

# 干摩擦振动系统响应计算方法研究综述\*

白鸿柏

黄协清

军械工程学院兵器工程系, 石家庄 050003 西安交通大学机械工程学院, 西安 710049

**摘要** 首先讨论了两固体接触表面间的干摩擦力模型, 重点介绍了滞迟摩擦模型方面的研究工作; 然后, 论述了含有各种干摩擦环节的振动系统简谐、随机和冲击激励下的响应计算方法, 着重讨论了基于滞迟恢复力模型的响应计算方法, 并对各种计算方法的特点进行了评述. 最后, 指出了干摩擦振动系统响应计算方法亟待解决的一些重大问题.

**关键词** 干摩擦振动系统, 响应计算

## 1 引言

众所周知, 利用干摩擦元件的耗能机制来抑制结构的振动水平是一种非常有效的减振或隔振措施<sup>[1]</sup>. 但是, 由于客观存在不光滑的非线性泛函本构关系<sup>[2]</sup>, 使得含有干摩擦环节的结构在简谐、随机和冲击激励下的响应计算问题非常困难. 几十年来, 国内外众多的学者对这一问题进行了系统深入的理论与实验研究, 取得了丰硕的研究成果, 为后人的继续研究奠定了坚实的基础. 我们将从著名学者 Den Hartog 的研究工作开始追溯, 系统介绍这方面现有的研究成果, 并提出几个引起注意和急需解决的问题.

## 2 摩擦力模型

目前, 关于两固体接触表面间的干摩擦力已经提出了许多数学模型, 其中振动工程中常用的摩擦力模型可分为两个主要类型, 即关于相对滑动速度的不连续函数的 Sgn 摩擦模型和关于滑动位移的滞后连续函数的滞迟模型.

### 2.1 Sgn 摩擦模型

1931 年, Den Hartog<sup>[3]</sup> 提出了理想干摩擦模型 (Coulomb 摩擦模型), 即在一个具有干摩擦交接面的单自由度系统中, 交接面上的干摩擦力是突然发生的, 其时域波形为理想方波, 并且干摩擦力总是阻碍运动, 与运动速度反向, 摩擦力变化规律可表示如下

$$F_f = \begin{cases} \mu N, & v_{\text{rel}} > 0 \\ -\mu N, & v_{\text{rel}} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 1999-06-14, 修回日期: 2000-07-24

\* 中国博士后科学基金 (97-7) 资助项目

其中,  $F_f$  为摩擦力,  $\mu$  是滑动摩擦系数,  $N$  为正压力,  $v_{rel}$  是两固体接触表面相对滑动速度. 这里, 假定动、静摩擦系数相等且滑动摩擦系数  $\mu$  与两固体接触面相对运动速度无关而保持恒定.

实际上, 两固体接触表面间的摩擦情况比较复杂, 动、静摩擦系数不是严格地相等且滑动摩擦系数  $\mu$  依赖于两固体接触面相对运动速度  $v_{rel}$ . Shaw<sup>[4]</sup> 等 (1986) 考察了动、静摩擦系数不同情况下的最简单的速度依赖性问题. 最近, Makris 和 Constantinou<sup>[5]</sup> (1991) 研究了摩擦系数是滑动速度的指数函数的单自由度系统简谐受迫振动响应. Bindemann 和 Ferri<sup>[6]</sup> (1995) 在柔性梁被动阻尼水平研究中考察了 5 种不同的依赖于接触面相对运动速度的干摩擦模型影响作用.

## 2.2 滞迟摩擦模型

实际上, 干摩擦交接面都具有一定的弹性, 在外力作用下, 交接面先是沿切线方向产生弹性变形, 等到外力大到一定程度, 交接面才产生相对滑移. 考虑到交接面的弹性性质, 将干摩擦表面看成是一根弹簧和一个理想的 Coulomb 摩擦副串接, 1961 年, Iwan, Caughey<sup>[7]</sup> 等提出了著名的双线性滞迟恢复力模型. 其中, 具有记忆特性的非线性恢复力  $z(t)$  采用双折线模型来近似描述, 其增量形式的本构关系<sup>[2]</sup> 可写为

$$\begin{aligned} dz(t) &= \frac{k_s}{2} \{1 + \operatorname{sgn}(z_s - |z(t)|)\} dy(t) \\ k_s &= \frac{z_s}{y_s} \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $y_s$  是两固体接触表面发生宏观滑移时弹性变形的极限值,  $z_s$  是滑移时的记忆恢复力,  $y(t)$  是滞迟环节两端相对位移变形量.

