

自然单元法研究进展

王兆清 冯伟

上海大学上海市应用数学与力学研究所, 上海 200072

摘要 自然单元法是一种基于 Voronoi 图和 Delaunay 三角化几何结构, 以自然邻点插值为试函数的一种新型数值方法. 其既具有无网格方法和经典有限元方法的优点, 又克服了两者的某些缺陷, 是一种发展前景广阔的求解微分方程的数值方法. 自然单元法的形函数满足插值性质, 可以像有限元法一样直接施加本质边界条件, 不存在基于移动最小二乘拟合的无网格方法不能直接施加本质边界条件的难题. 由于自然单元法是无网格方法, 可以方便处理有限元方法较难处理的一些问题, 例如移动边界和大变形等问题. 自然单元法与其他数值方法的最根本区别在于其插值格式的不同. 将自然邻点插值用于 Galerkin 过程, 就得到基于 Voronoi 结构的自然单元 Galerkin 法. 自然邻点插值有自然邻点 Sibson 插值和 Laplace 插值 (非 Sibson 插值) 两种. Laplace 插值比 Sibson 插值在计算上要简单的多, 并且不论对凸的或非凸的区域都能精确施加本质边界条件. 以 Laplace 插值为试函数的自然单元法在数值实施上比以 Sibson 插值为试函数的自然单元法简单. 本文对基于 Voronoi 结构的自然邻点插值和自然单元法的基本思想作了介绍, 综述了国内外关于自然单元法的研究成果, 总结了自然单元法的优点和尚需解决的问题.

关键词 Voronoi 图, Delaunay 三角化, 自然邻点插值, 自然单元法

1 引言

经典的求解弹性力学微分方程的数值方法主要有: 有限元法 (FEM)^[1,2], 有限差分法 (FDM)^[3] 和边界元法 (BEM)^[4] 等. 特别是有限元方法在力学及工程技术的计算中发挥着重要的作用^[5,6], 其数学理论基础和误差估计理论发展得十分成熟, 并有许多成熟的商业软件可以利用. 由于有限元法、有限差分法依赖于求解区域的网格划分, 使得其在裂纹扩展、大变形和移动相边界等问题的处理上, 必须进行网格重构, 耗费大量的人力和物力^[7]. 为克服网格重构这一困难, 一些新的数值方法应运而生, 例如无网格 Galerkin 法等各种无网格方法^[8~13] 和主要应用于岩石力学的流形方法^[14]. 尽管无网格方法可以克服有限元法依赖网格的缺点, 但是无网格方法的最大缺陷是计算量巨大^[11]. 一些采用移动最小二乘法逼近的无网格方法, 由于形函数不满足插值性质, 造成本质边界条件施加的困难^[15,16].

自然单元法 (natural element method, NEM) 是

近 10 年发展起来的一种求解微分方程的新型数值方法, 由 J. Braun 和 M. Sambridge 于 1995 年首先提出并命名^[17]. 自然单元法是基于给定节点的 Voronoi 结构, 以自然邻点插值作为近似函数的 Galerkin 方法. 其既具有无网格方法和有限元法的优点, 又克服了二者的不足, 是一种发展前景广阔的求解力学和其它工程技术中偏微分方程的数值方法.

2 Voronoi 图与 Delaunay 三角化

Voronoi 图 (Voronoi diagram) 及其对偶 Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 的概念来自于计算几何, 是由一组不规则点定义的最基本的几何结构. Voronoi 图的一般数学定义为^[18]:

设 $S = \{p, q, r, \dots\}$ 为任意 R^d 空间的一组不同节点集合, 对于 $p, q \in R^d$, 记 $d(p, q)$ 为 p, q 两点的欧氏距离, 记 \overline{pq} 为 p, q 两点间的线段, 集合 A 的闭包记作 \bar{A} . 对于任意的 $p, q \in S$

$$B(p, q) = \{x \in R^d | d(x, p) = d(x, q)\} \quad (1)$$

为 \overline{pq} 的垂直平分(超)平面. $B(p, q)$ 将空间分成包含节点 p 的半空间

$$D(p, q) = \{x \in R^d | d(x, p) < d(x, q)\} \quad (2)$$

和包含节点 q 的半空间

$$D(q, p) = \{x \in R^d | d(x, q) < d(x, p)\} \quad (3)$$

称 $\bigcap_{q \in S, q \neq p} D(p, q)$ 为对应于集合 S 的节点 p 的 Voronoi 单胞 (Voronoi cell), 记作 $VR(p, S)$. 称 $V(S)$ 为集合 S 的 Voronoi 图, 其中

$$V(S) = \bigcup_{p, q \in S, p \neq q} \overline{VR(p, S)} \cap \overline{VR(q, S)} \quad (4)$$

以上定义的为一阶 Voronoi 图, 类似地可以定义高阶 Voronoi 图.

