第 35 卷　第 2 期　力 学 进 展　Vol. 35　No. 2
2005 年 5 月 25 日　ADVANCES IN MECHANICS　May 25, 2005

湍流流动和传热整体传输特性的数学分析

魏　琪 †

苏州大学物理科学与技术学院，苏州 215006

摘　要　湍流是极为普遍的流动现象，整体传输特性和外部驱动力之间的关系是各类湍流流动和传热问题研究的中心问题. 对近年来 Doering 和 Constantin 发展的直接从 Navier-Stokes 方程推导出湍流流动和传热整体传输特性的显式界的变分方法进行了评述，重点介绍了平面 Couette 湍流流动、平面槽道湍流流动和 Rayleigh-Benard 对流这几种典型的湍流流动和传热整体传输特性的显式界的数学分析. 最后，讨论了存在的问题并对该领域今后的研究方向进行了展望.

关键词　湍流， Navier-Stokes 方程，整体传输特性，变分方法

1 引　言

湍流是极为普遍的流动现象, 是自然界和工程问题中最为普遍存在的流体运动形式. 大气和海洋的流动几乎都是湍流; 燃烧和环境污染的扩散受湍流运动控制, 流动过程中的传热和传质也以湍流运动规律为基础. 总之，无论自然环境还是航空航天、化工等工程领域都迫切需要有可靠预测和有效控制湍流流动和传热的理论和方法.

湍流的研究已经持续了一个多世纪，人们对湍流运动的认识也有了很大的进展. 整体传输特性和外部驱动力之间的关系是各类湍流流动和传热问题研究的中心问题. 例如，管流中平均流速和压降的关系， Rayleigh-Benard 对流中热通量与上下壁温差之间的关系等.

Navier-Stokes 方程是描述流体运动的一般方程，它是在最一般的条件下得到的. 从数学上看，Navier-Stokes 方程是非线性的对流扩散型偏微分方程，它形式上似乎并不复杂. 然而，一般情况下，Navier-Stokes 方程初边值问题解的存在和唯一性尚未完全得到证明, 只有在很苛刻的条件下, 数学上已经证明了解的存在和唯一性 [1,2]:

在雷诺数较小时, 存在唯一的确定性解，也就是定常或非定常层流解.

当不满足解的唯一性条件时， Navier-Stokes 方程可能存在分岔解.

Navier-Stokes 方程是否能够描述湍流呢？这个命题是：确定性的非线性偏微分方程是否可能有长时间的不规则渐近解？数学家们正在寻求明确的答案. 现有的结论是：非线性常微分方程组的初值问题可能产生长时间的不规则解, 或称混沌解. 这种不规则解有以下特征：

(1) 给定某种初始状态，解轨迹在 $t \to \infty$ 时是不规则的振荡型, 从解的时间序列来看类似于宽频带的湍流流动.

(2) 初始状态相差很小的两个轨迹, 在 $t \to \infty$ 时两个解相差很大 (在混沌理论中称为蝴蝶效应). 从流动现象上看，在湍流状态下，流动事件的长时间行为是不确定的.

因此，虽然三维 Navier-Stokes 方程解的唯一性问题仍然是该领域未解决的主要问题之一，然而，弱解在许多情况下存在. 我们已经知道, 对三维 Navier-Stokes 方程的弱解，时均能量耗散率是有限的，故对于 Navier-Stokes 方程所描述的流体运动，我们可以定义时均能量耗散率的体积平均值为

$$\varepsilon = V^{-1}\nu\langle\|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2\rangle$$

其中 V 是所考虑的流体运动区域的体积， $\langle\cdot\rangle$ 表示时间平均.

这在理论和应用上都有重要意义. 例如，在定常态湍流流动中，外力与流动阻力相平衡，以维持定常

收稿日期：2004-02-16，修回日期：2004-10-08
†E-mail: weiqi62@163.com

态湍流，时均能量耗散率就导致流动阻力的估计. 更一般地，时均能量耗散率常常与质量、动量和热量时均整体传输特性有关，对流动阻力而言，这是边界间所传输的动量；而对管流或槽流问题，则是流体流动所传输的质量；在热对流问题中，是流体对流所传输的热量. 这就允许从数学上确定湍流流动的质量、动量和热量时均整体传输特性. 已有的研究结果表明，在许多情形下，从数学上确定的湍流流动的质量、动量和热量时均整体传输特性的界离湍流区域的实测量并不太远，且与实验和其他湍流传输理论得到的 Reynolds 数和 Rayleigh 数幂次律一致.

