}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}$	$\varepsilon_{ij}=-\dfrac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}}$ $\theta=\dfrac{\partial h}{\partial s}$ $\overline{\chi}_{ij}=-\dfrac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}}$ $\chi_{ij}=\dfrac{\partial d^h}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}$	$\varepsilon_{ij}=-\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$ $s=-\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ $\overline{\chi}_{ij}=-\dfrac{\partial g}{\partial \alpha_{ij}}$ $\chi_{ij}=\dfrac{\partial d^g}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}$
	$\overline{\chi}_{ij}$	$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \varepsilon_{ij}}$ $\theta=\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial s}$ $\overline{\alpha}_{ij}=\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{\chi}_{ij}}$ $\chi_{ij}=\dfrac{\partial d^{\overline{u}}}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}$	$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \varepsilon_{ij}}$ $s=-\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \theta}$ $\alpha_{ij}=\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{\chi}_{ij}}$ $\chi_{ij}=\dfrac{\partial d^{\overline{f}}}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}$	$\varepsilon_{ij}=-\dfrac{\partial \overline{h}}{\partial \sigma_{ij}}$ $\theta=\dfrac{\partial \overline{h}}{\partial s}$ $\alpha_{ij}=\dfrac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{\chi}_{ij}}$ $\chi_{ij}=\dfrac{\partial d^{\overline{h}}}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}$	$\varepsilon_{ij}=-\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial \sigma_{ij}}$ $s=-\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial \theta}$ $\alpha_{ij}=\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{\chi}_{ij}}$ $\chi_{ij}=\dfrac{\partial d^{\overline{g}}}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}$
屈服面 $y^e=0$	α_{ij}	$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}$ $\theta=\dfrac{\partial u}{\partial s}$ $\overline{\chi}_{ij}=-\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_{ij}}$ $\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\dfrac{\partial y^u}{\partial \chi_{ij}}$	$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}$ $s=-\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ $\overline{\chi}_{ij}=-\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}}$ $\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\dfrac{\partial y^f}{\partial \chi_{ij}}$	$\varepsilon_{ij}=-\dfrac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}}$ $\theta=\dfrac{\partial h}{\partial s}$ $\overline{\chi}_{ij}=-\dfrac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}}$ $\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\dfrac{\partial y^h}{\partial \chi_{ij}}$	$\varepsilon_{ij}=-\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$ $s=-\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ $\overline{\chi}_{ij}=-\dfrac{\partial g}{\partial \alpha_{ij}}$ $\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\dfrac{\partial y^g}{\partial \chi_{ij}}$
	$\overline{\chi}_{ij}$	$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \varepsilon_{ij}}$ $\theta=\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial s}$ $\alpha_{ij}=\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{\chi}_{ij}}$ $\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\dfrac{\partial y^{\overline{u}}}{\partial \chi_{ij}}$	$\sigma_{ij}=\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \varepsilon_{ij}}$ $s=-\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \theta}$ $\alpha_{ij}=\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{\chi}_{ij}}$ $\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\dfrac{\partial y^{\overline{f}}}{\partial \chi_{ij}}$	$\varepsilon_{ij}=-\dfrac{\partial \overline{h}}{\partial \sigma_{ij}}$ $\theta=\dfrac{\partial \overline{h}}{\partial s}$ $\alpha_{ij}=\dfrac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{\chi}_{ij}}$ $\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\dfrac{\partial y^{\overline{h}}}{\partial \chi_{ij}}$	$\varepsilon_{ij}=-\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial \sigma_{ij}}$ $s=-\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial \theta}$ $\alpha_{ij}=\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{\chi}_{ij}}$ $\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\dfrac{\partial y^{\overline{g}}}{\partial \chi_{ij}}$

4.2 增量形式的本构方程

用有限元或其他一些数值方法处理非线性问题时，通常要求本构方程采用增量形式. 为此把表 2 中的各式对时间进行微分后，就可以得到用时间导数表示的增量方程. 具体的增量形式的本构方程表达式见表 3. 表 3 中各具体代数项的表达式为

$$D_{ijkl}^{e\beta b}=\frac{\partial^2 e}{\partial \beta_{ij}\partial b_{kl}}+\frac{\partial^2 e}{\partial \beta_{ij}\partial \alpha_{mn}}C_{mnkl}^{eb} \tag{17}$$

$$D_{kl}^{ezb}=\frac{\partial^2 e}{\partial z\partial b_{kl}}+\frac{\partial^2 e}{\partial z\partial \alpha_{mn}}C_{mnkl}^{eb} \tag{18}$$