在二维空间, 由平面上给定的 n 个离散节点集合 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 做任意两节点 $x_i, x_j (i \neq j)$ 的垂直平分线, 该垂直平分线将平面域分成两个分别包含节点 $x_i, x_j (i \neq j)$ 半平面, 包含节点 x_i 所有半平面的交集构成一个凸多边形区域 (封闭的或无界的),

即为对应节点 x_i 的 Voronoi 单胞 (又可称为 Voronoi 多边形), 如图 1(a) 所示. 对应于节点 x_i 的 Voronoi 单胞也可等价定义为

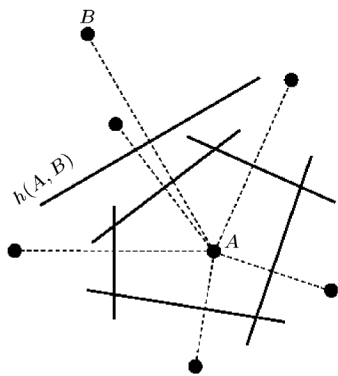
$$T_i = \{x \in R^2 | d(x, x_i) < d(x, x_j), \forall i \neq j\} \quad (5)$$

通俗地讲, 对应于集合 S 的节点 p 的 Voronoi 单胞是由相比其他节点, 距离节点 p 最近的点的集合.

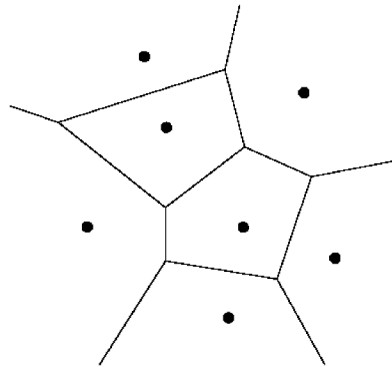
两个 Voronoi 单胞的公共边界, 称作 Voronoi 边. Voronoi 边的端点, 称作 Voronoi 顶点. Voronoi 顶点是 3 个或 3 个以上 Voronoi 单胞的公共边界.

由集合 S 的所有 Voronoi 边构成的图形, 称作 Voronoi 图. 参见图 1(b).

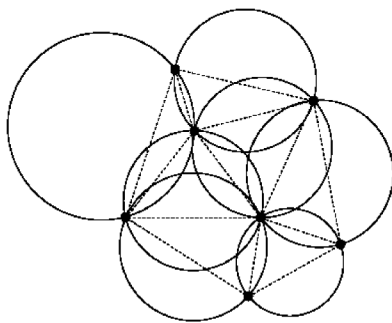
将具有共同边界的 Voronoi 单胞对应的节点连接所得到的三角形, 称作 Delaunay 三角形. 所得到的三角形网格称为 Delaunay 镶嵌 (三角化) (Delaunay tessellation or triangulation). Delaunay 三角化是 Voronoi 图的对偶, 其含义是, 两个节点具有一条 Delaunay 边当且仅当这两个节点的 Voronoi 单胞具有共同 Voronoi 边. 参见图 1(c), 图 1(d).



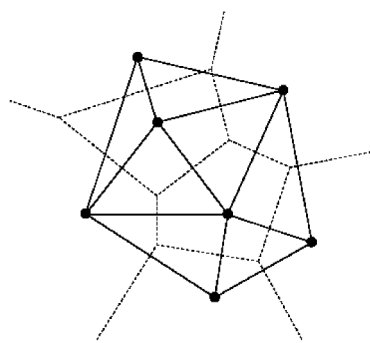
(a) 节点 A 的 Voronoi 单胞



(b) 7 节点 Voronoi 图



(c) Delaunay 外接圆



(d) Delaunay 三角化

图 1 Voronoi 图和 Delaunay 三角化

Delaunay 三角化有两个重要的性质, 其在自然单元法中具有重要的作用: (1) 最大最小角性质: 在给定节点所有可能生成的三角形中, Delaunay 三角形最大化最小角; (2) 空外接圆性质: 若 $DT(p, q, r)$ 是节点集合 S 的一个 Delaunay 三角形, 则 $DT(p, q, r)$ 的外接圆内部不含有集合 S 的其他点.

一个节点集的 Voronoi 图是唯一的, 但是其对偶 Delaunay 镶嵌是不唯一的 (例如, 4 个节点共有一个 Delaunay 圆形成一个四边形, 其任意对角线划分的三角形都是合法的 Delaunay 三角形).

对于 Voronoi 图与 Delaunay 三角化的详细性质和有关算法, 可参见文献 [19~30].

3 自然邻点插值

自然邻点插值 (natural neighbor interpolation) 是自然单元法的核心. 对于某个节点 x 而言, 其自然邻点是指那些与包含节点 x 的 Voronoi 单胞相邻的 Voronoi 单胞所包含的节点. 二维的情形如图 2(a)

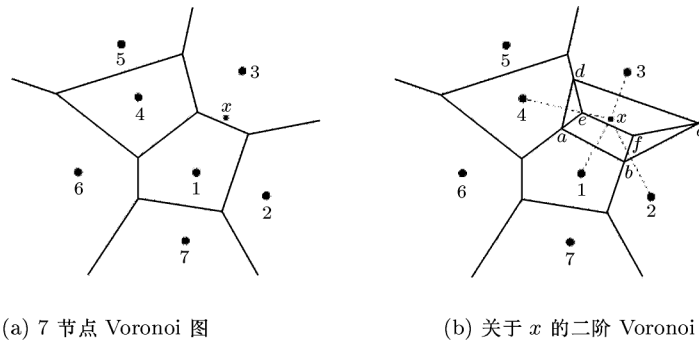


图 2

3.1 Sibson 插值

Sibson 插值是利用自然邻点坐标为插值基函数的自然邻点插值. 对于平面节点集合

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$$

加入新的节点 x 后, 可以得到集合 $S \cup \{x\}$ 的 Voronoi 图. 集合 S 的 Voronoi 单胞与集合 $S \cup \{x\}$ 的 Voronoi 单胞重叠的部分形成节点 x 的二阶 Voronoi 单胞 (参考图 2(b) 中的多边形 $abcd$).