从数学上确定湍流流动的质量、动量和热量时均整体传输特性界的研究至少可以追溯到 20 世纪 50 年代， Malkus[3] 首先提出湍流可能极大化整体传输特性这一开创性的思想，利用该统计假设，他发展了一种变分方法，推导出湍流热对流整体热量传输特性的界. 20 世纪 60 年代以后， Howard[4] 和 Busse 等 [5] 开拓了这一研究工作，并一直延续到现在 [6,7]. 该工作在某种程度上可看作 Navier-Stokes 方程解的存在性和正则性的泛函分析与湍流统计模式之间的一步. 近年来，Doering 和 Constantin[8~11] 利用 Hopf[12] 在 20 世纪 40 年代提出的泛函方法，不做任何统计假设，直接从 Navier-Stokes 方程推导出相似的整体传输特性的界. Kerswell[13,14] 已经证明该方法与 Howard 和 Busse 的方法有紧密的联系.

在本文中，我们对近年来 Doering 和 Constantin 发展的直接从 Navier-Stokes 方程推导出湍流流动和传热整体传输特性的显式界的变分方法进行了评述，重点介绍了平面 Couette 湍流流动、平面槽道湍流流动和 Rayleigh-Benard 对流这几种典型的湍流流动和传热整体传输特性的显式界的数学分析. 最后，讨论了存在的问题并对该领域今后的研究方向进行了展望.

2 湍流剪切流

首先考虑平面 Couette 湍流流动，设位于 $z=h$ 平面的上板在其本身平面内以等速度 U 相对于 $z=0$ 平面的静止下板移动. 平行平板间的不可压缩牛顿流体在上、下板处满足无滑移边界条件 $\boldsymbol{u}(x,y,0,t)=0$ 和 $\boldsymbol{u}(x,y,h,t)=\boldsymbol{i}U$, 在 x 和 y 方向分别满足长度尺度为 L_1 和 L_2 的周期性边界条件. 定义 Reynolds 数为 $Re=Uh/\nu$.

分析基于 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla p=\nu\Delta\boldsymbol{u} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

这里已经选择 $\rho=1$. 取 $\boldsymbol{u}$ 和 (1) 的标量积并对区域积分，在适当的分步积分后，可得到能量方程

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_2^2=-\nu\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2+ \\ \nu U\int_0^{L_1}\mathrm{d}x\int_0^{L_2}\mathrm{d}y\frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=h} \tag{3}$$

我们的目标是获得时均能量耗散率

$$\varepsilon=\frac{\nu\langle\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2\rangle}{L_1L_2h} \tag{4}$$

由系统参数 (U,ν,h,L_1,L_2) 表示的显式上界.

在定常状态下，方程 (3) 的时间平均使得最大可能的能量耗散率与平板速度 U 和流体作用在平板上最大可能的阻力的乘积相平衡

$$\nu\langle\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2\rangle=\nu U\int_0^{L_1}\mathrm{d}x\int_0^{L_2}\mathrm{d}y\langle\frac{\partial u_1}{\partial z}\rangle\bigg|_{z=h} \tag{5}$$

Navier-Stokes 方程的层流定常流解是平面 Couette 流

$$u=\boldsymbol{i}\frac{U\cdot z}{h}$$

则最小能量耗散率是

$$\varepsilon_{\min}=\frac{\nu U^2}{h^2} \tag{6}$$

对于高 Reynolds 数条件下的湍流流动，Reynolds 将速度分解为平均速度和脉动速度，按此思想， Doering 和 Constantin[8,9] 将速度分解为

$$\boldsymbol{u}(x,y,z,t)=\boldsymbol{i}\phi(z)+\boldsymbol{v}(x,y,z,t) \tag{7}$$

其中边界条件包含在背景流 $\boldsymbol{i}\phi(z)$ 中，即 $\phi(0)=0$ 和 $\phi(h)=U$. 值得注意的是，这时背景流本质上是任意的，仅受边界条件约束；而动力学包含在脉动场 $\boldsymbol{v}$ 中，即脉动场满足

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{i}\phi' v_3+\phi\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}+\nabla p= \\ \nu\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{i}\nu\phi'' \tag{8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{9}$$

经过一系列推导，求时均能量耗散率 ε 的显式上界就转化为优化选择背景流 $\phi(z)$ 以获得 ε 的最小上界的有约束变分问题

$$\varepsilon\le\inf\left\{\frac{\nu}{h}\int_0^h|\phi'(z)|^2\mathrm{d}z\bigg|\phi(0)=0,\right. \\ \left.\phi(h)=U\quad\text{and}\quad G_\phi\{\boldsymbol{v}\}\ge 0\right\} \tag{10}$$

