

# 织物力学研究的新进展\*

张义同

天津大学力学系, 天津 300072

**摘要** 简要地回顾了织物力学的发展历史, 重点介绍近 10 几年来, 在服装 CAD 核心——“试衣系统”的技术需求的刺激下, 在织物悬垂、屈曲方面研究的进展. 特别是关于织物屈曲研究的开展, 涉及到了织物本构理论这个织物力学中最基础的问题, 织物细观本构理论的建立和对织物一系列屈曲现象的成功解析分析是织物力学研究的最新进展, 构成了近代织物力学的主要内容. 最后, 对今后织物力学研究的方向进行了展望.

**关键词** 织物力学, 细观本构理论, 悬垂, 屈曲, 分岔

## 1 引言

织物力学的研究始于 20 世纪 20 年代, 至今已有 80 多年的历史. 其发展大致可以分为 3 个阶段. 从 20 世纪 20 年代初到 40 年代中, 这是第一阶段, 关于纺织品的研究开始涉及其力学性质, 称为起始阶段. 第二阶段从 20 世纪 40 年代中到 80 年代末, 为发展阶段. 在这一阶段, 开始研究织物在拉伸、面内剪切、弯曲中表现出来的力学性质; 对织物的撕裂特性、拉伸强度进行理论与实验研究; 开始用织物的力学参数 (如纯弯曲、剪切、拉伸曲线等) 用作织物的手感指标 (hand evaluation); 出现了如 KES (kawabata evaluation system for fabric)<sup>[1]</sup> 和 FAST (fabric assurance by simple testing)<sup>[2]</sup> 等织物试验装置, 用于对织物进行拉伸、剪切、纯弯和表面性质等实验.

从 20 世纪 80 年代末至今, 是织物力学发展的第三个阶段, 也是织物力学发展的鼎盛时期. 这个时期的一个突出的表现是每年在《Textile Research Journal》(在美国出版) 和《Journal of Textile Institute》(在英国出版) 上发表的关于织物力学方面的论文增加很多, 90 年代的年平均发表的论文数约是 80 年代初平均数的 2~3 倍, 有时几乎成了力学专刊. 其研究领域除了第二阶段所进行的研究继续深入外, 出现了两个前沿的研究热点: 对织物悬垂 (drap-

ing) 和织物屈曲的模拟. 这是由于服装 CAD 的技术需求所带动的. 把穿在模特身上的时装用计算机逼真而精确地模拟出来 (精确到能用于服装的设计、裁剪), 用计算机为人们量体裁衣, 是人们多年梦寐以求的愿望.

要实现这一点, 必须首先能对织物的悬垂和屈曲做出精确的模拟.

1989 年, Amirbayat 等<sup>[3]</sup> 列举出了许多织物的屈曲现象, 强调了研究织物悬垂和屈曲的重要性. 与此同时, 中国织物力学界的学者也认识到了织物屈曲的重要性和屈曲分析的困难<sup>[4,5]</sup>.

10 多年过去了, 关于织物悬垂的研究发表了许多论文, 主要是采用几何非线性的板单元或壳单元和织物的线性增量正交异性本构理论, 用有限元法进行数值模拟, 取得了不小的进展.

关于织物屈曲分析的研究则取得了更重要的进展. 在织物的屈曲研究过程中发现, 若采用在模拟织物悬垂中所采用的织物的正交异性本构理论, 根本不可能模拟出织物的某些屈曲现象, 这带动和促进了织物细观本构理论的研究, 导致建立了织物的细观本构理论.

这个本构理论更好地描述了织物的力学性质, 特别是织物由于其特有的细观编织结构所具有的某些性质. 基于织物的细观本构理论, 对织物的一系列

收稿日期: 2001-04-04, 修回日期: 2002-08-06

\* 国家自然科学基金 (19772032) 资助项目

屈曲现象, 成功地进行了解析的分析, 取得了重要的成果. 这些工作奠定了近代织物力学的基础.

## 2 织物力学概要

织物力学就是固体力学的控制方程加织物的本构理论.

在织物的悬垂模拟阶段, 织物力学和正交异性复合材料薄板的理论完全相同, 边界条件则和薄板的边界条件完全相同. 织物的本构方程为

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中  $T_{ij}$  是第二皮奥拉 - 基尔霍夫应力的分量,  $E_{ij}$  是格林应变张量的分量,  $B_{ij}$  是表述织物力学性质的常数. 这就是典型的正交异性复合材料薄板的本构方程. 在织物的悬垂模拟过程中, 把方程 (1) 中的应力和应变看作应力和应变增量, 便是线性增量正交异性本构方程, 用来模拟织物在大变形中表现出来的物理非线性.

可以说, 在这个阶段及以前, 织物力学还没有自己的本构理论, 只是借用了正交异性材料的本构理论.

用这个本构理论对织物进行一般的变形计算和强度分析, 一切似乎还说得过去. 但用这个本构理论对织物进行屈曲分析时则暴露出了这个本构理论的缺陷, 这促进了织物本构理论的研究, 导致建立了反映织物细观编织结构特点的本构理论, 或称修改了的织物正交异性本构理论<sup>[6]</sup>, 其形式如下

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & -\frac{1}{4}mB_{cc} \\ B_{12} & B_{22} & -\frac{1}{4}mB_{cc} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}B_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中  $B_{cc}$  是织物纤维之间相互挤压的弹性模量,  $m = \text{sign}(E_{12})$ ,  $\text{sign}$  是通常的符号函数. 我们称  $3B_{cc}/4$  为织物的细观剪切模量.

基于新建立的织物的细观本构理论, 织物的一系列屈曲现象得到了解析的预测. 织物屈曲解析分析的理论框架如下:

(1) 基于精确的三维有限变形理论 (不采用大变形的薄板理论, 因为它是三维理论的一种近似), 不

考虑织物密度在变形中的改变, 即连续方程自动满足. 平衡方程和几何方程是熟知的, 不再列出.