二阶 Voronoi 单胞 T_{IJ} 的数学定义为

$$T_{IJ} = \{x \in R^2 | d(x, x_I) < d(x, x_J) < d(x, x_K), \forall K \neq I, J\} \quad (7)$$

Sibson 利用二阶 Voronoi 单胞引入自然邻点坐

标 [31], 节点 1 的自然邻点为节点 2, 3, 4, 6, 7. 在实际计算中, 可以利用 Delaunay 三角化的空外接圆性质, 确定节点 x 的自然邻点. 如果节点 x 落入 Delaunay 三角形 $DT(p, q, r)$ 的外接圆内, 则 p, q, r 为节点 x 的自然邻点. 根据自然邻点的概念, 可以构造一种局部插值格式

$$f(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) f_I \quad (6)$$

这里, $f(x)$ 是待插值点 x 的物理量, I 是点 x 的自然邻点的序号, n 是点 x 自然邻点的个数, f_I 是自然邻点 I 的物理量值, $\phi_I(x)$ 是对应节点 I 的插值基函数 (形函数), 这就是自然邻点插值. 不同的插值基函数决定不同的自然邻点插值. 自然邻点插值使用的自然邻点坐标的概念, 是基于 Voronoi 图和 Delaunay 三角化的一个几何概念, 最早由 Sibson 于 1980 年引入 [32], 并广泛应用于计算几何、图像处理 and 地理信息系统等领域. 按插值基函数的不同, 自然邻点插值可分为 Sibson 插值和 Laplace 插值 [33].

标的概念 [32]. 令 $\kappa(x)$ 和 $\kappa_I(x)$ 分别为 Voronoi 单胞 T_x 和 T_{xI} 的 Lebesgue 测度 (在一维、二维和三维中分别为长度、面积和体积), 在二维空间, 记 $A(x) = \kappa(x)$, $A_I(x) = \kappa_I(x)$. 节点 x 对应于第 I 个自然邻点的自然邻点坐标, 定义为 Voronoi 单胞 T_{xI} 和 T_x 的面积之比

$$\phi_I(x) = \frac{A_I(x)}{A(x)}, \quad A(x) = \sum_{J=1}^n A_J(x) \quad (8)$$

这里 I 从 1 到 n , n 为节点 x 的自然邻点数量. 例如在图 2 中, $A_3(x)$ 为四边形 $cdef$ 的面积, $A(x)$ 为四边形 $abcd$ 的面积.

利用自然邻点坐标 $\phi_I(x)$, Sibson 插值的插值格式为

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) u_I \quad (9)$$

其中, $\phi_I(x)$ 也称为自然邻点形函数 (natural neighbor shape function).

Sibson 自然邻点形函数的性质:

(1) 由自然邻点形函数的定义, 显然有

$$0 \leq \phi_I(x) \leq 1, \quad \phi_I(x_I) = \delta_{IJ}$$

(2) 满足单位分解性质, 即

$$\sum_{I=1}^n \phi_I(x) = 1$$

(3) 线性完备性

$$x = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) x_I$$

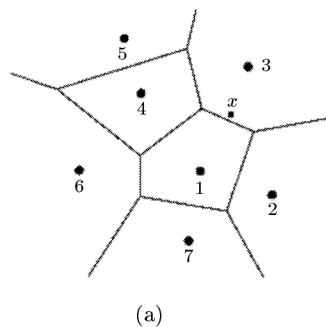
(4) 光滑性: 自然邻点形函数在除节点外的区域是 C^∞ 的, 在节点处是 C^0 的.

(5) 在凸区域的边界上, Sibson 插值是线性精确的.

以上介绍的 Sibson 插值及其形函数的性质, 可以推广到任意维空间.

3.2 Laplace 插值

Laplace 插值由 Belikov 等^[34~36] 以及 Hiyoshi 和 Sugihara^[37~40] 先后提出. Belikov 等将其命名为非 Sibson 插值, Hiyoshi 和 Sugihara 发现该插值与 Laplace 方程密切相关, 将其命名为 Laplace 插值. 这里我们采用后者的命名.