其中泛函 $G_\phi\{\boldsymbol{v}\}$ 是

$$G_\phi\{\boldsymbol{v}\}=\int_0^{L_1}\mathrm{d}x\int_0^{L_2}\mathrm{d}y\int_0^h\mathrm{d}z\cdot \\ \left\{\frac{\nu}{2}|\nabla\boldsymbol{v}|^2+\phi' v_1v_3\right\} \tag{11}$$

显然, 确定这一有约束变分问题的精确解是一个困难的任务. Doering 和 Constantin 为了得到这一有约束变分问题的一个显式上界, 构造了一个简单的背景流

$$\phi(z)=\begin{cases} Uz/2\delta, & 0\le z\le \delta \\ U/2, & \delta\le z\le h-\delta \\ \dfrac{U}{2\delta}(z-h+2\delta), & h-\delta\le z\le h \end{cases} \tag{12}$$

其中参数 δ 称为 "边界层厚度". 然后通过数学分析对泛函 $G_\phi\{\boldsymbol{v}\}$ 进行估计，有

$$G_\phi\{\boldsymbol{v}\}\ge \frac{\nu}{2}\left(1-\frac{U\delta}{4\sqrt{2}\nu}\right)\|\nabla\boldsymbol{v}\|_2^2 \tag{13}$$

通过选择 $\delta=4\sqrt{2}\dfrac{\nu}{U}$, 使得约束条件 $G_\phi\{v\}\ge 0$ 得到满足，则有对应的时均能量耗散率 ε 的显式上界

$$\varepsilon\le\frac{\nu}{h}\int_0^h|\phi'(z)|^2\mathrm{d}z=\frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{U^3}{h} \tag{14}$$

这是一个非常有意义的结果. 首先，与流体黏性无关的结果是与 Kolmogorov 关于湍流能量耗散的标度律相一致的 [15], 这一湍流整体传输特性与流体物性无关的结果也正是湍流的标志；再者，绝对常数 $c=(8\sqrt{2})^{-1}\approx 0.088$ 远小于 $O(1)$ 数量级，表明这一结果要比量纲分析的结果有意义.

Gebhardt 等 [16] 设 $\phi(z)=U\cdot f(z/h)$, 取边界层厚度内背景流为二次多项式

$$f(\xi)=-\left(\frac{Re^2}{144}\right)\xi^2+\left(\frac{Re}{6\sqrt{2}}\right)\xi$$

$$0\le\xi\le\frac{\delta}{h}\le\frac{1}{2} \tag{15}$$

构造了一个更好的背景流，改进了上述结果，得到 $c\approx 0.078\,7$.

Nicodemus 等 [17~20] 提出新的优化思路，构造了更复杂的两参数背景流

$$f(\xi)=\begin{cases} (\varDelta\cdot p+(1-p))\xi/\varDelta-\dfrac{1}{2}(1-p)(\xi/\varDelta)^2 \\ \qquad\qquad 0\le\xi\le\varDelta \\ \dfrac{1}{2}(1-p)+p\xi, \qquad \delta\le\xi\le 1-\varDelta \\ 1-(\varDelta\cdot p+(1-p))(1-\xi)/\varDelta+ \\ \quad \dfrac{1}{2}(1-p)((1-\xi)/\varDelta)^2, \quad 1-\varDelta\le\xi\le 1 \end{cases} \tag{16}$$

式中 $0<p\le 1$ 和 $0<\varDelta=\delta/h<1/2$. 通过数值计算，将结果改进为 $c\approx 0.01$.

近来， Plasting 和 Kerswell[21] 用 Chebyshev 多项式表示背景流，即

$$f(\xi)=-Re\xi+\sum_{n=1}^{N}\hat{\phi}_n U_{2n}(2\xi) \tag{17}$$

式中

$$U_n(\xi)=\cos((n+1)\cos^{-1}\xi)-\cos((n-1)\cos^{-1}\xi)$$

通过直接求有约束变分问题的数值解, 将结果改进为 $c\approx 0.008\,553$.

另外， Marchioro[22] 考虑了平板速度随时间变化情况下平面 Couette 湍流流动，设上、下板处边界条件为 $\boldsymbol{u}(x,y,0,t)=\boldsymbol{i}f(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(x,y,h,t)=0$, 并假设 $f(t)$ 及其导数有界，即

$$\sup_t|f(t)|\equiv M<\infty \text{ 和 } \sup_t|f'(t)|\equiv G<\infty$$

推导出该湍流剪切流整体传输特性的显式界为

$$\varepsilon\le a+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b(8a+b^2)^{1/2} \tag{18}$$

式中 $a=M^3h^{-1}2^{-3/2}$ 和 $b=2^{11/4}\nu h^{-1/2}M^{-3/2}G$.