近年来, 针对双线性滞迟摩擦力模型出现了一些推广和更加精细的修正, 如 Wang 和 Shieh<sup>[8]</sup> (1991) 考虑了摩擦系数  $\mu$  不是常数的情况, Menq 和 Bielak<sup>[9]</sup> (1986) 考察了微观滑动情况, Menq 和 Chidamparam<sup>[10]</sup> (1991) 考察了二维滑动运动情况等.

一般情况下, 两固体接触表面间从弹性变形到滑移状态并不是瞬间完成的, 而是有一个圆滑的过渡过程. 因此, 客观地说, 双线性滞迟模型只是实际情况的一种近似. 为了改进逼近精度, Bouc<sup>[11]</sup> (1967) 首先提出了光滑滞迟模型, 随后 Wen<sup>[12,13]</sup> (1976, 1980) 又进行了完善与发展. 具有光滑滞迟特性的滞迟模型可以用如下一阶微分方程描述

$$\dot{z}(t) = -\gamma|\dot{x}|z|z|^{n-1} - \beta\dot{x}|z|^n + A\dot{x} \quad (3)$$

其中  $x(t)$  是滞迟环节两端相对位移变形量,  $z(t)$  是光滑滞迟恢复力.

通过适当选择参数  $\gamma, \beta, n, A$ , 可以很好地逼近实际的滞迟恢复力与滞迟环节两端相对位移形成的滞环曲线. 特别当  $n \rightarrow \infty$  时, 光滑滞迟回线将退化为双线性滞迟回线.

滞迟模型仅考虑了固体接触表面切线方向的弹性变形影响作用. 现在, 一些学者研究了涉及固体接触表面法线方向弹性变形和相对位移的影响作用问题. 其中比较有代表性的工作有 Oden 等<sup>[14,15]</sup> (1985, 1994) 提出了与法向力相关的摩擦力模型, Hess (1991) 等<sup>[16]</sup> 人研究了接触面法线方向的运动的重要影响作用.

## 2.3 其它摩擦力模型

彼此接触的相对滑动的固体表面间的摩擦力受许多因素的影响, 除了上述两种比较重要的得到广泛应用的摩擦力模型外, 一些研究者通过对各种典型实际接触过程的精细考察, 还提出了许多近似的摩擦力模型. 文献 [17] 综合了包括经典摩擦力模型、负幂函数摩擦力模型、Dahl 摩擦力模型、滞后型分布摩擦力模型、Karnopp 摩擦力模型、刷子 (Bristle) 摩擦力模型、重新

定位 (Reset Integrator) 摩擦力模型在内的十种近似摩擦力模型, 并对这些摩擦力模型各自的特点和适用范围作了精彩的评述. 关于这些摩擦力模型更详细的讨论, 请参阅丁文镜发表在第六届全国一般力学学术会议上的综述性论文<sup>[17]</sup>.

尽管研究人员先后提出了许多摩擦力模型, 但是理想干摩擦模型 (Coulomb 摩擦模型)、双线性滞迟模型、光滑滞迟模型既简单又能揭示出干摩擦交接面的基本特性、便于解析分析, 在振动工程中可以用来描述一大类干摩擦问题, 因而得到了极其广泛的应用, 对它们的研究也最系统、深入. 因此, 本文重点介绍由这些摩擦力模型描述的干摩擦振动系统的响应计算方法.