(2) 将织物的二维本构方程 (2) 扩展为三维本构方程

$$\mathbf{T} = \mathbf{BE} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}mB_{cc} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}mB_{cc} \\ 0 & 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2B_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2B_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4}B_{cc} \end{bmatrix}$$

(3) 关于边界条件

(i) 在织物的上下表面, 逐点精确满足自由表面边界条件;

(ii) 在织物卸载的侧面边界, 精确满足力边界条件;

(iii) 在织物的自由侧面边界, 满足应力沿织物厚度的积分为 0. 这是一种放松了的自由侧面边界条件, 已经证明, 若 (i) 满足, 则 (iii) 可自动满足<sup>[7]</sup>.

(4) 与传统的薄板的屈曲分析不同, 在织物的屈曲分析中, 织物的临界状态被认为是有限变形状态.

## 3 织物悬垂的模拟

织物悬垂往往伴随着大转动, 位移很大, 应变比固体力学中的小变形也要大. 对织物悬垂的分析, 能得到解析解的很少, Peirce<sup>[8]</sup> 给出了单位宽度织物条悬臂梁在自重作用下弯曲的微分方程

$$\frac{d^2 \Psi}{ds^2} + \frac{wS}{B} \cos \Psi = 0$$

式中  $\Psi$  角见图 1 中所示,  $S$  是织物条悬臂梁端部到  $P$  点的长度,  $d\Psi/ds$  是悬臂梁一点处的曲率,  $B$  是

悬臂梁的弯曲刚度， $w$  是悬臂梁单位面积的重量。Peirce<sup>[8]</sup> 给出了该方程的近似解析解，它是一个级数解的有限项近似

$$\frac{B}{wl^3} = \frac{\cos \theta/2}{8 \tan \theta}$$

式中  $l$  是悬臂梁的总长度， $\theta$  是悬臂梁固支端和变形后自由端点的连线与悬臂梁初始位置 (水平线) 的夹角，见图 1 中所示。

这是织物悬垂的一个唯一的近似解析解。织物悬垂的计算主要是采用各种数值方法。Shanahan 等<sup>[9~11]</sup> 对织物不同的悬垂情形，建立变形模式，基于变分原理导出了微分方程，再用有限差分等数值方法求数值解。对织物悬垂的模拟，更多的工作是采用有限元方法。

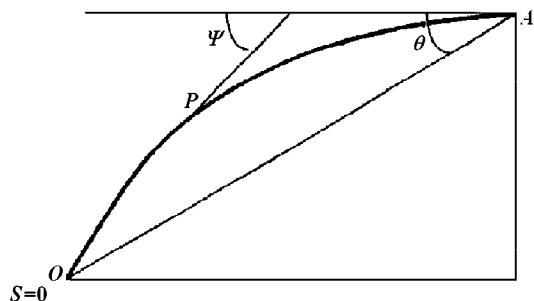


图 1 单位宽度织物条悬臂梁在自重作用下弯曲

有限元方法把在初始构型下的织物看成正交异性板，用几何非线性的平板单元或曲壳单元，对织物在自重作用下的变形进行有限元计算。模拟的对象有织物条悬臂梁的悬垂、变截面织物条悬臂梁的悬垂、方形布铺在方桌或圆桌上的悬垂、方布铺在成  $120^\circ$  相交两根圆柱上的悬垂、圆形布铺在圆桌或方桌的悬垂等。代表性的工作见文献 [12~21]。其中文献 [14, 15, 18] 是 3 篇博士学位论文，内容较为丰富和详细。Kim<sup>[14]</sup> 在模拟铺在圆桌上的织物的悬垂时遇到了屈曲问题，他根据实验观察到的屈曲模态，对织物做了同样模态的初始形状假设。这样不必进行屈曲分析，织物的悬垂模拟便可以继续进行下去。

在这个阶段，织物的悬垂模拟，实质上就是一块正交异性薄板的大变形模拟。

在这些织物悬垂的有限元模拟中，模拟的精度如何，是一个令人关心的问题。在一篇用有限元方法模拟织物悬垂的文献中，把文中的模拟结果和其它文献中的模拟结果或实验结果相比较，以说明模拟精度如何的叙述较少见到。Kim<sup>[14]</sup> 给出了他的数值结果和他的实验结果的比较，误差最高为 14%。

Hu 等<sup>[22]</sup> 也基于织物的正交异性非线性本构模型，采用大变形曲壳单元<sup>[23]</sup>、线性增量正交异性本构方程和伪弧长的算法<sup>[24~26]</sup>，对织物悬臂梁和方块织物铺在方桌面上的悬垂进行过众多算例的数值模拟。他们发现，数值计算的结果并不总是和实验的结果符合的好，多数计算结果显示织物比它实际的悬垂实验显得“刚硬”。他们那部分计算结果与实际悬垂实验结果符合不好的工作没有发表。Hu 等<sup>[22]</sup> 指出，模拟精度不高的原因之一是织物的材料常数不易测的很准。

另外，Breen 等<sup>[27]</sup> 还建议了一种“结点”模型来模拟织物的屈曲，把重量赋予给“结点”，“结点”之间通过织物的弯曲、拉压模量相联系。该方法本质上也是一种能量方法，类似于用网状单元来模拟织物的变形。

#### 4 织物屈曲分析遇到的困难

关于织物悬垂的模拟，发表了许多论文。但对屈曲的模拟却遇到了困难。这些困难不是来自屈曲数值模拟本身，因为固体力学和结构力学领域的屈曲数值分析方法 (包括临界屈曲模态分析、分岔点的判断、分岔的追踪等) 本质上对被看作为正交异性板的织物是完全适用的。这里遇到的困难，涉及到了织物力学中的一个基本问题——织物的本构模型。