Doering 等 [23] 考虑了平板具有喷注和抽吸的情况下平行平板间的湍流剪切流, 即设平行平板间的不可压缩牛顿流体在上、下板处满足边界条件

$$\boldsymbol{u}(x,y,0,t)=-\boldsymbol{k}V \text{ 和 } \boldsymbol{u}(x,y,h,t)=\boldsymbol{i}U-\boldsymbol{k}V \tag{19}$$

定义 Reynolds 数 $Re=Uh/\nu$ 和入口角 $\tan\theta=V/U$, 推导出该湍流剪切流整体传输特性的显式界为

$$\varepsilon\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[1+\frac{8}{3}\tan^2\theta\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{1}{Re}\right)\right]\frac{U^3}{h} \tag{20}$$

平面槽道湍流这一典型的有固壁的简单湍流运动是压力梯度驱动的剪切湍流. 与上面的讨论相似，考虑沿 x 方向有大小为 P/L_x 的均匀压力梯度驱动的平面槽道流动，不失一般性，仍选择 $\rho=1$, 则流体的速度场满足 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla p=\nu\varDelta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{i}\frac{P}{L_x} \tag{21}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{22}$$

流体在槽道上、下壁处满足无滑移边界条件 $\boldsymbol{u}(x,y,0,t)=0$ 和 $\boldsymbol{u}(x,y,h,t)=0$, 在 x 和 y 方向分别满足长度尺度为 L_x 和 L_y 的周期性边界条件. 定义槽道在时刻 t 的质流量为

$$\Phi(t)=\int_0^{L_y}\mathrm{d}y\int_0^h\mathrm{d}z\cdot u_1(x,y,z,t) \tag{23}$$

根据不可压条件和边界条件，质流量 $\Phi(t)$ 与 x 无关. 取 $\boldsymbol{u}$ 和式 (21) 的标量积并对区域积分，在适当的分步积分后，可得到能量方程

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_2^2+\nu\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2=P\Phi \tag{24}$$

我们的目标是获得时均质流量

$$\langle\Phi\rangle_T=\frac{1}{T}\int_0^T\Phi(t)\mathrm{d}t \tag{25}$$

由系统参数 (P,ν,h,L_x,L_y) 表示的显式下界.

在该情形下 Navier-Stokes 方程的层流定常流解是平面 Poiseuille 流

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}\frac{P}{2\nu L_x}z(h-z) \tag{26}$$

则质流量是

$$\Phi^{\mathrm{Poiseuille}}=\frac{1}{12}\frac{Ph^3L_y}{\nu L_x} \tag{27}$$

定义平均速度 $\overline{U}=\dfrac{\Phi}{L_yh}$, Reynolds 数 $Re=\dfrac{\overline{U}h}{\nu}$ 和摩擦系数 $C_f=\dfrac{Ph}{L_x\overline{U}^2}$, 则对平面 Poiseuille 流，有

$$C_f^{\mathrm{Poiseuille}}=\frac{12}{Re} \tag{28}$$

对于高 Reynolds 数条件下的湍流流动，按 Reynolds 将速度分解为平均速度和脉动速度的思想，相似地 Doering 和 Constantin[10] 将速度分解为

$$\boldsymbol{u}(x,y,z,t)=\boldsymbol{i}U(z)+\boldsymbol{v}(x,y,z,t) \tag{29}$$

其中边界条件包含在背景流 $\boldsymbol{i}U(z)$ 中，即 $U(0)=U(h)=0$; 而动力学包含在脉动场 $\boldsymbol{v}$ 中.

经过一系列推导，求时均质流量 $\langle\Phi\rangle_T$ 的显式下界就转化为有约束变分问题

$$\begin{aligned}\langle\Phi\rangle_T\geq\sup\Bigg\{&\frac{1}{12}\frac{Ph^3L_y}{\nu L_x}-\frac{\nu L_xL_y}{P}\cdot\\&\int_0^h\left[U'(z)-\frac{P}{2\nu L_x}(h-2z)\right]^2\mathrm{d}z\Bigg|\\&U(0)=0=U(h),H_U\{\boldsymbol{v}\}\geq0\Bigg\}\end{aligned} \tag{30}$$

其中泛函 $H_U\{\boldsymbol{v}\}$ 是

$$\begin{aligned}H_U\{\boldsymbol{v}\}=&\int_0^{L_x}\mathrm{d}x\int_0^{L_y}\mathrm{d}y\int_0^h\mathrm{d}z\cdot\\&\left\{\frac{\nu}{2}|\nabla\boldsymbol{v}|^2+v_1v_3U'(z)\right\}\end{aligned} \tag{31}$$