$$D_{ij}^{e\beta z}=\frac{\partial^2 e}{\partial \beta_{ij}\partial z}+\frac{\partial^2 e}{\partial \beta_{ij}\partial \alpha_{mn}}C_{mn}^{eb} \tag{19}$$

$$D^{ez}=\frac{\partial^2 e}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e}{\partial z\partial \alpha_{mn}}C_{mn}^{ez} \tag{20}$$

$$C_{mnkl}^{eb}=-\frac{A_{kl}^{cb}}{B^e}\frac{\partial y^e}{\partial \chi_{mn}} \tag{21}$$

$$C_{mn}^{ez}=-\frac{A^{ez}}{B^e}\frac{\partial y^e}{\partial \chi_{mn}} \tag{22}$$

$$A_{ij}^{eb}=\frac{\partial y^e}{\partial b_{ij}}-\frac{\partial y^e}{\partial \chi_{kl}}\frac{\partial^2 e}{\partial \alpha_{kl}\partial b_{ij}} \tag{23}$$

$$A^{ez}=\frac{\partial y^2}{\partial z}-\frac{\partial y^e}{\partial \chi_{kl}}\frac{\partial^2 e}{\partial \alpha_{kl}\partial z} \tag{24}$$

$$B^e=\left(\frac{\partial y^e}{\partial \alpha_{ij}}-\frac{\partial y^e}{\partial \chi_{kl}}\frac{\partial^2 e}{\partial \alpha_{kl}\partial \alpha_{ij}}\right)\frac{\partial y^e}{\partial \chi_{ij}} \tag{25}$$

式 (17) 至式 (25) 中，上标 e 表示能量势函数，它可代表 u,f,h,g, 上标 β 和 b 分别表示两个不同的二阶张量 (例如应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 或内变量 α_{ij} 等). 上标 z 表示标量熵 s 或温度 θ.

表 3 增量形式本构方程的总结 [3]

	$\dot{\varepsilon}_{kl}$	$\dot{\sigma}_{kl}$
$\dot{s}$	$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{ij} \\ \dot{\theta} \\ -\dot{\chi}_{ij} \\ \dot{\alpha}_{ij} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{u\varepsilon\varepsilon}_{ijkl} & D^{u\varepsilon s}_{ij} \\ D^{us\varepsilon}_{kl} & D^{us} \\ D^{u\alpha\varepsilon}_{ijkl} & D^{u\alpha s}_{ij} \\ C^{u\varepsilon}_{ijkl} & C^{us}_{ij} \\ -A^{u\varepsilon}_{kl}/B^u & -A^{us}/B^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{kl} \\ \dot{s} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\dot{\varepsilon}_{ij} \\ \dot{\theta} \\ -\dot{\chi}_{ij} \\ \dot{\alpha}_{ij} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{h\sigma\sigma}_{ijkl} & D^{h\sigma s}_{ij} \\ D^{hs\sigma}_{kl} & D^{hs} \\ D^{h\alpha\sigma}_{ijkl} & D^{h\alpha s}_{ij} \\ C^{h\sigma}_{ijkl} & C^{hs}_{ij} \\ -A^{h\sigma}_{kl}/B^h & -A^{hs}/B^h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{kl} \\ \dot{s} \end{Bmatrix}$
$\dot{\theta}$	$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{ij} \\ -\dot{s} \\ -\dot{\chi}_{ij} \\ \dot{\alpha}_{ij} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{f\varepsilon\varepsilon}_{ijkl} & D^{f\varepsilon\theta}_{ij} \\ D^{f\theta\varepsilon}_{kl} & D^{f\theta} \\ D^{f\alpha\varepsilon}_{ijkl} & D^{f\alpha\theta}_{ij} \\ C^{f\varepsilon}_{ijkl} & C^{f\theta}_{ij} \\ -A^{f\varepsilon}_{kl}/B^f & -A^{f\theta}/B^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{kl} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\dot{\varepsilon}_{ij} \\ -\dot{s} \\ -\dot{\chi}_{ij} \\ \dot{\alpha}_{ij} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{g\sigma\sigma}_{ijkl} & D^{g\sigma\theta}_{ij} \\ D^{g\theta\sigma}_{kl} & D^{g\theta} \\ D^{g\alpha\sigma}_{ijkl} & D^{g\alpha\theta}_{ij} \\ C^{g\sigma}_{ijkl} & C^{g\theta}_{ij} \\ -A^{g\sigma}_{kl}/B^g & -A^{g\theta}/B^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{kl} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$