### 3 基于理想干摩擦模型的响应计算方法

1931年, Den Hartog<sup>[3]</sup> 根据 Coulomb 摩擦模型的分段线性特性, 导出了单自由度激振质量干摩擦系统正弦激励下响应的精确解. 1956年, Den Hartog<sup>[18]</sup> 按振动一周能量耗散相等原则将干摩擦力用一等效黏性阻尼力替代, 发展了等效线性化方法. 1960年, Levitan<sup>[19]</sup> 将理想干摩擦力进行 Fourier 级数展开, 推导出了单自由度基础激振干摩擦系统正弦激励下响应的精确级数解. 1966年, Yeh<sup>[20]</sup> 将 Den Hartog (1931) 精确解法推广至含有一个干摩擦环节的两自由度系统, 该系统受支座激励, 其中一个质量与地面之间存在干摩擦接触面. 1976年, Sainsbury<sup>[21]</sup> 将理想干摩擦力 Fourier 级数展开式的第一项取为等效黏性阻尼力, 发展了另一种等效线性化方法. 1979年, Hundal<sup>[22]</sup> 推导了单自由度基础激振干摩擦系统正弦激励下响应的精确解. 与 Levitan (1960) 研究的模型不同, 这里的干摩擦力介于质量与地面之间. 1985年, Pierre, Ferri 与 Dowell<sup>[23]</sup> 合作, 通过引进符号函数技巧, 将增量谐波平衡法 (IHB) 推广至单自由度激振质量干摩擦系统与含有两个干摩擦环节的两自由度激振质量干摩擦系统的正弦激励响应计算. 1988年, Ferri 与 Dowell<sup>[24]</sup> 对一个简谐激励多自由度含有一个干摩擦环节的振动系统进行了多谐分析, 分析对象是两个通过干摩擦环节连接的悬臂梁系统. 通过采用直接数值积分方法、等效黏性阻尼法、考虑一周两次停滞的分段解析方法, 国外众多学者还对干摩擦环节在动力吸振领域的应用开展了系统的理论与实验研究<sup>[25~35]</sup>.

### 4 基于滞迟恢复力模型的响应计算方法

#### 4.1 简谐激励响应计算

1960年, Caughey<sup>[36,37]</sup> 利用 Krylov-Bogoliubov 方法 (慢变参数法) 分别研究了单自由度激振质量干摩擦系统正弦激励下的响应计算、定常解的稳定性分析, 和一具有弱双线性滞迟特性的半无限杆正弦激励下的响应计算问题. 1961年, Iwan<sup>[7]</sup> 求得单自由度激振质量干摩擦系统正弦激励下的数值解. 1964年, Iwan<sup>[38]</sup> 求得单自由度激振质量干摩擦系统正弦激励下的精确解, 该方法需要迭代求解六个非线性代数方程. 1965年, Iwan<sup>[39]</sup> 将 Caughey (1960) 慢变参数法推广至含有两个干摩擦环节的两自由度基础激振干摩擦振动系统正弦激励响应计算, 并讨论了定常解的稳定性. 1975年, Masri<sup>[40]</sup> 推出了单自由度激振质量干摩擦系统正弦激励下响应的频响方程. 与 Iwan (1964) 方法相比, 该方法的主要特点一是计算简单, 只需要迭代求解一个高次超越代数方程; 二是干摩擦环节弹性变形与屈服变形阶段的黏性阻尼系数不同. 1979年, Schlesinger<sup>[41]</sup> 导出了单自由度无黏性阻尼干摩擦隔振系统的精确解, 并发现系统摩擦参数存在一个最佳值, 随后讨论了 Den Hartog (1956) 等效线性化方法的误差与应用范围. 1987年, 张强星与 Sainsbury<sup>[42]</sup> 合作, 将 Sainsbury (1976) 关于理想干摩擦模型的研究工作推进一步, 把双线性滞迟恢复力进行 Fourier 级数展开, 取第一级数近似做为滞迟部分的等效阻力, 简化了干摩擦振动系统的响应计算. 该方法不仅可应用于单自由度干摩擦系统, 还可解决多自由度干摩擦系统的正弦激励响应计算问题. 1988年, 董智法、张强星<sup>[43]</sup> 采用 Newmark 直接数值积分法研究了单自由度具有黏性阻尼的双线性滞迟隔振系统, 完善了 Schlesinger (1979) 的研究结