织物力学界长期把织物看作是面内正交异性的，采用的是和织物增强复合材料薄板一样的本构模型。但织物的力学性质和织物增强复合材料薄板的力学性质是完全一样的吗？织物屈曲和正交异性板的屈曲完全一样吗？织物有没有什么特殊的屈曲现象是正交异性薄板没有的呢？实验告诉我们：织物在受到与经向 / 纬向成  $45^\circ$  方向的单向拉伸时，会发生明显的离面屈曲。图 2 是两端夹持的平纹织

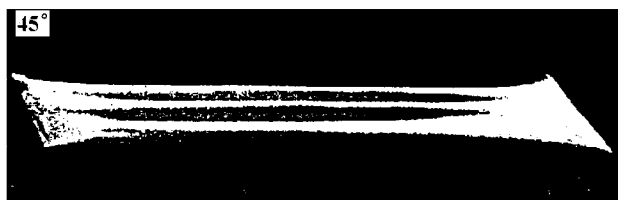


图 2 两端夹持的平纹织物在两端受与织物经向成  $45^\circ$  方向的单向拉伸时的屈曲

物在两端受与织物经向成  $45^\circ$  方向的单向拉伸时的屈曲照片。未见报道正交异性薄板会发生这样的屈曲

(以后在理论上证明了正交异性薄板不会发生这样的屈曲).

采用织物正交异性的本构模型能模拟出织物这种屈曲现象吗?若答案是“能”,则说明正交异性本构模型对织物还是可用的,至少没有到必须修改的地步;若答案是“不能”,则说明必须对织物的正交异性本构模型加以改进.答案“能”与“不能”一字之差,在这里显得十分重要.因此,对织物的这一屈曲分析,必须保证答案的精确性.作为对织物屈曲分析的起始工作,应该是理论、解析分析在前,数值模拟在后,应该采用精确的稳定性分析理论来分析织物的屈曲.

织物的变形和通常的固体力学中的板的变形相比较,要比板的变形大得多.因此,把板在临界构型看成小变形的那些屈曲分析方法对织物的屈曲分析来说便不再是合适的了.

Zhang 等<sup>[7]</sup>采用精确的三维有限变形弹性稳定性分析理论,基于织物的传统的正交异性本构模型,对织物受到与经向/纬向成 $45^\circ$ 方向的单向拉伸时的屈曲问题进行了分析.他们寻找如下形式的织物屈曲解

$$u_1 = 0, \quad u_j = H_j(kx_3)e^{ikx_2} + \text{C.C.}, \quad j = 2, 3 \quad (4)$$

式中 $i$ 是虚数单位, $k$ 是模态数,C.C.代表前一项的复共轭, $(x_1, x_2, x_3)$ 是织物质点在临界构型的坐标,坐标轴 $x_1$ 和 $x_2$ 位于织物的中面内, $x_1$ 轴和织物的经向成 $45^\circ$ , $x_3$ 轴垂直于织物的中面,拉伸沿 $x_1$ 轴方向.Zhang 等<sup>[7]</sup>得到了织物的两种可能屈曲模态.一种是弯曲模态(flexural mode),它的屈曲条件是

$$p_2(1 + \sqrt{\eta})\cosh(khp_1)\sinh(khp_2) - p_1(1 - \sqrt{\eta})\cosh(khp_2)\sinh(khp_1) = 0 \quad (5)$$

式中 $h$ 是织物厚度的一半, $p_1$ 和 $p_2$ 是与织物材料常数和 $x_2$ 方向伸长 $\lambda_2$ 有关的常数(伸长 $\lambda_2$ 与 $x_1$ 方向的拉应力唯一对应), $\eta$ 是与织物材料常数有关的常数.

另一种屈曲模态是桶形模态(barreling mode),或称拉伸模态(extensional mode).它的屈曲条件是

$$p_2(1 + \sqrt{\eta})\cosh(khp_2)\sinh(khp_1) - p_1(1 - \sqrt{\eta})\cosh(khp_1)\sinh(khp_2) = 0 \quad (6)$$

Zhang 等<sup>[7]</sup>证明了对任何 $kh \neq 0$ ,无论织物的材料常数和 $\lambda_2$ 取何值,方程(5)和(6)都没有解.

这即是说,若基于织物传统的正交异性本构理论,无论是什么织物,无论单向拉应力是多少,织物都不可能发生如式(4)的屈曲.

但是,织物的这种屈曲模态的确发生了,重复做织物这种屈曲的实验也很容易,以上证明的过程又是完全解析的,是严格的,可以怀疑的只有织物的本构模型了.即:织物传统的正交异性本构模型是否完全刻划了织物的力学性质.

织物正交异性本构模型的采用,是基于织物和织物增强复合材料薄板在宏观结构上的相似.用这种模型对织物进行应力分析和一般的变形模拟(如悬垂模拟),除了在精度上可能出现一些偏差,难以发现其他的问题.

其实,织物和织物增强复合材料薄板在细观结构上的差别是明显的.织物是编织而成的,织物在变形中,其纤维可以绕其交织点相互转动;在织物增强复合材料薄板中,织物虽也是编织而成的,但它的编织结构已被环氧树脂固化,其纤维已不能绕其交织点相互转动.这即是说,织物有细观编织结构,而细观编织结构在织物增强复合材料薄板中已不复存在.