对于两个 Voronoi 单胞 T_I, T_J , 定义

$$L_{IJ} = \{x \in \bar{T}_I \cap \bar{T}_J, I \neq J\}$$

$\bar{T}_I = T_I \cup \partial T_I$ 为集合 T_I 的闭包. 如果 $d(x_I, x_J) \neq 0$, 则有

$$\sum_{J \neq I} \frac{|L_{IJ}| x_J}{d(x_I, x_J)} = x \left[\sum_{J \neq I} \frac{|L_{IJ}|}{d(x_I, x_J)} \right] \quad (10)$$

利用以上记号, Laplace 插值形函数定义为

$$\phi_I(x) = \frac{|L_{xI}|/d(x, x_I)}{\sum_{J=1}^n |L_{xJ}|/d(x, x_J)} \quad (11)$$

对于二维空间, Laplace 插值形函数的形式为

$$\phi_I(x) = \frac{\alpha_I(x)}{\sum_{J=1}^n \alpha_J(x)}, \quad \alpha_J(x) = \frac{s_I(x)}{h_I(x)} \quad (12)$$

其中, $s_I(x)$ 是与节点 I 关联的 Voronoi 边的长度, $h_I(x)$ 是插值点 x 到节点 I 的 Voronoi 边的垂直距离 (图 3).

Laplace 插值形函数满足 Sibson 插值形函数的性质 (1)~(3), (5).

Laplace 和 Sibson 插值形函数的关键区别在于其光滑性. Sibson 插值形函数在除节点外的区域是 C^∞ 的, 在节点处是 C^0 的; 然而 Laplace 插值形函数在节点以及其 Delaunay 圆周上都是 C^0 的^[37]. 另外, Sibson 插值只适用于凸区域, Laplace 插值对于非凸区域边界上插值也是线性精确的^[33].

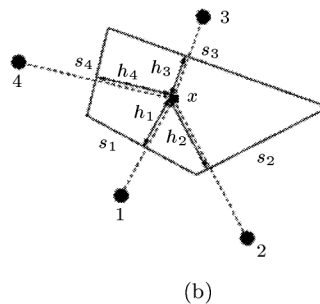


图 3 Laplace 插值

3.3 自然邻点插值的研究现状

Sibson 插值形函数和 Laplace 插值形函数具有相同的紧支集 (图 4)^[41].

Sibson 插值需要构造二阶 Voronoi 图, 而 Laplace 插值利用 Voronoi 单胞的边长和点到

Voronoi 边的距离构造插值基函数, 使得 Laplace 插值的计算比 Sibson 插值要大为简化, 在三维空间尤为突出. Sibson 插值在凸区域的边界是线性精确的, 但是对于凹区域的边界, 插值是不精确的. 然而 Laplace 插值则没有这个限制, 因此采用 Laplace 插

值, 可以准确地施加本质边界条件.

1997 年 Belikov 及其合作者^[34~36]从数据近似和偏微分方程的角度提出新的插值形函数, 命名为非

Sibson 插值, 并详细讨论了该插值格式的相关性质, 给出了许多重要的结论.

1999 年 Sugihara 和 Hiyoshi^[33,37~40]从计算几

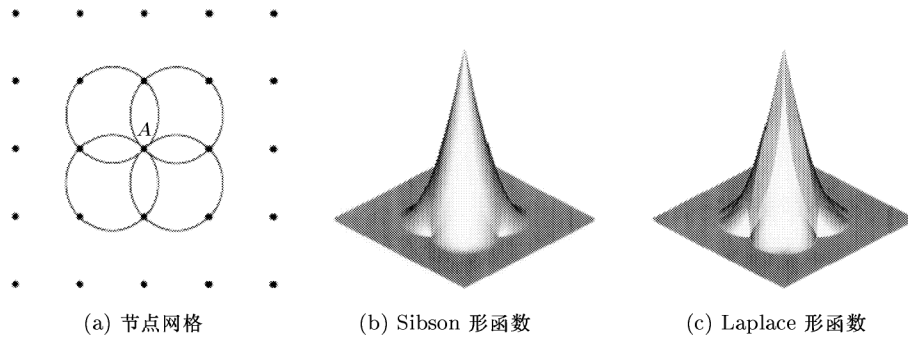


图 4 Sibson 和 Laplace 形函数

何的角度提出了与 Belikov 等形式相同的插值形函数, 采用 Belikov 不同的方法证明 Laplace 插值形函数的性质. 在文 [37] 中改进了 Laplace 插值在 Delaunay 球上的连续性; 在文 [38] 中将 Laplace 插值推广到任意维空间和曲面上的连续分布数据; 在文 [39] 中将 Laplace 插值推广到基于线段 Voronoi 图插值; 在文 [40] 中将自然邻点的概念推广到星形邻点 (star-shape neighbor), 给出了基于星形邻点的插值格式, 其形式与 Laplace 插值格式完全相同, 其优点在于即使节点集合的 Voronoi 图的构造是不准确的, 星形邻点的插值格式依然是有效的.