果。1989年,董智法、张强星<sup>[44]</sup>研制了一套双线性滞迟隔振系统电磁-机械模拟实验装置,定量地获得了与数值结果相一致的实验数据,为进一步研究干摩擦隔振系统提供了实验基础。1990年,谭明安、高得平<sup>[45]</sup>发展了用来分析带任意多个干摩擦阻尼器系统动力响应的迭代方法,该法与张强星与 Sainsbury (1987) 的计算方法类似,计算精度与等效黏性阻尼法相当。1990年,曲敬镭、方之楚等<sup>[46]</sup>将 Pierre, Ferri 与 Dowell (1985) 的研究工作进一步推广,用增量谐波平衡法 (IHB) 分析了带有局部双线性滞迟干摩擦环节的线性结构在正弦激励下的稳态响应计算问题。

#### 4.2 随机激励、冲击激励响应计算方法

1960年, Caughey<sup>[47]</sup>在窄带 Gaussian 分布随机响应的假设下,运用 Krylov-Bogoliubov 方法研究了单自由度双线性滞迟振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统的响应,讨论了响应的均方特性。1968年, Iwan 与 Lutes<sup>[48]</sup>运用电子模拟实验装置,研究了单自由度双线性滞迟振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统的响应,指出了窄带 Gaussian 分布随机响应假设的适用范围。1969年, Lutes<sup>[49]</sup>在窄带 Gaussian 分布随机响应的假设下,提出了单自由度双线性滞迟振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统响应计算的非线性等效化方法,即用一具有解析解的非滞迟非线性振动系统替代双线性滞迟振动系统,并与 Caughey (1960) 的结果进行了比较,表明该算法有效地改善了计算精度。1978年, Roberts<sup>[50]</sup>采用标准随机平均法研究了单自由度无阻尼双线性滞迟振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统的响应。1980年, Roberts<sup>[51]</sup>又在1978年工作的基础上,研究了单自由度含有任意非线性阻尼双线性滞迟振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统的响应。考虑到用统计线性化及 Gaussian 矩法求解强非线性系统有时精度较差,1986年,刘强、丁文镜<sup>[52]</sup>从 Fokker-Planck 方程出发,把非 Gaussian 矩法推广至更具一般性的非线性系统,并研究了单自由度无阻尼双线性滞迟振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统的响应,结果表明计算精度有很大提高。考虑到基于 Krylov-Bogoliubov 技术的等效线性化方法 (Caughey, 1960) 或标准随机平均法 (Roberts, 1978, 1980) 必须假定响应是窄带随机过程,而实际滞迟系统在屈服前后刚度相差较大及中等强度激励时响应频带较宽 (Iwan 与 Lutes, 1968), 1989年,朱位秋、雷鹰<sup>[53]</sup>将能量包线随机平均法应用于分析单自由度双线性滞迟振动系统对白噪声激励的随机响应,该法在一定程度上可计及响应的宽带性质。1990年,针对能量包线随机平均法必须假定能量耗散很小这一限制, Cai 与 Lin<sup>[54]</sup>将基于广义平稳势概念的广义能量耗散平衡方法推广至分析基于双线性滞迟模型和一阶非线性微分方程模型的单自由度滞迟振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统的响应。

1978年, Lyengar 与 Dash<sup>[55]</sup>运用 Gaussian 矩法研究了单自由度具有光滑滞迟特性的振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统的响应。1980年, Wen<sup>[13]</sup>运用等效线性化方法研究了单自由度具有光滑滞迟特性的振动系统稳态 Gaussian 白噪声随机激励下系统的响应。1989年,余锟、沈得安<sup>[56]</sup>提出了具有光滑滞迟特性的滞回系统随机振动的累积量截断法,该法运算简捷,能获得具有足够精度的半解析近似解,可以方便地研究响应随系统参数变化的情况。

关于含有理想干摩擦环节振动系统冲击激励响应计算方面的研究工作,1988年以前的部分研究成果收录于丁文镜主编的专著<sup>[57]</sup>。相比之下,滞迟振动系统对冲击激励响应计算方面的研究工作开展较少,这方面的文献也鲜见。1989年,董智法、申仲翰<sup>[58]</sup>采用 Schlesinger<sup>[41]</sup>(1979) 研究基础简谐激励双线性滞迟系统响应计算时提出的分段解析方法,研究了双线性滞迟隔振系统在基础位移冲击激励下的响应特性,分析结果表明干摩擦隔冲系统远优于线性阻尼系统,隔冲效果明显。