Doering 和 Constantin 构造了一个简单的背景流

$$U(z)=\begin{cases}Vz/\delta, & 0\leq z\leq\delta\\ V, & \delta\leq z\leq h-\delta\\ \dfrac{V}{\delta}(h-z), & h-\delta\leq z\leq h\end{cases} \tag{32}$$

其中参数 δ 称为 “边界层厚度”. 然后通过数学分析对泛函 $H_U\{\boldsymbol{v}\}$ 进行估计，有

$$H_U\{\boldsymbol{v}\}\geq\left[\frac{\nu}{2}-\frac{V\delta}{4\sqrt{2}}\right]\|\nabla\boldsymbol{v}\|_2^2 \tag{33}$$

通过选择 $\delta=2\sqrt{2}\dfrac{\nu}{V}$ 使得约束条件 $H_U\{\boldsymbol{v}\}\geq0$ 得到满足，则有

$$\langle\Phi\rangle_T\geq2L_yhV-4\sqrt{2}L_y\nu-\frac{L_xL_y}{P\sqrt{2}}V^3 \tag{34}$$

选择 $V^2=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{Ph}{L_x}$ 得上面下界的极大值，则有对应的时均质流量 $\langle\Phi\rangle_T$ 的显式下界

$$\langle\Phi\rangle_T\geq\left[\frac{32\sqrt{2}}{27}\frac{L_y^2h^3P}{L_x}\right]^{1/2}-4\sqrt{2}L_y\nu \tag{35}$$

按照前面的定义，摩擦系数的显式上界为

$$C_f\leq\frac{27}{32}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{4\sqrt{2}}{Re}\right]^2 \tag{36}$$

与上面平行平板间的湍流剪切流的讨论相似, 这一与流体黏性无关的结果是与 Kolmogorov 关于湍流能量耗散的标度律相一致的, 这一湍流整体传输特性与流体物性无关的结果也正是湍流的标志.

魏琪[24] 考虑了槽道上、下壁有喷注和抽吸的情况下压力梯度驱动的剪切湍流流动，即设流体在槽道上、下壁处满足边界条件 $\boldsymbol{u}(x,y,0,t)=-\boldsymbol{k}V$ 和 $\boldsymbol{u}(x,y,h,t)=-\boldsymbol{k}V$, 定义喷注和抽吸 Reynolds 数 $Re_V=Vh/\nu$, 喷注和抽吸角 $F=Re_V/Re$, 构造了一个简单的背景流

$$U(z)=\begin{cases}Uz/\delta, & 0\leq z\leq\delta\\ U, & 0\leq z\leq h-a\delta\\ \dfrac{U}{a\delta}(h-z), & h-a\delta\leq z\leq h\end{cases} \tag{37}$$

其中参数 δ 称为 “边界层厚度”, $a>1$ 是一个与 Re_V 有关的变量. 推导出对应的时均质流量 $\langle\Phi\rangle_T$ 的显式下界

$$\begin{aligned}\langle\Phi\rangle_T\geq&\left[\frac{128\sqrt{2}}{27}\frac{L_y^2h^3Pa}{L_x(a+1)^2}\right]^{1/2}\cdot\\&\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{L_xV^2}{Ph}\right)^{3/2}-4\sqrt{2}L_y\nu\end{aligned} \tag{38}$$

摩擦系数的显式上界为

$$C_f\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{F^2}{C_f}\right)^3 \le \frac{27(a+1)^2}{128\sqrt{2}a}\left[1+\frac{4\sqrt{2}}{Re}\right]^2 \quad (39)$$

当 $V = 0$ 时， $U(z)$ 成为对称的，取 $a = 1$, 即得式 (35) 和式 (36).

3 湍流热对流

经典 Rayleigh-Benard 对流问题是另一类湍流传输系统. 在这类问题中，与能量耗散率相关的是热量的传输. 考虑下部加热的水平流体层，其速度场和温度场满足的 Boussinesq 方程的无量纲形式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla p=\sigma\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{k}\sigma RaT \quad (40)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T=\Delta T \quad (42)$$

其中 σ 是 Prandtl 数， Ra 是 Rayleigh 数. 流体在上、下壁处，速度满足无滑移边界条件 $\boldsymbol{u}(x,y,0,t)=0$ 和 $\boldsymbol{u}(x,y,1,t)=0$, 温度为 $T(x,y,0,t)=1$ 和 $T(x,y,1,t)=0$, 在 x 和 y 方向分别满足长度尺度为 λ_1 和 λ_2 的周期性边界条件. 无量纲形式的热通量定义为对流传热量与无流动时导热量的比值, 可用下式表示

$$Nu=1+\left\langle\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\int_0^{\lambda_1}\mathrm{d}x\int_0^{\lambda_2}\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z\cdot u_3T\right\rangle \quad (43)$$