通过对织物细观编织结构的力学分析和严格的推导,Zhang 等<sup>[6]</sup>建立了织物的细观本构模型.基于此模型,采用和前面分析中所采用的完全相同的分析过程,Zhang 等<sup>[7]</sup>证明了织物在受到与经向/纬向成 $45^\circ$ 方向的单向拉伸时,离面屈曲的发生是可能的;同时也证明了织物在受到沿经向/纬向方向的单向拉伸时,离面屈曲不可能发生,这与实验结果也是一致的.Zhang 等<sup>[28~30]</sup>还对织物受到与经向/纬向成任意角度方向的单向拉伸时的屈曲、以及受简单剪切时的屈曲等进行了分析,给出了一系列解析的结果.下面分别加以介绍.

## 5 织物细观本构理论的建立

### 5.1 织物的细观编织结构

织物有平纹织物、斜纹织物、缎纹织物等多种,各自在织法上略有差别,但它们有一个共同点:都是由纤维交叉编织而成的.

图3是平纹织物的编织结构图.它是由经向纤维和纬向纤维按图中的方式交叉编织而成的.

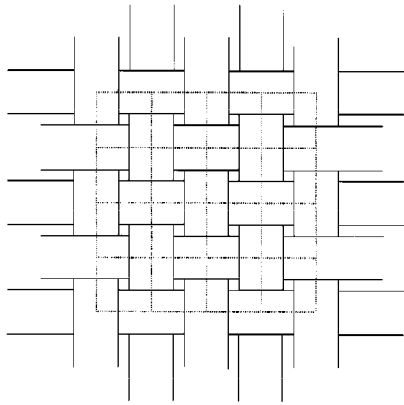
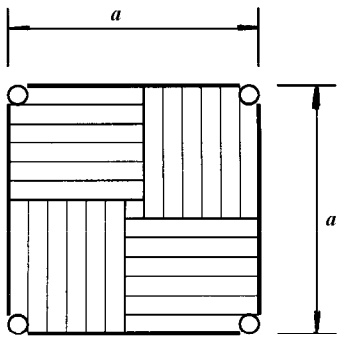
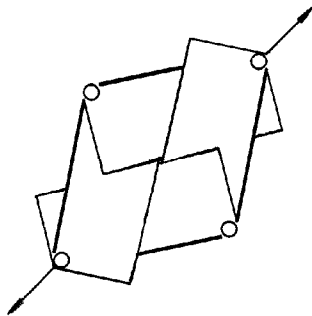


图3 平纹织物的编织结构

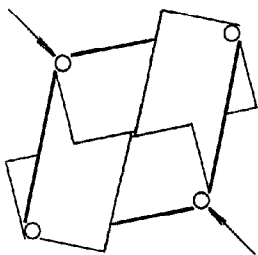
把织物最小的编织单元叫做“胞”。在图3中，“胞”已被用虚线画了出来。一个单个的胞被画在图4(a)中。在这里，这些胞被假定都是正方形的。



(a) 图3中的单个胞



(b) 胞在对角拉伸下的变形构型



(c) 胞在对角压缩下的变形构型

图4 织物胞的结构与变形

织物的纤维在它们的交叉点处可以相互转动。

虽然纤维在交叉点也可以滑动，但在交叉点的转动比较小得多。于是可以假设：在图4(a)的单个胞中，在4个交叉点A、B、C、D的每一个点处，两根纤维在织物变形中的相对滑动被忽略。这样，织物中纤维的交叉点就和桁架结构中的铰类似。为了简化我们的分析，在图4(a)中的4段纤维被认为在这A、B、C、D四个点处铰接了起来（实际是4段纤维中的每段纤维沿轴线劈开的一半在它们轴线的交点处铰接了起来，每段纤维的另一半属于相邻的另一个胞），这4段纤维的轴线相当于桁架的4根杆。

当胞受到沿织物经向/纬向的拉伸或压缩时，胞的力学行为和正交异性材料受到沿材料主轴方向的拉压时并无什么不同。不同的是受到剪切的时候。在织物增强复合材料里，纤维在其交叉点处被环氧树脂固化了，不可能绕交叉点相互转动，每一个胞都象一块固体一样承受剪切，它的剪切模量和其它模量在同一个量级。它的胞的四根纤维可以简化为一个刚架，这个刚架可以承受剪切。但是，织物胞的四根纤维构成了一个桁架，而且这个桁架是一个机构，不是一个结构。单靠这个孤零零的桁架是不能承受剪切的。织物的胞是如何承受剪切的呢？

织物胞受纯剪切，相当于沿其一对结点的拉伸和沿另一对结点的压缩，如图4(b)、4(c)所示。先看受对角拉伸的情形。在图4(b)中，四段纤维首先绕铰接点自由转动，直到纤维之间的空隙消失（纤维之间的这种空隙在织物中一般是存在的，对一些很细密的织物，空隙可能很小或不存在，但这不妨碍以下的分析）。然后，对角拉伸被纤维之间的挤压所抵抗，在纤维之间（也即胞的内部）产生了压缩（压应力），且纤维被压缩方向和胞被拉伸的方向相垂直。

再看图4(c)受对角压缩的情形。四段纤维仍首先绕铰接点自由转动，直到纤维之间的空隙消失。然后，对角压缩被纤维之间的挤压所抵抗，在纤维之间也产生了压缩（压应力），但这时织物的被压缩方向和外部压缩的方向相同。

请特别注意在以上两种情况下变形的各自的特点：

(1) 在图4(b)中，纤维在拉伸方向受到拉伸，纤维中存在拉应力；与此同时，纤维之间在沿与拉伸垂直的方向相互挤压，在纤维之间（即胞的内部）存在压应力。这样，我们得到一个重要的结论：织物由于其细观的编织结构，在图4(b)中的单向拉伸时，织物内存在一个“额外的”压应力，这个压应力在通常