5 等温过程本构方程的确定

土力学中通常忽略温度变化的影响,材料处于等温过程. 等温过程条件下材料中各点处的 θ 和 θ_k 都等于常数. Helmholts 自由能 $F(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, \theta)$ 可表示为

$$F = U - \theta S$$

假定上式中 θ 为被动量，上式对时间微分后得

$$\dot{F} = \dot{U} - \theta\dot{S} = \dot{U} - \theta(\dot{S}^r + \dot{S}^i)$$

式中 $\dot{S}^r$ 和 $\dot{S}^i$ 分别为因热量流入或流出而产生的可恢复的熵增率和不可恢复的熵增率，在等温过程中 $\dot{S}^r = 0$, 由热力学可知 $d = \theta\dot{S}^i$, 因此上式变为: $\dot{F} = \dot{U} - d$, 由式 (2), 并注意到等温过程 $q_{k,k} = 0$, 上式变为

$$\dot{F} + d = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{26}$$

式 (26) 就是在等温过程,材料应满足的热力学方程, 该方程建立了能量势函数和耗散势函数与应力应变之间的关系. 由热力学第二定律可知: $\dot{S} = \dot{S}^r + \dot{S}^i \geq 0$, 等温过程, $\dot{S}^r = 0$, 所以有 $\dot{S}^i = \dfrac{d}{\theta} \geq 0$, $d \geq 0$.

下面将利用上述热力学框架,来建立弹塑性本构方程以及给出建模步骤.

6 两个例子

下面给出两个能量函数的一些简单的形式，考虑率无关耗散性岩土材料的一个等温热弹性本构方程的建立过程；对于复杂一些的弹塑性情况可见参考文献 [8, 13].

(1) 如给定 Gibbs 自由能函数 g 的能量形式如式 (27) 所示

$$g = -\frac{1}{3K}\frac{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}{6} - \frac{1}{2G}\frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}{2} - \alpha(\theta - \theta_0)\sigma_{kk} - \frac{c}{\theta_0}\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2} \tag{27}$$

其中， K 是等温体积模量； G 是剪切模量； α 是热膨胀系数； c 是在常应力下的比热； θ_0 是初始温度；弹性材料的耗散势函数 $d = 0$.

根据表 1 和表 2 所给出的关系，可得

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = -\frac{\partial^2 g}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl} - \frac{\partial^2 g}{\partial\sigma_{ij}\partial\theta}\dot{\theta} \tag{28}$$

$$\dot{S} = -\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\dot{\theta} \tag{29}$$

带入能量函数具体形式可得

$$\dot{\varepsilon}'_{ij} = 0 \cdot \dot{\sigma}_{kk} - \frac{1}{2G}\dot{\sigma}'_{ij} + 0 \cdot \dot{\theta} \tag{30}$$

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{3K}\dot{\sigma}_{kk} + 0 \cdot \dot{\sigma}'_{ij} + 3\alpha\dot{\theta} \tag{31}$$

$$\dot{S} = 3\alpha\dot{\sigma}_{kk} + 0 \cdot \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{c}{\theta_0}\dot{\theta} \tag{32}$$

由此通过给出的 Gibbs 自由能函数具体形式，就推出了线弹性各向同性小变形情况下岩土材料本构关系的增量反应关系式如式 (33)

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{kk} \\ \dot{\varepsilon}'_{ij} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3K} & 0 & 3\alpha \\ 0 & -\dfrac{1}{2G} & 0 \\ 3\alpha & 0 & \dfrac{c}{\theta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{kk} \\ \dot{\sigma}'_{ij} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{33}$$

(2) 如给定内能函数 u 的能量形式如式 (34) 所示

$$u = \frac{3K}{X}\frac{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ii}}{6} + 2G\frac{\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}}{2} - \frac{\alpha 3K\theta_0}{cX}s\varepsilon_{kk} + \frac{\theta_0}{cX}\frac{s^2}{2} + s\theta_0 \tag{34}$$

其中定义 $X=1-\dfrac{9K\alpha^2\theta_0}{c}$; X 值趋近于 1, 它代表了绝热过程与等温行为之间的差异； $d=0$ (对于弹性材料).