取 $\boldsymbol{u}$ 和式 (40) 的标量积并对区域积分，在适当的分部积分后, 可得到能量耗散率相关的是热量的传输之间的关系

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_2^2=-\sigma\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2+\sigma Ra\int_0^{\lambda_1}\mathrm{d}x\cdot \int_0^{\lambda_2}\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z\cdot u_3T \quad (44)$$

因而，时均能量耗散率可表示为

$$\varepsilon=\frac{\langle\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2\rangle}{\lambda_1\lambda_2}=Ra(Nu-1) \quad (45)$$

显然，在无流动导热时 $Nu=1$.

对于高 Rayleigh 数条件下的湍流热对流， Doering 和 Constantin[11] 将温度分解为

$$T(x,y,z,t)=\tau(z)+\theta(x,y,z,t) \quad (46)$$

其中非齐次边界条件包含在定常背景场 $\tau(z)$ 中，即 $\tau(0)=1$ 和 $\tau(1)=0$. 值得注意的是，这时定常背景场 $\tau(z)$ 本质上也是任意的, 仅受边界条件约束; 而脉动场满足齐次边界条件 $\theta(x,y,0,t)=\theta(x,y,1,t)=0$, 则关于 θ 的方程是

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta=\Delta\theta+\tau''-\tau' u_3 \quad (47)$$

同样可以把求无量纲形式的热通量 Nu 的显式上界转化为有约束变分问题

$$Nu\le\inf\left\{\int_0^1[\tau'(z)]\mathrm{d}z\middle|\tau(0)=1,\tau(1)=0 \text{ and } H_\tau\{\theta,\boldsymbol{u}\}\ge 0\right\} \quad (48)$$

其中泛函 $H_\tau\{\theta,\boldsymbol{u}\}$ 是

$$H_\tau\{\theta,\boldsymbol{u}\}=\int_0^{\lambda_1}\mathrm{d}x\int_0^{\lambda_2}\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z\left\{\frac{1}{2}|\nabla\theta|^2+(\tau'-1)u_3\theta+Ra^{-1}|\nabla\boldsymbol{u}|^2\right\} \quad (49)$$

显然, 确定这一有约束变分问题的精确解也是一个困难的任务. Doering 和 Constantin 为了得到这一有约束变分问题的一个显式上界, 构造了一个便于数学分析的简单背景场

$$\tau(z)=\begin{cases}1+(1-\eta^{-1})z, & 0\le z\le\eta\\ z, & \eta\le z\le 1-\eta\\ (1-\eta^{-1})(z-1), & 1-\eta\le z\le 1\end{cases} \quad (50)$$

其中参数 η 称为 “热边界层厚度”. 通过数学分析对泛函 $H_\tau\{\theta,\boldsymbol{u}\}$ 进行估计，对任意 $\alpha>0$, 我们有

$$H_\tau\{\theta,\boldsymbol{u}\}\ge\frac{1}{2}\left(1-\frac{\eta\alpha}{2}\right)\|\nabla\theta\|_2^2+\left(Ra^{-1}-\frac{\eta}{8\alpha}\right)\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2 \quad (51)$$

通过选择 $\alpha=2\eta^{-1}$ 和 $\eta=4Ra^{-1/2}$ 使得约束条件 $H_\tau\{\theta,\boldsymbol{u}\}\ge 0$ 得到满足，则有对应的无量纲形式的热通量 Nu 的显式上界

$$Nu\le\int_0^1[\tau'(z)]^2\mathrm{d}z=0.5Ra^{1/2}-3 \quad (52)$$

近期的实验研究建议 [25]

$$Nu\sim\sigma^{1/2}Ra^{1/2}\frac{1}{(\log_{10}Ra)^{3/2}} \quad (53)$$

上面的结果是很令人鼓舞的，这一结果是与 Kolmogorov 广义标度律相一致的, 这一湍流整体传输特性与流体物性无关的结果也正是湍流对流的标志.