的没有编织结构的固体介质中并不存在。

(2) 在图 4(c) 中, 纤维之间仅在压缩的方向受到挤压, 在纤维之间存在压应力; 在与压缩垂直的方向, 胞的变形是由桁架的整体变形产生的, 桁架的每一根杆件绕结点转动, 但每一根杆件 (纤维) 都没有轴向的变形, 于是在纤维内便没有沿纤维轴向的拉应力, 所以在图 4(c) 中胞内只有压应力, 没有拉应力。

以上两种情况相同的地方是: 织物胞都是靠纤维之间的挤压来承受外来的对角拉力或对角压力的。

以上分析说明, 织物胞实际是完全依靠纤维之间的挤压来承受剪切的, 织物的“剪切刚度”实际是织物纤维之间的压缩刚度。我们可以猜想到, 在织物新的本构方程中, 原来的织物的“剪切模量”应该被织物纤维之间的压缩模量所替代。

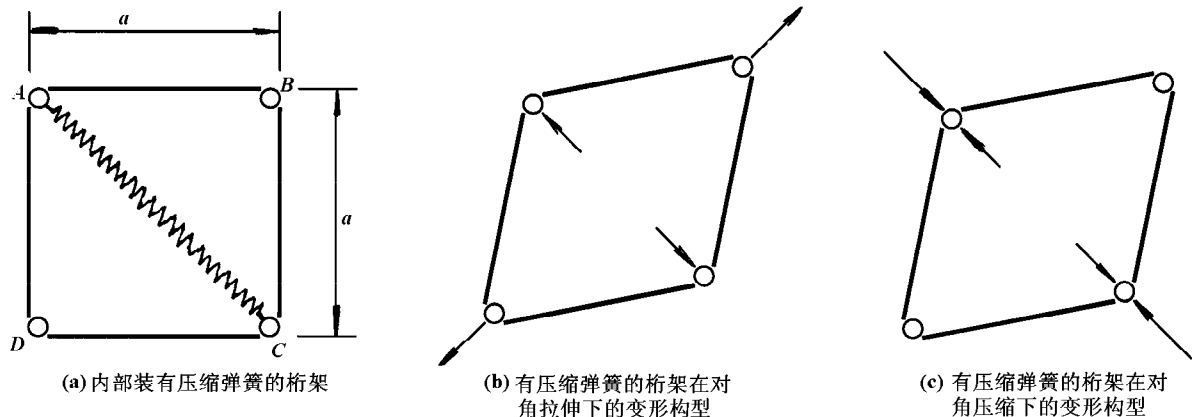


图 5 织物胞的桁架模型

为分析简单, 假定当织物胞只受剪切时, 胞的桁架的 4 根杆件被认为是刚性的, 即不考虑杆的拉伸变形。

这样的一个内部装有压缩弹簧的桁架是一个弹性静定结构。我们用它来模拟织物胞的变形。

在这个模型下, 图 4 (b) 被图 5 (b) 所代替, 画在图 5 (b) 桁架内的压力便是弹簧的压力, 桁架在一对压力和一对拉力作用下保存平衡。根据这一模型可以求出织物胞内这个“额外的”压力 (压应力)。图 4 (c) 被图 5 (c) 所代替, 画在桁架内的压力也是弹簧的压力, 外部的压力和织物胞内部的压力作用在同一对结点、同一条直线上。显然, 此时胞内的压力和外部的压力相等。

若图 5 (b) 的胞位于织物的边界上 (压力方向沿织物边界的外法线方向), 显然边界上没有压力与胞

根据织物胞的这些结构和变形特点, Zhang 等 [6] 提出了一个织物细观编织结构的力学模型。

## 5.2 织物细观编织结构的力学模型

当胞受纯剪时, 图 4 (b) 和图 4 (c) 中的胞内的压应力分布一般是不均匀的。为使分析方便, 我们假设它是均匀的, 并认为这些压应力的合力作用在桁架的  $A, C$  两个结点上。于是, 可以用一根装在  $A, C$  两点之间的只受压的弹簧 (受拉时不存在) 来模拟纤维之间的挤压, 见图 5 (a)。这根弹簧在图 5 (a) 的状态是无变形状态。我们现在的讨论是针对织物胞受正剪切的情况进行的, 当织物胞受负剪切时, 这根弹簧便装在  $B, D$  两个结点之间。

这样, 便把织物胞简化成了一个在内部一对结点之间装有压缩弹簧的四杆桁架。

内的压力相对应。这就是说, 胞内这个“额外的”压应力不在边界条件中出现。这和普通的固体介质不同, 这是织物编织结构的特点, 也是织物力学的特点。关于织物的边界条件的表述, 在后面还会给出具体的表达式。

## 5.3 织物的细观本构方程

在织物的悬垂模拟中, 广泛使用建立在第二皮奥拉-基尔霍夫应力  $T$  和格林应变  $E$  之间的本构关系, 这种关系自动满足客观性原理。这对应力和应变也是一对共轭的应力和应变。织物的细观本构关系也在  $T$  和  $E$  之间建立。以下  $T$  和  $E$  的分量是坐标系  $Ox_1x_2$  下的分量。坐标系  $Ox_1x_2$  的坐标原点在织物的中面内,  $x_1$  轴、 $x_2$  轴分别和织物的经向、纬

向平行. 织物的应力  $\mathbf{T}$  由两部分组成

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^0 + \mathbf{T}^e \quad (7)$$

Zhang 等 [6] 通过对织物胞力学模型的变形和应力平衡的严格分析, 给出了  $\mathbf{T}^0$  和  $\mathbf{T}^e$  的以下表达式

$$\mathbf{T}^0 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}B_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}mB_{cc} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}mB_{cc} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}B_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$\mathbf{T}^0$  的方程对应于正交异性材料的本构方程, 但用  $B_{cc}/2$  代替了正交异性材料本构关系式中的剪切弹性模量. 这在前面的分析中已经预料到了. 织物没有了一般固体介质所具有的剪切模量的概念, 它是靠纤维之间的挤压来承受剪切的. 我们称  $B_{cc}/2$  为织物的宏观剪切模量.