### 5 钢丝绳等新型干摩擦元件构成的振动系统响应计算

近年来,随着诸如钢丝绳、金属丝网、金属橡胶等新型干摩擦元件在隔振、减振领域日益广

泛的应用,国内外学者<sup>[59~83]</sup>对其本构关系、实验建模、响应计算、隔振、减振性能指标、工程应用等方面开展了卓有成效的研究.大量试验结果表明,新型干摩擦元件的记忆特性可以用双折线模型<sup>[60~62]</sup>或一阶微分方程模型<sup>[63~65]</sup>来描述.一般新型干摩擦元件的本构关系可以分解为有记忆环节和无记忆环节的并联<sup>[2]</sup>,即变形后的恢复力 $g_N$ 可分解为两部分 $g_0$ 和 $z$ ,而 $g_0$ 代表仅与当前变形状态有关的无记忆部分, $z$ 代表与整个变形历史有关的记忆部分

$$g_N(y(t), \dot{y}(t), t) = g_0(y(t), \dot{y}(t)) + z(t) \quad (4)$$

一般无记忆恢复力 $g_0$ 是变形状态的二元函数,其常见形式是二元多项式

$$g_0(y(t), \dot{y}(t)) = a_0 \operatorname{sgn}(y(t)) + \sum_{n=1}^{n_1} a_n |y(t)|^{n-1} y(t) + b_0 \operatorname{sgn}(\dot{y}(t)) + \sum_{n=1}^{n_2} b_n |\dot{y}(t)|^{n-1} \dot{y}(t) \quad (5)$$

尽管无记忆恢复力的一般表达式(5)比较复杂,但工程中常见的JGS-1型钢丝绳隔振器、JD-1型配置钢丝网弹簧隔振器等其它型号隔振器实验建模结果表明<sup>[2]</sup>,无记忆恢复力中的立方非线性成分是主要的支配因素.因此,它们可以用含有立方非线性黏性阻尼双线性滞迟模型来近似描述,且能满足工程应用中的精度要求.

目前,关于响应计算方面的研究工作大都局限于前人的研究成果,即假设无记忆恢复力是线性的,如张强星与Sainsbury(1987)提出的钢丝绳隔振器正弦激励响应的迭代计算方法仍然忽略了无记忆恢复力中的非线性因素.这种把无记忆恢复力线性化的做法虽然具有模型简化、且可以利用已有的研究成果等优点,但是,钢丝绳等新型干摩擦隔振器扫频实验中出现的幅频曲线弯曲、跳跃等非线性现象<sup>[79]</sup>却不能利用这种简化模型得到解释.

因此,1998年,白鸿柏、黄协清<sup>[84]</sup>提出了单自由度三次非线性黏性阻尼双线性滞迟振动系统简谐激励响应计算的分段解析处理方法;随后发展了张强星(1987)傅立叶级数分析方法,推导出了用于响应计算的频响方程<sup>[85,86]</sup>;又将IHB增量谐波法推广至单自由度、两自由度三次非线性黏性阻尼双线性滞迟振动系统简谐激励响应计算<sup>[87~89]</sup>;利用求解非线性方程组的最优化方法解决了两自由度三次非线性黏性阻尼双线性滞迟振动系统简谐激励响应计算问题<sup>[90]</sup>;最近将Krylov-Bogoliubov法推广至单自由度三次非线性黏性阻尼双线性滞迟振动系统 Gaussian 白噪声随机激励响应计算<sup>[91]</sup>.