Kerswell[14] 提出新的优化思路，将结果改进为

$$Nu-1\le 0.033\,5Ra^{1/2} \quad (54)$$

并若取速度场和温度场的最小长度尺度为 $l = \lambda Ra^{(2\gamma-1)/2}d$ (d 为板间距， γ 和 λ 为与 Ra 无关的常数), 则当 $Ra \to \infty$ 时，有

$$(0.606/\sqrt{\lambda})Ra^{(1-\gamma)/2} \le Nu_{\text{bound}} - 1 \le (0.781/\sqrt{\lambda})Ra^{(1-\gamma)/2} \tag{55}$$

Otero 等 [26] 考虑了具等热流边界时 Rayleigh-Benard 对流，即流体在上、下壁处满足边界条件

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0,h} = -\beta \text{ 和 } \boldsymbol{u}|_{z=0,h} = 0 \tag{56}$$

令 $\hat{R} = \dfrac{\alpha g \beta h^4}{\nu\kappa}$ 是由热流率定义的 “有效” Rayleigh 数，他们推导出对应的热通量 Nu 的显式上界为

$$Nu \le \frac{2^{1/3}}{3}\hat{R}^{1/3} \tag{57}$$

Constantin 和 Doering[27] 也考虑了无限 Prandtl 数极限情形下的 Rayleigh-Benard 对流问题，他们选择 τ 为 $\tau(z) = (1-z)/\delta$ (对 $0 \le z \le \delta$) 和 $\tau = 0$ (对 $z \ge \delta$) 的一个光滑近似，通过数学分析得到

$$Nu \le cRa^{1/3}(\log_{10} Ra)^{2/3} \tag{58}$$

Doering 和 Constantin[28] 对无限 Prandtl 数极限情形下的 Rayleigh-Benard 对流问题，选择接近物理真实的简单背景场

$$\tau(z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{z}{2\eta}, & 0 \le z \le \eta \\ \dfrac{1}{2}, & \eta \le z \le 1-\eta \\ \dfrac{1-z}{2\eta}, & 1-\eta \le z \le 1 \end{cases} \tag{59}$$

得到

$$Nu \le cRa^{2/5} \tag{60}$$

并证明了这一结果对具旋转效应的 Rayleigh-Benard 对流也是成立的.

另外， Doering 和 Constantin[29] 还考虑了在饱和多孔层情形下 Rayleigh-Benard 对流问题，构造了式 (59) 这一接近物理真实的简单背景场，得到

$$Nu \le \frac{9}{256}Ra \approx 0.032\,5Ra \tag{61}$$

这与一些数值模拟和实验的结果 $Nu \sim Ra$ 是一致的. Otero 等 [30] 改进了上述结果，得到

$$Nu \le 0.029\,7Ra \tag{62}$$

Wei[31] 考虑了旋转对饱和多孔层 Rayleigh-Benard 对流的影响，得到

$$Nu \le \frac{Ra}{16\sqrt{Ta+1}} \tag{63}$$

这个结果表明旋转对饱和多孔层的对流传热有抑制作用.

魏琪也得到了具等热流边界时饱和多孔层 Rayleigh-Benard 对流热通量 Nu 的显式上界

$$Nu \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\widehat{R}^{1/2} \tag{64}$$

式中 $\widehat{R}$ 是由热流率定义的 “有效” Rayleigh 数.

4 总结与展望

综上所述，整体传输特性和外部驱动力之间的关系是各类湍流流动和传热问题研究的中心问题. 不做任何统计假设，直接从 Navier-Stokes 方程推导出整体传输特性的显式界, 从数学上确定湍流流动的质量、动量和热量时均整体传输特性的研究已取得了一些成果，但是，如何从 Navier-Stokes 方程提取出更多的信息来得到更精确的结果，Prandtl 数在湍流热对流中有什么样的影响, 其它一些湍流流动和传热问题 (如电场或磁场作用下流动、 Marangoni 对流) 整体传输特性的显式界的确定, 这些问题目前还没有很好地解决，都有待我们去探索，这也是我们今后工作的方向.

参 考 文 献

1 Temam R. The Navier-Stokes equations and non-linear functional analysis. In: CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, 1983

2 Doering C R, Gibbon J D. Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

3 Malkus W V R. The heat transport and spectrum of thermal turbulence. *Proc R Soc London, Ser A,* 1954, 225:196～212

4 Busse F H. The optimum theory of turbulence. *Adv Appl Mech,* 1978, 18: 77～121

5 Howard L N. Bounds on flow quantities. *Annu Rev Fluid Mech,* 1972, 17: 473～494

6 Vitanov N K, Busse F H. Bounds on the heat transport in a horizontal layer with stress-free boundaries. *Z Angew Math Phys,* 1997, 48: 310～324

7 Vitanov N K. Upper bounds on convective heat transport in a rotating fluid layer of infinite Prandtl number: case of intermediate Taylor numbers. *Phys Rev E,* 2000, 62: 3581～3591