将式 (8) 和式 (9) 相加, 便得到前面所给出的织物的本构方程 (2).

特别要说明一点的是, “额外的” 应力  $\mathbf{T}^e$  只存在于织物细观编织单元——胞的内部, 这一点在图 5(b) 中看的很清楚. 这也就是说, 这个“额外的” 应力  $\mathbf{T}^e$  只存在织物内部, 不参与满足织物的应力边界条件. 织物的应力边界条件为

$$T_{AB}^0 N_B = \bar{T}_A, \quad A, B = 1, 2 \quad (10)$$

式中  $\bar{T}_A$  是作用在织物边界上的力,  $N_B$  是边界的单位外法线矢量.  $T_{AB}^0$  是  $\mathbf{T}^0$  的分量,  $\mathbf{T}^0$  的本构方程见式 (8).

## 6 织物的屈曲分析

基于织物的细观本构模型, 已经成功地分析了织物的几种屈曲现象.

### 6.1 织物在受到与经向 / 纬向成 $45^\circ$ 方向的单向拉伸时的屈曲 [7]

在这里, 基于织物的细观本构模型, 仍寻求式 (4) 的屈曲解, 为分析简单在这里假设  $B_{11} = B_{22}$ ,  $B_{12} = 0$  ( $B_{11} \neq B_{22}$ ,  $B_{12} \neq 0$  的一般性的分析由文献 [30] 给出). 遵循在基于织物传统正交异性本构模

型的屈曲分析中所采用的相同的步骤, Zhang 等 [7] 得到弯曲模态的屈曲条件为

$$\begin{aligned} & (D_{22} \lambda_2^2 - Q - D_{44} p_2^2)(D_{22} \lambda_2^2 - Q) \\ & p_2 \cosh(khp_1) \sinh(khp_2) - \\ & (D_{22} \lambda_2^2 - Q - D_{44} p_1^2)(D_{22} \lambda_2^2 - Q) \\ & p_1 \cosh(khp_2) \sinh(khp_1) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

桶形 (拉伸) 模态的屈曲条件为

$$\begin{aligned} & (D_{22} \lambda_2^2 - Q - D_{44} p_2^2)(D_{22} \lambda_2^2 - Q) \\ & p_2 \cosh(khp_2) \sinh(khp_1) - \\ & (D_{22} \lambda_2^2 - Q - D_{44} p_1^2)(D_{22} \lambda_2^2 - Q) \\ & p_1 \cosh(khp_1) \sinh(khp_2) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

对  $kh \neq 0$ , 只要方程 (11) 或 (12) 有非平凡解, 其相应的屈曲模态就可能存在.

为了考察屈曲条件 (11) 和 (12) 的解曲线, 我们假设

$$B_{33} = B_{11}, \quad B_{44} = B_{11}/2, \quad B_{55} = B_{11}/2$$

这样, 屈曲条件 (11) 和 (12) 仅依赖于  $kh$ ,  $\lambda_2$  和一个无量纲的材料常数  $\eta = B_{11}/B_{cc}$ . 单向拉应力  $2Q$  与  $\lambda_2$  的关系为

$$\frac{2Q}{B_{cc}} = \eta(1 - \lambda_2^2)/(2\eta - 1) \quad (13)$$

在图 6 中画出了当  $\eta = 2$  时, 方程 (11) 和 (12) 的  $kh$  和  $\lambda_2$  的关系的解曲线.  $\eta$  为其它值时的解曲线可类似画出.

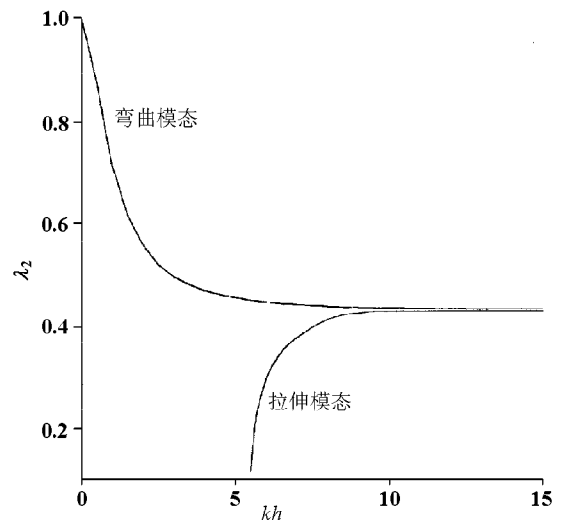


图 6  $\eta = 2$  时的屈曲曲线

从图 6 中可以看出, 当载荷增加时 (即  $\lambda_2$  从 1.0 开始减少时), 弯曲模态的解曲线首先获得解, 即织物按弯曲模态屈曲. 由于载荷总是从小到大逐渐增大的, 所以在织物的实际屈曲过程中, 拉伸屈曲模态便不可能发生. 拉伸模态只是一个可能的数学解. 图 2 照片中的屈曲模态便是一个弯曲模态.

从图 6 中可以看出,  $\lambda_2$  是  $kh$  的减函数, 再根据式 (13), 载荷  $2Q$  便是  $kh$  的增函数. 于是, 临界载荷便对应于  $k$  的可能的最小值.  $k$  的最小值即屈曲的模态数, 在具体问题中由位移的约束条件定出.

### 6.2 织物在受到沿经向 / 纬向方向的单向拉伸时的屈曲 [7]

基于织物的细观本构模型, 可以证明, 织物在受到沿经向 / 纬向方向的单向拉伸时不可能屈曲. 这和实验的结果是相符合的. 证明的过程和基于织物传统正交异性本构模型时的证明过程相同 [7].