## 6 干摩擦振动系统响应计算方法研究亟待解决的问题

通过考察现有的研究成果可以看出,由于干摩擦元件客观存在的非光滑强非线性特性,给这类元件构成的振动系统的响应计算带来了极大的困难,目前解决的问题还只是一小部分,至少在以下几个方面还要做大量的研究工作.首先,简谐激励下响应计算方法要逐渐推广至多自由度、任意周期激励的含有干摩擦环节的非线性系统;其次,考虑到窄带随机激励是多自由度工程结构经常遇见的情况,应该进一步在现有研究基础上,探索 Gaussian 白噪声、窄带随机激励下含有干摩擦环节的多自由度结构的响应计算方法;最后,加强各种含有干摩擦环节的振动系统冲击激励下响应计算方法的研究工作.

## 参 考 文 献

- 1 张强星,许滨.减振缓冲的钢丝绳隔振器.噪声与振动控制,1985,(2):8~12
- 2 胡海岩.振动控制中的非线性组合结构动力学研究.[博士论文].南京:南京航空学院,1988
- 3 Den Hartog J P. Forced vibration with combined coulomb and viscous friction. *Transactions of the ASME, APM*, 1931, 53(9): 107~115
- 4 Shaw S W. On the dynamic response of a system with dry friction. *JSV*, 1986, 108(2): 305~325
- 5 Makris N, Constantinou M C. Analysis of motion resisted by friction. II. Velocity-dependent friction. *Mechanics of Structures and Machines*, 1991, 19(4): 501~526

- 6 Bindemann A C, Ferri A A. Proceedings of the 36th Structures. Structural Dynamics and Materials Conference. New Orleans, LA, April 10~12. 1995. 180~189
- 7 Iwan W D. The Dynamic Response of Bilinear Hysteretic Systems. [Ph D Thesis]. California: California Institute of Technology, 1961
- 8 Wang J H, Shieh W L. The influence of a variable friction coefficient on the dynamic behavior of a blade with a friction damper. *JSV*, 1991, 149(1): 137~145
- 9 Menq C-H, Bielak J, Griffin J H. The influence of microslip on vibratory response (Part I, Part II). *JSV*, 1986, 107(2): 279~307
- 10 Menq C-H, Chidamparam P, Griffin J H. Friction damping of two-dimensional motion and its application in vibration control. *JSV*, 1991, 144(3): 427~447
- 11 Bouc R. Forced vibration of mechanical system with hysteresis. Abstract, Proceedings of 4th Conference on Nonlinear Oscillation. Prague, Czechoslovakia, 1967
- 12 Wen Y K. Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, New York, 1976, 102(EM2): 249~263
- 13 Wen Y K. Equivalent linearization for hysteretic system under random excitation. *Transactions of the ASME, APM*, 1980, 47(1): 150~154
- 14 Oden J T, Martins J A C. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1985, 52(1-3): 527~634
- 15 Twozydlo W W, Becker E B, Oden J T. *Applied Mechanics Reviews*, 1994, 47(7): 255~274
- 16 Hess D P, Soom A. Normal vibrations and under harmonic loads: part I—Hertzian contacts; Part II—Rough planar contacts. *ASME Journal of Tribology*, 1991, 113: 80~92
- 17 丁文镜, 樊世超. 摩擦力的若干数学模型. 见: 动力学、振动与控制的研究, 第六届全国一般力学学术会议论文集. 长沙: 湖南大学出版社, 1998. 133~137