Sukumar 等^[31,41~48]对 Sibson 和 Laplace 插值的形函数及其导数的性质和数值计算方法作了详细的研究, 给出了形函数及其导数的计算公式和程序伪码. Farin^[49]将 Sibson 的 C^0 自然邻点插值形函数嵌入 Bernstein-Bezier 多项式, 构造出 C^1 插值格式; Gross 和 Farin^[50]将 Sibson 插值推广到一组函数曲线的插值. Boissonnat 等^[51,52]提出曲面上的自然邻点坐标, 并应用于光滑表面的重构. Anton 等^[53]将自然邻点插值应用于二维图像的重构. Watson 等^[54,55]提出了 N 维球面上的自然邻点插值. Owens^[56]研究了自然邻点插值在三维问题的算法. Amidror^[57]对散乱数据插值的各种方法: 基于三角形的各种插值法、逆距离加权插值法、半径基函数法和自然邻点插值法作了概述, 并对各种插值方法的优缺点作了评论. Meijering^[58]对插值理论的发展历史作了研究, 强调了中国古代科学家在插值理论发展中的贡献, 该文附有 358 篇参考文献. Brown^[59]给出了通过加权重心坐标函数构造平面散乱点的坐标系的方法, 并证明在 3 个自然邻点的情况下, Sibson

自然邻点坐标等价于三角形的重心坐标.

总之, 自然邻点插值始于散乱数据插值的研究, 目前在计算机几何、图像处理、地理信息系统、数学地质、偏微分方程求解和力学等科学领域发挥着重要作用.

4 自然单元法

Braun 与 Sambridge^[17]1995 年在 Nature 上发表的《A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids》一文, 是自然单元法研究的奠基性文献, 第一次提出自然单元法 (natural element method) 的概念. 采用点 x 的自然邻点坐标 $N_I(x)$ 作为插值基函数, 首次将自然邻点插值用于偏微分方程的数值求解.

自然单元法根据不同研究者的喜好, 又有自然邻点有限元法 (natural neighbor finite elements method)^[31]的名称. 简单地说, 自然单元法是基于 Voronoi 图和 Delaunay 三角化, 以自然邻点插值作为试函数的求解偏微分方程的数值方法.

4.1 自然单元法的基本原理

弹性力学基本方程为一偏微分方程组

$$\begin{aligned} \sigma_{j,i,j} + b_i &= 0 & \text{in } \Omega \\ u_i &= \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_u \\ t_i &= \sigma_{j,i} n_j = \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_t \end{aligned} \quad (13)$$

其相应的变分弱形式为: 求 $u \in V$, 使得

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (14)$$

其中, \mathbf{u} 为位移试函数, \mathbf{v} 为允许位移函数, V, V_0 分别为试函数空间和检验函数空间.

Galerkin 弱形式的近似形式为: 求 $\mathbf{u}^h \in V^h \subset V$, 使得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) d\Omega = \\ \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \\ \forall \mathbf{v}^h \in V_0^h \subset V_0 \end{aligned} \quad (15)$$

其中, \mathbf{u}^h 为位移试函数, \mathbf{v}^h 为允许位移函数, V^h, V_0^h 为 V, V_0 的有限维子空间. 在具体的求解过程中, 试函数空间和检验函数空间可以为相同的函数空间, 也可以为不同的函数空间.

利用自然单元法求解弹性力学问题的基本过程为 [31]:

(1) 在求解区域和边界上任意选取若干节点, 计算由这些节点生成的 Voronoi 图和 Delaunay 三角化网格;

(2) 根据步骤 (1) 的结果, 计算插值点的自然邻点并计算自然邻点坐标, 构造插值函数

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{v}^h = \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{v}_i$$

其中 $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ 为函数在节点处的值;

(3) 将插值函数代入变分离散形式, 得到一个线性代数方程组并求解之.

4.2 自然单元法的研究进展

自 1995 年 Braun 和 Sambridge^[17] 提出自然单元法以来, 以 Voronoi 图为几何基础的数值方法在国内外得到极大的关注. 许多学者开展研究, 并在不同的工程技术领域得到一定的应用.

Sambridge 和 Braun 等将基于 Sibson 插值的自然单元法应用于求解基于高度不规则网格的偏微分方程^[17], 并应用于地球物理的研究^[60]; 在文 [61] 中, 研究了自然邻点插值在三维空间的数值计算方法, 并指出了自然邻点插值可应用于有限元法、地形数据处理等领域.

Sukumar 等在文 [31,41, 42] 中把 Sibson 插值格式的自然单元法应用于二维弹性力学问题的研究, 通过标准的 Galerkin 过程得到离散的线性方程组, 给出了形函数及其导数的计算方法和丰富的算例, 并

对在材料不连续模型和非凸体 (存在裂纹) 中, 自然单元法的应用方式作了详细的讨论. 在文 [43] 中通过将 Sibson 自然邻点坐标嵌入 Bernstein-Bezier 多项式, 构造出具有 C^1 的自然邻点插值, 通过该插值格式插值节点的位移及其导数, 进而应用于求解四阶偏微分方程. 在文 [44] 中利用 Laplace 插值格式的 Galerkin 过程, 求解线弹性力学问题的椭圆型偏微分方程; Laplace 插值的优点在于其计算效率高于 Sibson 插值, 并且对于凸的和非凸的区域都能准确地施加本质边界条件; 基于 Laplace 插值的自然单元法可以和线性有限元法实现无缝耦合, 进而发挥各自的优势, 方便求解一些复杂问题.