### 6.3 织物受到与经向 / 纬向成任意角度方向的单向拉伸时的屈曲 [30]

图 7 是织物条受到与经向成  $\theta = 30^\circ$  的单向拉伸时的屈曲照片. 从图中可以看到, 这时候屈曲的方向与拉伸的方向一般不再垂直. Zhang 等 [30] 得到了一个方程, 用来求出图 7 中的屈曲方向角. 方程如下

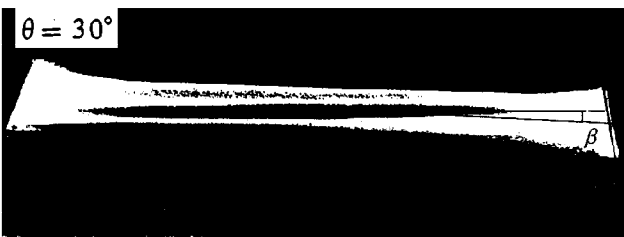


图 7 织物条受到与经向成  $\theta = 30^\circ$  的单向拉伸时的屈曲

$$C_{11}C_{32} - C_{12}C_{31} = 0 \quad (14)$$

式中  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{31}$  和  $C_{32}$  是关于织物的材料常数、单向拉应力  $S$ 、拉伸方向与织物经向的夹角  $\theta$  以及屈曲方向角  $\beta$  的代数表达式. 当  $\theta$  和  $S$  给定后, 从该方程可以求出  $\beta$ . 当  $\theta = 30^\circ$  和  $\theta = 45^\circ$  时  $\beta$  与  $S/B_{cc}(S = 2Q)$  的关系曲线见图 8. 这里, 当  $\theta = 45^\circ$  时,  $B_{11} \neq B_{22}$ ,  $B_{12} \neq 0$ .

与 6.1 中的结果类似, Zhang 等 [30] 也给出了弯曲和桶形两种屈曲模态以及相应的如下屈曲条件: 弯曲模态屈曲条件

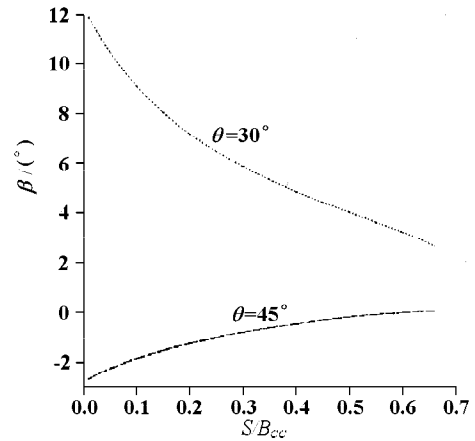


图 8  $\theta = 30^\circ, 45^\circ$  时  $\beta$  与  $S/B_{cc}(S = 2Q)$  的关系曲线

$$(C_{11} - C_{12}p_2^2)p_2 \cosh(khp_1) \sinh(khp_2) - (C_{11} - C_{12}p_1^2)p_1 \cosh(khp_2) \sinh(khp_1) = 0 \quad (15)$$

桶形模态屈曲条件

$$(C_{11} - C_{12}p_2^2)p_2 \cosh(khp_2) \sinh(khp_1) - (C_{11} - C_{12}p_1^2)p_1 \cosh(khp_1) \sinh(khp_2) = 0 \quad (16)$$

也可画出与图 6 类似的屈曲曲线.

### 6.4 织物受简单剪切时的屈曲

图 9 是织物受到沿经向的简单剪切时的屈曲照片 [28].

Zhang 等 [28] 分析了织物的这种屈曲, 给出了在形式上和式 (14) 相同的确定屈曲方向角的方程, 但式中的  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{31}$  和  $C_{32}$  有不同的关于织物的材料常数、剪切量  $\omega$  以及屈曲方向角  $\beta$  的代数表达式.

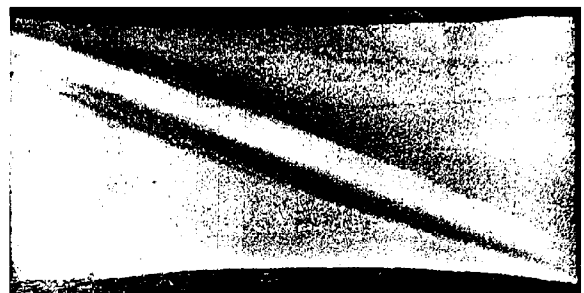


图 9 织物受到沿经向的简单剪切时的屈曲

Zhang 等也给出了弯曲屈曲模态以及相应的屈曲条件, 同时也证明了织物受到沿经向的简单剪切时, 即使在数学上也不存在桶形屈曲模态的分岔解.

关于织物受到沿任意方向简单剪切时的屈曲, 有和织物受到沿经向简单剪切时的屈曲的类似的结



论, 只是各个表达式要更加复杂, 见文献 [29].

## 7 织物力学研究展望

织物细观本构理论的建立和对织物一些重要屈曲现象的成功解析分析, 是织物力学研究的重要进展. 同时, 这些也只是一个新的开始. 还有许多工作需要继续进行. 例如, 现在的织物细观本构理论是针对平纹织物的细观编织结构建立的, 对斜纹织物和缎纹织物, 其细观本构理论的建立还有一些具体工作要做; 织物的本构关系是非线性的, 在实际的计算中用增量线性来逼近, 现在给出的织物细观本构模型可以作为线性增量模型来运用, 但还应考虑由于参考构型的变换可能引起的一些其它问题<sup>[31]</sup>; 还有许多织物的屈曲现象 (特别是局部屈曲) 难以求得解析解, 还有待于用有限元方法求数值解; 基于织物细观本构模型的织物悬垂模拟以及接触悬垂的模拟也有待于进行, 等等. 这些研究的深入开展, 必会促进织物力学的进一步发展.