- 18 Den Hartog J P. Mechanical Vibrations. 4th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1956
- 19 Levitan E S. Forced oscillation of a spring-mass system having combined coulomb and viscous damping. *J of the Acoust Soc of A M*, 1960, 32(10): 1265~1269
- 20 Yeh G C K. Forced vibrations of a two-degree-of-freedom system with combined coulomb and viscous damping. *J of the Acoust Soc of A M*, 1966, 39(1): 14~24
- 21 Sainsbury M G. Vibration Analysis of Damped Complex Structures. [Ph D Thesis]. London: University of London, 1976
- 22 Hundal M S. Response of a base excited system with coulomb and viscous friction. *J of Sound and Vibration*, 1979, 64(3): 371~378
- 23 Pierre C, Ferri A A, Dowell E H. Multi-harmonic analysis of dry friction damped system using an incremental harmonic balance method. *Transactions of the ASME, APM*, 1985, 52(4): 958~964
- 24 Ferri A A, Dowell E H. Frequency domain solutions to multi-degree-of-freedom, dry friction damped systems. *J of Sound and Vibration*, 1984, 124(2): 207~224
- 25 白石明男, 山川出云. 回転体の不つりあいにより加振される動吸振器系 (第 1 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 59 (1984), 50(457). 1715~1718
- 26 白石明男, 山川出云. 回転体の不つりあいにより加振される動吸振器系 (第 2 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 60 (1985), 51(471). 3022~3025
- 27 白石明男, 山川出云. 回転体の不つりあいにより加振される動吸振器系 (第 3 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 62 (1987), 53(490). 1166~1171
- 28 山川出云, 白石明男, 伊与久达夫. 黏性, クーロニ摩擦を含む動吸振器系の解析 (第 1 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 55 (1980), 46(403). 268~275
- 29 山川出云, 白石明男, 伊与久达夫. 黏性, クーロニ摩擦を含む動吸振器系の解析 (第 2 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 57 (1982), 48(431). 946~953
- 30 白石明男. 変位で加振される動吸振器系におけるクーロニ摩擦の影響 (第 1 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 60 (1985), 51(467). 1755~1759
- 31 白石明男. 変位で加振される動吸振器系におけるクーロニ摩擦の影響 (第 2 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 61 (1986), 52(481). 2362~2329
- 32 白石明男. 変位で加振される動吸振器系におけるクーロニ摩擦の影響 (第 3 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 63 (1988), 54(506). 2459~2463
- 33 吉武裕, 末岡淳男等. クーロニ摩擦をともなう振動系の解析 (第 1 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 63 (1988), 54(507). 2654~2659
- 34 吉武裕, 末岡淳男等. クーロニ摩擦をともなう振動系の解析 (第 2 報). 日本機械学会論文集 (C 編). 昭合 63 (1988), 55(509). 1~6
- 35 白石明男. 振動加速度低減のための動吸振器. 日本機械学会論文集 (C 編), 昭合 61 (1986), 52(473): 48~54
- 36 Caughey T K. Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis. *Transactions of the ASME, APM*, 1960, 27(4). 640~643