8 Doering C R, Constantin P. Energy dissipation in shear driven turbulence. *Phys Rev Lett,* 1992, 69: 1648～1651

9 Doering C R, Constantin P. Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows: shear flow. *Phys Rev E,* 1994, 49: 4087～4099

10 Constantin P, Doering C R. Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows: II. Channel flow Phys Rev E, 1995, 51: 3192～3198

11 Doering C R, Constantin P. Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows: III. Convection Phys Rev E, 1996, 53: 5957～5981

12 Hopf E. Statistical hydrodynamics and functional calculus. *J Rational Mech Anal,* 1952, 1: 87~123
13 Kerswell R R. Unification of variational principles for turbulent shear flows: the background method of Doering-constantin and howard-busse's mean-fluctuation formulation. *Physica D,* 1998, 121: 175~192
14 Kerswell R R. New results in the variational approach to turbulent Boussinesq convection. *Phys Fluids,* 2001, 13:192~209
15 Frisch U. Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
16 Gebhardt T, Grossmann S, Holthaus M, Lohden M. Rigorous bound on the plane shear flow dissipation rate. *Phys Rev E,* 1995, 51: 360~365
17 Nicodemus R, Grossmann S, Holthaus M. Variational bounds on energy dissipation in plane Couette flow. *Phys Rev E,* 1997, 56: 6774~6786
18 Nicodemus R, Grossmann S, Holthaus M. Improved variational principle for bounds on energy dissipation in turblulent shear flow. *Physica D,* 1997, 101: 178~190
19 Nicodemus R, Grossmann S, Holthaus M. The background flow method. Part 1. Constructive approach to bounds on energy dissipation. *J Fluid Mech,* 1998, 363: 281~300
20 Nicodemus R, Grossmann S, Holthaus M. The background flow method. Part 2. Asymptotic theory on dissipation bounds. *J Fluid Mech,* 1998, 363: 301~323
21 Plasting S C, Kerswell R R. Improved upper bounds on energy dissipation in plane Couette flow: the full solution to Busse's problem and the Constantin-Doering-Hopf problem with one-dimensional background field. *J Fluid Mech,* 2003, 477: 363~379
22 Marchioro C. Remark on the energy dissipation in shear driven turbulence. *Physica D,* 1994, 74: 395~398
23 Doering C R, Spiegel E A, Worthing R A. Energy dissipation in a shear layer with suction. *Phys Fluids,* 2000, 12: 1955~1968
24 Wei Q. Variational bounds on energy dissipation in a incompressible channel flow with uniform wall injection and suction. *Acta Mechanica,* 2002, 159: 1~9
25 Chavanne X, Chillà F, Castaing B, Hébrasl B, et al. Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Benard convection. *Phys Rev Lett,* 1997, 79: 3648~3651
26 Otero J, Wittenberg R W, Worthing R A. Doering C R. Bounds on Rayleigh-Benard convection with an imposed heat flux. *J Fluid Mech,* 2003, 473: 191~199
27 Constantin P, Doering C R. Infinite Prandtl number convection. *J Statist Phys,* 1999, 94: 159~172
28 Doering C R, Constantin P. On upper bounds for infinite Prandtl number convection with or without rotation. *J Math Phys,* 2001, 42: 784~795
29 Doering C R, Constantin P. Bounds for heat transport in a porous layer. *J Fluid Mech,* 1998, 376: 263~296
30 Otero J, Dontcheva L, Johnston H, Worthing R A, et al. High-Rayleigh-number convection in a fluid-saturated porous layer. *J Fluid Mech,* 2004, 500: 263~281
31 Wei Q. Bounds on convective heat transport in a rotating porous layer. *Mech Res Com,* 2004, 31: 269~276

MATHEMATICAL ANALYSES ON GLOBAL TRANSPORT IN TURBULENT FLOW AND HEAT TRANSFER

WEI Qi†

School of Physics Science and Technology, Suzhou University, Suzhou 215006, China

Abstract Turbulence is a flow phenomenon existing widely in nature. The relation between global transport properties and the external driving forces is the focus of interest for various turbulent flows and heat transfer. The variational approach formulated by Doering and Constantin, which yields explicit bounds on global transport in turbulent flow and heat transfer directly from Navier-Stokes equations, is reviewed in this paper. The emphasis is on the mathematical analyses of explicit bounds on global transport in turbulent shear flow, channel flow and Rayleigh-Benard convection. Finally, the existing problems and the research prospects in this field are discussed.

Keywords turbulence, Navier-Stokes equations, global transport, variational approach

†E-mail: weiqi62@163.com