蔡永昌、朱合华、王建华基于自然邻点近似位移函数提出了一种用于求解弹性力学平面问题的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法^[62], 该方法用加权残数法推导控制方程, 采用的是 Sibson 插值格式, 得到的系统矩阵是带状稀疏的.

朱怀球、吴江航^[63] 对 Sibson 插值基函数的性质进行了研究, 给出了基函数的一阶导数的一种数学表达式及其数学性质, 并将其应用于计算流体力学的研究中.

Cueto 等^[64~67] 研究了自然单元法中本质边界条件的施加方法. 在文 [67] 中对自然单元 Galerkin 法的研究进展作了综述, 描述了自然单元 Galerkin 法的基本理论和数值计算方法, 给出了其在固体力学和流体力学中应用的算例.

最近, Sukumar^[47] 将 Voronoi 单胞和自然邻点插值的思想应用于求解在任意网格上的扩散方程的有限差分方法, 提出了 Voronoi 单胞有限差分法 (voronoi cell finite difference method).

4.3 自然单元法、有限元法和无网格 Galerkin 方法的比较^[31,41~46]

有限元法 (FEM) 在每个单元上构造局部插值, 大多数无网格方法的局部近似是基于具有紧支集的加权函数, 例如移动最小二乘近似. 自然单元法 (NEM) 的局部插值是基于节点的 Voronoi 结构. 三者的比较如下:

(1) 自然单元法和有限元法的形函数具有相似的性质, 在一维情况下两者是相同的, 其插值特点使得本质边界条件的施加非常方便. 无网格 Galerkin 方法 (EFG) 的试函数不是插值函数, 因此在满足本质边界条件时, 需要运用 Lagrange 乘子法或与有限元法耦合使用.

(2) 有限元法和自然单元法具有相似的网格结构(三角化网格), 无网格方法的精度依赖于节点的分布和具有紧支集的加权函数.

(3) 3 个方法的插值 / 近似函数都具有局部特性.

(4) 有限元法采用多项式作为试函数, 其弱形式在整个区域上积分, 因此我们可以得到积分的精确估计(在机器精度和截断误差范围内); 与此相反, 自然单元法和无网格法的试函数一般不是多项式, 因此数值积分成为一大问题.

(5) 无网格法容易构造高阶的试函数; 传统的有限元是 C^0 的; 自然单元法 (Sibson 插值格式) 的试函数除在节点处是 C^0 的外, 其它的地方是 C^∞ 的.

计算代价是数值方法的可行性和可用性的重要因素. 有限元法除了其良好的局部特性外, 计算速度快使其具有极大的吸引力. 无网格法的计算量远大于有限元法. 自然单元法的关键计算量在: (a) 节点 Voronoi 图的计算; (b) 自然邻点的搜索.

5 结论

自然单元法是一种基于 Voronoi 图和 Delaunay 三角化几何结构, 以自然邻点插值为试函数的一种新型求解偏微分方程的数值方法. 自然单元法的形函数满足插值性质, 可以像有限元法一样直接施加本质边界条件, 不存在基于移动最小二乘拟合的无网格方法不能直接施加本质边界条件的难题; 由于自然单元法是无网格方法, 可以方便处理有限元方法较难处理的一些问题, 例如复杂几何形状和裂纹扩展等问题. 因此自然单元法既具有有限元法和无网格法的优点, 又克服了两者的不足. 自然单元法与其他数值方法的最根本区别在于其插值格式的不同. 将自然邻点插值用于 Galerkin 过程, 就得到基于 Voronoi 结构的自然单元 Galerkin 法.

传统的自然单元法是以 Sibson 插值为近似函数的, Laplace 插值比 Sibson 插值在计算上要简单的多, 并且不论对凸的或非凸的区域都能精确施加本质边界条件, 其在数值计算中的应用应得到更多的关注.

当前自然单元法的研究和应用主要集中在二维问题, 三维问题研究的较少. 理论上讲, 将其推广到三维应当是自然的事情, 但是在三维空间, 区域的三角化(四面体) 要比二维空间复杂的多, 并且在三维问题中, 区域的四面体化和自然邻点的寻找是相当花

费时间的, 发展并行算法, 减少运算时间, 是一个需要关注的问题.