## 参 考 文 献

- 1 Kawabata S. The Standardization and Analysis of Hand Evaluation (2nd Edition). Japan: The Hand Evaluation Standardization Committee, 1980
- 2 Boos A D. FAST Instruction Manual. Australia: CSIRO Division of Wool Technology Geelong Laboratory, 1991
- 3 Amirbayat J, Hearle J W S. The anatomy of buckling of textile fabrics: drape and conformability. *J Text Inst*, 1989, 80(1): 51~68
- 4 董孚允. 织物结构力学中几个问题研究的进展. 纺织基础科学学报, 1991, 4(1): 64~70
- 5 徐一耿. 织物结构力学理论发展的现状、问题和对策. 力学与实践, 1996, 18(1): 9~12
- 6 Zhang Y T, Fu Y B. A micromechanical model of woven fabric and its application to the analysis of buckling under uniaxial tension Part 1: the micromechanical model. *Inter J Engng Sci*, 2000, 38(17): 1895~1906
- 7 Zhang Y T, Fu Y B. A micromechanical model of woven fabric and its application to the analysis of buckling under uniaxial tension Part 2: Buckling analysis. *Inter J Engng Sci*, 2001, 39(1): 1~13
- 8 Peirce F T. The Handle of Cloth as a Measurable Quantity. *J Text Inst*, 1930, 21: T377~T416
- 9 Shanahan W J, Lloyd D W, Hearle J W S. Characterizing the elastic behaviour of textile fabrics in complex deformations. *Textile R J*, 1978, 9: 495~505
- 10 Clapp T G, Peng H. A comparison of linear and nonlinear bending methods for predicting fabric deformation in automated handling. *J Text Inst*, 1991, 82: 341~352
- 11 Brown P R, Buchanan D R, Clapp T G. Large deflection bending of woven fabric for automated material-handling. *J Text Inst*, 1990, 81: 1~14
- 12 Collier J R, Collier B J, Toole G O, Sargrand S M. Drape prediction by means of finite element analysis. *J Text Inst*, 1991, 82: 96~107
- 13 Gan L, Steven G P, Ly N G. A Finite Element Analysis of The Draping of Fabric. In: The Sixth International Conference in Australia on Finite Element Methods, University of Sydney, 1991, July. 402~414
- 14 Kim J H. Fabric mechanics analysis using large deformation orthotropic shell theory: [dissertation]. Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering, North Carolina State University, 1991
- 15 Deng S G. Nonlinear Fabric Mechanics Including Material Nonlinearity, Contact, and an Adaptive Global Solution Algorithm: [dissertation]. Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering, North Carolina State University, 1994
- 16 Kan T J, Yu W R. Drape simulation of woven fabric by using the finite element method. *J Text Inst*, 1995, 86(4): 635~648
- 17 Gan L, Ly N G. A study of fabric deformation using nonlinear finite element. *Textile Res J*, 1995, 65(11): 660~668
- 18 Chen B J. A Physically Based Model of Fabric Drape: [dissertation]. Dept. of Textiles and Apparel, Cornell University, 1995
- 19 Chen B J, Govindaraj M. A physically based model of fabric drape using flexible shell theory. *Textile Res J*, 1995, 65(6): 324~330
- 20 Potluri P, Atkinson J, Porat I. Large deformation modeling of flexible materials. *J Text Inst*, 1996, 87(1): 129~151
- 21 Chen M X, Sun Q P, Yuen M F. Simulation of fabric drape using a thin plate element with finite rotation. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 14(3): 239~247
- 22 Hu J L, Zhang Y T, Teng J G. Finite element simulation of fabric cantilever test. *Journal of China Textile University*, 1997, 14(3): 14~20
- 23 张义同, 杨海元, 张敬宇. 一种大变形曲壳单元. 力学学报, 1990, 22(2): 200~205
- 24 Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int J Solids Structures*, 1979, 15: 529~551
- 25 Crisfield M A. A fast incremental /iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers & Structures*, 1981, 13: 55~62
- 26 Riks E. Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Comput Meth Appl Mech Engng*, 1984, 47: 219~259
- 27 Breen D E, House D H, Wozny M J. A particle-based model for simulating the draping behaviour of woven cloth. *Textile Res J*, 1994, 64(11): 663~685
- 28 Zhang Y T, Xu J F. Buckling analysis of woven fabric under simple shear in warp direction. *Transactions of Tianjin University*, 2001, 7(1): 31~34
- 29 Zhang Y T, Xu J F. Buckling analysis of woven fabric under simple shear along any direction. *Textile R J*, 2002, 72(2): 147~152

30 Zhang Y T, Xu J F. The buckling analysis of Woven fabric subjected to uniaxial tension along any direction. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(5): 597~605

31 张义同. 初始斜交异性大变形本构理论. *固体力学学报*, 2000, 21(4): 345~349

## THE RECENT ADVANCES IN FABRIC MECHANICS

ZHANG Yitong

Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China

**Abstract** The development history of fabric mechanics is briefly described. The recent advances in fabric drape and buckling are reviewed, which were much developed recently during more than ten years with the stimulation of the demands from the “Clothes Fitting System” the kernel part of Apparel CAD. It was found that the difficulties in the analysis of fabric buckling were due to the traditional constitutive model of fabric. The proposal of the micro-constitutive model for fabric and a series of successful analyses of fabric buckling are the recent and the most important advances in fabric mechanics and may serve as the foundations of the modern fabric mechanics. Finally, the future research trends in fabric mechanics are outlined.

**Keywords** fabric mechanics, micro-constitutive theory, draping, buckling, bifurcation

---

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(19772032)