同样利用表 1 和表 2 所给出的关系，可得

$$\dot{\sigma}_{ij}=\frac{\partial u}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl}+\frac{\partial u}{\partial\varepsilon_{ij}\partial s}\dot{s} \tag{35}$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\dot{S} \tag{36}$$

带入能量函数的具体形式可推出

$$\dot{\sigma}'_{ij}=0\cdot\dot{\varepsilon}_{kk}+2G\cdot\dot{\varepsilon}'_{ij}+0\cdot\dot{s} \tag{37}$$

$$\dot{\sigma}_{kk}=\frac{3K}{X}\dot{\varepsilon}_{kk}+0\cdot\dot{\varepsilon}'_{ij}-\frac{9\alpha K\theta_0}{cX}\dot{s} \tag{38}$$

$$\dot{\theta}=-\frac{9\alpha K\theta_0}{cX}\dot{\varepsilon}_{kk}+0\cdot\dot{\varepsilon}'_{ij}+\frac{\theta_0}{cX}\dot{s} \tag{39}$$

进而可以得到岩土材料在给定内能情况下线弹性本构关系的增量反应形式如式 (40) 所示

$$\begin{bmatrix}\dot{\sigma}_{kk}\\ \dot{\sigma}'_{ij}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3K}{X} & 0 & -\dfrac{9\alpha K\theta_0}{cX}\\ 0 & 2G & 0\\ -\dfrac{9\alpha K\theta_0}{cX} & 0 & \dfrac{\theta_0}{cX}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varepsilon}_{kk}\\ \dot{\varepsilon}'_{ij}\\ \dot{s}\end{bmatrix} \tag{40}$$

7 利用热力学框架建立土的本构方程的步骤

前面讨论建立土的本构方程的理论基础，下面将给出利用热力学框架建立本构方程的具体方法和步骤：

(1) 选择并给出自由能函数 $\varPsi$ 和耗散势函数增量 $\partial\phi$ 的具体形式. 这两个函数以及独立状态变量和内变量的选择需要根据所处理问题的类型, 以及经验和物理意义确定. 由于选择状态变量的性质和个数的不同, 对物理现象的描述有的比较细致、精确，而有的则较为粗糙，另外还需满足 $\delta\phi\geq 0$. 此步是整个过程的关键.

(2) 利用自由能函数导出弹性关系

$$\sigma'_{ij}=\frac{\partial\varPsi_1}{\partial\varepsilon^e_{ij}}$$

(3) 利用自由能函数导出移动应力

$$\rho'_{ij}=\frac{\partial\varPsi_2}{\partial e^p_{ij}}$$

(4) 利用耗散势增量函数导出耗散应力

$$\pi'_{ij}=\frac{\partial d^i}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij})}$$

(5) 利用 Legendre 变换可建立耗散势函数与屈服函数之间的关系，然后再由式 (16) 得到广义应力空间表示的正交流动法则

$$\dot{\alpha}_{ij}=\lambda\frac{\partial Y'}{\partial X_{ij}}$$

(6) 利用表 3 的相应公式，可以得到增量形式的本构方程.

8 结语

土的本构关系研究的鼎盛时期是 1977 年 ～ 1990 年, 提出了数百计的模型，但此后研究的人数和论文数量大幅减少. 究其原因可能有二个：

(1) 科学的发展是不平衡的，既有高峰也有低谷，土的本构研究目前处于发展的低谷阶段，这一阶段需要对以前的发展进行反思、总结和深化，其进一步的发展也需要建立新的方法和新的思路.

(2) 土力学的传统以及工程界不认可不能直接应用于工程而又过于复杂的本构模型. 事实上，尽管一些本构模型很复杂, 最多的参数有 20 多个, 但仍然不能预测土体复杂的变形性质, 定量预测的误差也非常大. 这就造成了工程界对土的本构模型的怀疑，搞这么复杂还解决不了问题. 这种对土的本构关系的研究持怀疑和否定的态度到目前为止还是比较突出的. 虽然如此, 但科学并不会因此而停止不前. 科学还是会不断向前发展，土的本构关系的研究也会不断深入.

土力学是一门科学，而不是一种技术. 它是关于土的力学性质和状态 (也包括土的渗流性质) 发展、变化规律的一门对客观事物认识的科学, 而不是以解决工程问题为目的的技术或技艺. 既然是一门科学就有它的基础理论部分. 而从事关于土力学基础理论部分的研究 (例如土的本构关系的研究) 属于基础性研究. 科学研究史表明：基础性研究可以不考虑实际结果, 只要它对一般性知识以及自然界及其规律的认识有贡献就可以得到认可; 因为基础性研究一旦受命于不成熟的实际应用目标, 就有可能放弃或断送它的学术性和创造力. 对土力学的研究采用完全实用主义的态度是不行的. 本构模型的研究属于土力学中的基础性研究，对于这种研究不能过分强调它的实用性，否则就有可能断送一些有创造性的研究. 当然，具有实用价值的基础性研究更应该提倡；土的本构关系的研究应尽可能的考虑它的实用性，但也不必非具有实用性才可以研究，主要看它的创造性如何，它是否能够促进该学科的发展.