参考文献

- 1 李开泰, 黄艾香, 黄庆怀. 有限元方法及其应用. 西安: 西安交通大学出版社, 1984
- 2 陈传森, 黄云清. 有限元高精度理论. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1995
- 3 Pagano N J. Interlaminar Response of Composite Material. North-Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1989
- 4 嵇醒, 臧跃龙, 程玉民. 边界元法进展及通用程序. 上海: 同济大学出版社, 1997
- 5 钱伟长, 黄黔, 冯伟. 对称复合材料层合板弯曲的三维数值分析. 应用数学和力学, 1994, 15(1): 1~6
- 6 钱伟长, 黄黔, 冯伟. 复合材料对称层合板单向拉伸与面内剪切下的三维应力分析. 应用数学和力学, 1994, 15(2): 95~103
- 7 Armando Duarte C. A review of some meshless methods to solve partial differential equations. TICAM Report 95-06
- 8 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. Meshless methods: An overview and recent developments. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1994, 37: 3~47
- 9 宋康祖, 陆明万, 张雄. 固体力学中的无网格方法. 力学进展, 2000, 30(3): 55~65
- 10 周维垣, 寇晓东. 无单元法及其工程应用. 力学学报, 1998, 30(2): 193~201
- 11 曹国金, 姜弘道. 无单元法研究和应用现状及动态. 力学进展, 2002, 32(4): 526~534
- 12 龙述尧, 陈莘莘. 弹塑性力学问题的无单元迦辽金法. 工程力学, 2003, 20(2): 66~70
- 13 程玉民, 陈美娟. 弹性力学的一种边界无单元法. 力学学报, 2003, 35(2): 181~186
- 14 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997
- 15 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229~256
- 16 Krongauz Y, Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 131: 133~145
- 17 Braum J, Sambridge M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. *Nature*, 1995, 376: 655~660
- 18 Franz Aurenhammer, Rolf Klein. Voronoi diagram. In: Jörg-Rüdiger Sack, Jorge Urrutia eds. Handbook of Computational Geometry, B.V. North-Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 2000. 201~290.
- 19 Green P J, Sibson R R. Computing dirichlet tessellations in the plane. *The Computer Journal*, 1978, 21: 168~173
- 20 Peter Su, Robert L Scot Drysdale. A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms. *Computational Geometry*, 1997, 7: 361~385
- 21 Karoly bezdek. A lower bound for the mean width of Voronoi polyhedra of unit ball packings in E^3 . *Arch Math*, 2000, 74: 392~400
- 22 Kenji Shimada, Gossard David C. Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surface for finite el-

- ement analysis. *Computer Aided Geometric Design*, 1998, 15: 199~222
- 23 Marc Vigo, Nuria Pla. Computing directional constrained Delaunay triangulations. *Computers & Graphics*, 2000, 24: 181~190
- 24 Itai Benjamini, Oded Schramm. Conformal invariance of Voronoi percolation. *Commun Math Phys*, 1998, 197: 75~107
- 25 Seed G M. Delaunay and Voronoi tessellations and minimal simple cycle in triangular region and regular-3 undirected planar graphs. *Advances Engineering Software*, 2001, 32: 339~351
- 26 Monique Laurent. Delaunay transformations of a Delaunay polytope. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1996, 5: 37~46
- 27 Golias N A, Dutton R W. Delaunay triangulation and 3D adaptive mesh generation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997, 25: 331~341
- 28 Mir Abolfazl Mostafavi, Christopher Gold, Maciej Dakowicz. Delete and insert operations in Voronoi/Delaunay methods and applications. *Computers & Geosciences*, 2003, 29: 523~530
- 29 Marc Vigo, Núria Pla, Josep Cotrina. Regular triangulations of dynamic sets of points. *Computer Aided Geometric Design*, 2002 19: 127~149
- 30 Indermitte C, Liebling Th M, Troyanov M, Clemencon H. Voronoi diagrams on piecewise flat surfaces and an application to biological growth. *Theoretical Computer Science*, 2001, 263: 263~274
- 31 Sukumar N. The natural element method in Solid mechanics: [dissertation]. Evanston, Illinois: Northwestern University, June 1998
- 32 Sibson R. A vector identity for the Dirichlet tessellation. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1980, 87: 151~155
- 33 Hisamoto Hiyoshi. Study on interpolation based on Voronoi diagrams: [dissertation]. Tokyo: University of Tokyo, 2000
- 34 Belikov V V, Ivanov V D, Kontorovich V K, et al. The non-Sibson interpolation: A new method of interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, 37(1): 9~15
- 35 Belikov V V, Semenov A Y. Non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space and adaptive isolines generation. *Applied Numerical Mathematics*, 2000, 32: 371~387
- 36 Semenov A Y, Belikov V V. New non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space. In: Sydow A, ed. 15th IMACS World Congress. Vol. 2, Numerical Mathematics, Wissen. Techn. Verlag, Berlin, 1997. 237~242
- 37 Hisamoto Hiyoshi, Kokichi Sugihara. Improving continuity of Voronoi-based interpolation over Delaunay spheres. *Computational Geometry*, 2002, 22: 167~183
- 38 Hisamoto Hiyoshi, Kokichi Sugihara. Two generalizations of an interpolant based Voronoi diagrams. *International Journal of Shape Modeling*, 1999, 5(2): 219~231
- 39 Hisamoto Hiyoshi, Kokichi Sugihara. An interpolant based on line segment Voronoi diagrams. METR 99-02, 1999
- 40 Kokichi Sugihara. Surface interpolation based on new local coordinates. *Computer-Aided Design*, 1999, 31: 51~58
- 41 Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 43: 839~887
- 42 Sukumar N. Sibson and non-Sibsonian interpolations for elliptic partial differential equations. In: Bathe K J, ed. First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 2001. 1665~1667
- 43 Sukumar N, Moran B. C' natural neighbor interpolant for partial differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 1999, 15(4): 417~447
- 44 Sukumar N, Moran, B Semenov A Yu, Belikov V V. Natural neighbor Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 1~27
- 45 Sukumar N. A note on natural neighbor interpolation and the natural element method(NEM). URL: <http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku>, 1997.11
- 46 Sukumar N. Meshless methods and partition of unity finite elements. URL: <http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku>
- 47 Sukumar N. Voronoi cell finite difference method for the diffusion operator on arbitrary unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57: 1~34
- 48 Bueche D, Sukumar N, Moran B. Dispersive properties of the natural element method. *Computational Mechanics*, 2000, 25: 207~219
- 49 Farin G. Surface over Dirichlet tessellation. *Computer Aided Geometry Design*, 1990, 7: 281~292
- 50 Gross L, Farin G. A transfinite form of Sibson's interpolant. *Discrete Applied Mathematics*, 1999, 93: 33~50
- 51 Boissonnat J D, Cazals F. Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance function. *Computational Geometry*, 2002, 22: 185~203
- 52 Boissonnat J D, Cazals F. Natural neighbor coordinates of points on Surface. *Computational Geometry*. 2001, 19: 155~173
- 53 François Anton, Darka Mioc, Alain Fournier. Reconstructing 2D images with natural neighbour interpolation. *The Visual Computer*, 2001, 17: 134~146
- 54 Watson D F, Philip G M. Neighborhood-based interpolation. *Geobyte*, 1987, 2(2): 12~16
- 55 Watson D F. Natural neighbor sorting on the N-dimensional sphere. *Pattern Recognition*, 1988, 21(1), 63~67
- 56 Owens S J. An implementation of natural neighbor interpolation in three dimensions: [Master's Thesis]. Brigham: Young University, 1992
- 57 Isaac Amidror. Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems: a survey. *Journal of Electronic Imaging*, 2002, 11(2): 157~176
- 58 Erik Meijering. A chronology of interpolation: From ancient astronomy to modern signal and image processing. *Proceedings of The IEEE*, 2002, 90(3): 319~342
- 59 Brown J L. System of coordinates associated with points scattered in the plane. *Computer Aided Geometric Design*, 1997, 14: 547~559
- 60 Sambridge M, Braun J, McQueen H. Geophysical parameterization and interpolation of irregular data using natural neighbours. *Geophys J Int*, 1995, 122: 837~857

- 61 Sambridge M, Braun J, McQueen H. Computational methods for natural neighbour interpolation in two and three dimensions. In: May, Easton, eds. The Seventh Biennial Computational Techniques and Applications Conference, 1995-07-03-07, Melbourne, Australia, Singapore: World Scientific, 1986. 685~692
- 62 蔡永昌, 朱合华, 王建华. 基于 Voronoi 结构的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法. 力学学报, 2003, 35(2): 187~193
- 63 朱怀球, 吴江航. 一种基于 Voronoi Cells 的 C^∞ 插值基函数及其在计算流体力学中的若干应用. 北京大学学报 (自然科学版), 2001, 37(5): 669~678
- 64 Cueto E, Calvo B, Doblare M. Modelling three-dimensional piece-wise homogeneous domains using the α -shape-based natural element method. *Int J Numer Meth Engng*, 2002, 54: 871~897
- 65 Cueto E, Cegonino J, Calvo B, Doblare M. On the imposition of essential boundary conditions in natural neighbour Galerkin methods. *Commun Numer Meth Engng*, 2003, 19: 361~376
- 66 Cueto E, Doblare M, Gracia L. Imposing essential boundary conditions in the natural element method by means of density-scaled α -shapes. *Int J Numer Meth Engng*, 2000, 49: 519~546
- 67 Cueto E, Sukumar N, Calvo B, et al. Overview and recent advances in natural neighbour Galerkin methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2003, 10(4): 307~384

ADVANCES IN NATURAL ELEMENT METHOD

WANG Zhaoqing FENG Wei

Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China

Abstract The natural element method (NEM) is a new numerical computational method based on Voronoi diagram and Delaunay triangulation. It is a Galerkin-based meshless method that is built upon the notion of the natural neighbor interpolation. The natural element method has advantages of both finite element method and meshless method, and does not have their disadvantages. As its shape functions satisfy interpolating properties, the natural element method is similar to the finite element method and can exactly interpolate piece-wise linear boundary conditions. The meshless methods, based on moving least square approximation as trial and test functions, can always exactly reproduce essential boundary conditions. As a meshless method, the natural element method can easily treat some problems, such as moving boundary and large deformation problems, which finite element method is difficult to treat. The essential difference of the natural element method and other numerical methods is their trial and test functions. Using the natural neighbor interpolation in a Galerkin procedure, we obtain the natural element Galerkin method based on Voronoi Structure. There are two natural neighbor interpolants: natural neighbor-based Sibson interpolation and Laplace interpolation (non-Sibsonian interpolation). Laplace interpolation is easier than Sibson interpolation in computation. In its numerical implementation, the natural element method based on Laplace interpolation as trial and test functions is easier than that based on Sibson interpolation. In this paper, the basic ideas of natural neighbor-based interpolation and the natural element method based on Voronoi structure are presented. The recent advances in the natural neighbor interpolation and the natural element method are reviewed. Some problems that have to be solved for NEM in the future are discussed.

Keywords voronoi diagram, delaunay triangulation, natural neighbor interpolation, natural element method