本文介绍的基于热力学基础建立土力学本构方程的框架属于上述基础性研究的范畴. 这一框架和方法由于采用了内变量, 因而可以反映或考虑土的微观结构的变化和机理, 另外一些新的研究成果表明 [8~13], 它可以提供坚实的理论构架, 为深入地认识和理解土力学的一些现象, 为土力学的进一步深入发展奠定了一些必要的基础.

参 考 文 献

1 Reddy B D, Martin J B. Internal variable formulations of problems in elstoplasticity constitutive and algorithmic aspects. *Applied Mechanics Reviews,* 1994, 47: 429~456
2 Collins I F, Houlsby G T. Application of thermo- mechanical principles to the modeling of geotechnical materials. *Proc Royal Society of London,* 1997, 453A: 1975~2001
3 Houlsby G T, Puzrin A M. A thermomechanical *f*- ramework for constitutive models for ratindependent dissipative materials. *International Journal of Plasticity,* 2000, 16: 1017~1047
4 Houlsby G T, Puzrin A M. Rate-dependent plasticity models derived from potential functions. *Journal of Rheology,* 2001, 46: 113~126
5 Puzrin A M, Houlsby G T. A thermomechanical framework for rat-independent dissipative materials with internal functions. *Int J Plasticity,* 2001, 17: 1147~1165
6 Puzrin A M, Houlsby G T. Rat-dependent hyper- plasticity with internal functions. *ASCE, Engineering Mechanics Div,* 2003, 29(3): 252~263
7 Puzrin A M, Houlsby G T. Fundamentals of kinematic hardening hyperplasticity. *Int J Solids and Structures,* 2001, 38: 3771~3794
8 Collins I F, Hilder T. A theoretical framework for constructing elastic/plastic constitutive mo- dels of triaxial tests. *International Journal for Numerical Analytical Methods in Geomechanics,* 2002, 26: 1313~1347
9 Collins I F, Kelly P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models. *Geotechnique,* 2002, 7: 507~518
10 Collins I F. Associated and non associated aspects of the constitutive laws for coupled elastic/plastic materials. *The International Journal of Geomechanics,* 2002, 2: 259~267
11 Collins I F, Muhunthan B. On the relationship between stress-dilatancy and plastic dissipation for granular materials. *Geotechnique,* 2003, 7: 611~618
12 Collins I F. The concept of stored plastic work for frozen elastic energy in soil mechanics. *Geotechnique,* 2005, 5: 373~382
13 Houlsby G T, Amorosi A, Rojas E. Elastic moduli of soil's dependent on pressure: a hyperelastic formulation. *Geotechnique,* 2005, 5: 383~390
14 Ziegler H. An Introduction to Thermomechanics. 2nd edn. Amsterdan: North-Holland, 1983
15 Ziegler H, Wehrli C. The derivation of con- stitutive relations from the free energy and the dissipation function. *Advances in Applied Mechanics,* 1987, 25: 183~238
16 Lemaitr J L, Chaboche J L. Mechanics of Solid Materials. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
17 Maugin G A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
18 Maugin G A. The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors. Singapore: World Scientific Press, 1999
19 王竹溪. 热力学 (第二版). 北京：北京大学出版社， 2005
20 Trusdell C A. Rational Thermodynmics. 2nd enlarg- ed edition. New York: Springer-verlag, 1984

CONSTITUTIVE EQUATIONS OF SOILS AND THERMODYNAMICS

ZHAO Chenggang† ZHANG Xuedong GUO Xuan

School of Civil Engineering & Architecture, BeiJing Jiaotong University, Beijing 100044, China

Abstract A thermomechanical framework for modeling soils is presented in this paper. The essence of the theory is to establish constitutive relationships by using free energy and dissipation functions through a fixed framework and procedure. The theory of internal variables and the method of Legendre transformation to determine the relationships among free energy functions as well as the relationship between dissipation and yield functions are briefly discussed, the steps of formulating constitutive equations within this framework are also presented. The significance of soil constitutive relationships and its relation with applications are discussed.

Keywords thermodynamics, constitutive equations of soils, free energy, dissipation function

† E-mail: cgzhao@center.njtu.edu.cn