- 37 Caughey T K. Forced oscillation of a semi-infinite rod exhibiting weak bilinear hysteresis. *Transactions of the ASME, APM*, 1960, 27(4): 644~648
- 38 Iwan W D. The dynamic response of the one degree of freedom bilinear hysteretic system. In: Proc Third World Conf Earthquake Eng, 1964
- 39 Iwan W D. The steady-state response of a two-degree-of-freedom bilinear hysteretic system. *Transactions of the ASME, APM*, 1965, 32(1): 151~156
- 40 Masri S F. Forced vibration of the damped bilinear hysteretic oscillator. *J Acoust Soc AM*, 1975, 57(1): 106~112
- 41 Schlesinger A. Vibration isolation in the presence of coulomb friction. *J Sound and Vibration*, 1979, 63(2): 213~224
- 42 张强星, Sainsbury M G. 干摩擦振动系统的简化. *振动与冲击*, 1987, 6(1): 42~58
- 43 董智法, 张强星. 具有黏性阻尼的滞迟隔振系统. *振动与冲击*, 1988, 7(3): 11~17
- 44 董智法, 张强星. 双线性滞迟隔振系统的模拟实验. *振动与冲击*, 1989, 8(1): 36~43
- 45 谭明安, 高得平. 干摩擦阻尼系统动力响应分析的迭代方法. *振动工程学报*, 1990, 3(3): 33~41
- 46 曲敬镛, 方之楚, 骆振黄. 用 IHB 法分析带有局部摩擦阻尼元件的线性结构在简谐激励下的稳态周期响应. 见: 第四届全国振动理论及应用学术会议论文集(上). 西安: 西北工业大学. 1990. 71~76
- 47 Caughey T K. Random excitation of a system with bilinear hysteresis. *Transactions of the ASME, APM*, 1960, 27(4): 649~652
- 48 Iwan W D, Lutes L D. Response of the bilinear hysteresis system to stationary random excitation. *J Acoust Soc AM*, 1968, 43(3): 545~552
- 49 Lutes L D. Approximate technique for treating random vibration of hysteresis systems. *J Acoust Soc AM*, 1970, 48(1): 299~306
- 50 Roberts J B. The response of an oscillator with bilinear hysteresis to stationary random excitation. *Transactions of the ASME, APM*, 1978, 45(4): 923~928
- 51 Roberts J B. The yielding behaviour of a randomly excited elasto-plastic structure. *J Sound and Vibration*, 1980, 72(1): 71~85
- 52 刘强, 丁文镜. 非线性振动中的非高斯矩方法. *力学学报*, 1986, 18(5): 439~447
- 53 朱位秋, 雷鹰. 能量包线随机平均法在双线性滞迟系统随机响应分析中的应用. *航空学报*, 1989, 10(1): A29~A34
- 54 Cai G Q, Lin Y K. On randomly excited hysteretic structures. *Transactions of the ASME, APM*, 1990, 57(2): 442~448
- 55 Lyengar R N, Dash P K. Study of the random vibration of nonlinear systems by the Gaussian closure technique. *Transactions of the ASME, APM*, 1978, 45(2): 393~399
- 56 余轶, 沈得安. 滞回系统随机振动的累积量截断法. *振动与冲击*, 1989, 8(2): 1~11
- 57 丁文镜编著. *减振理论*. 北京: 清华大学出版社, 1988
- 58 董智法, 申仲翰. 干摩擦系统在基础位移冲击激励下的特性. *应用力学学报*, 1989, 6(3): 107~110
- 59 Pivovarov I, Vinogradov O G. The phenomenon of damping in stranded cables. AIAA Paper-85-0660, 1985
- 60 Sehitoglu H, Klein R E. Identification of multivalued and memory nonlinearities in dynamic. In: Proc Simulation, 1975, 25(3). 86~92
- 61 Andronikou A M, et al. Identification of nonlinear hysteretic systems using random search. In: Proc 6th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation. Washington D C, USA, 1982. 331~336
- 62 Jategaonkar R V. Parametric identification of discontinuous nonlinearities. In: Proc 7th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation. York, UK, 1985. 167~172
- 63 Lo H R, et al. The analysis of hysteretic systems with reference to a particular model. In: Proc 4th IMAC. Los Angeles, USA, 1986. 730~735
- 64 Yar M, Hammond J K. Continuous time estimation of lumped parameter system. In: Proc 5th IMAC. London, UK, 1987. 580~586
- 65 Yar M, Hammond J K. Parameter estimation for hysteretic systems. *J Sound and Vibration*, 1987, 117(1): 161~172
- 66 胡海岩, 李岳锋. 具有记忆特性的非线性减振器参数识别. *振动工程学报*, 1989, 2(2): 17~26
- 67 李岳锋, 胡海岩. 非线性系统参数识别的频域法. *南京航空学院学报*, 1991, 23(4): 45~50
- 68 李岳锋, 胡海岩. 非线性系统参数识别的能量法. *振动工程学报*, 1991, 4(3): 34~40
- 69 陈乃立, 董忠钊. 非线性滞迟系统的参数分离. *振动与冲击*, 1994, 13(4): 7~14
- 70 姚亚夫, 董忠钊, 程耀东. 一种非线性干摩擦振动系统的识别方法. 见: 全国第五届模态分析与试验学术交流会议论文集(上). 1988. 579~589
- 71 Masri S F, Caughey T K. A nonparametric identification techniques for nonlinear dynamic problems. *Transactions of the ASME, APM*, 1979, 46(2): 433~447
- 72 Masri S F, et al. Nonparametric identification of nearly arbitrary nonlinear systems. *Transactions of the ASME, APM*, 1982, 49(3): 619~628
- 73 陈南, 陈绍汀. 一类非线性系统非参数识别方法及其应用. 见: 第二届全国振动理论及应用学术会议论文集. 西安, 1984
- 74 程礼. 一种非线性系统的识别方法. 见: 第二届全国振动理论及应用学术会议论文集. 哈尔滨, 1987. 193~200
- 75 庄表中, 邢宏, 高瞻. 非线性隔振器的应用与传递率的定义. *机械强度*, 1991, 13(1): 14~17

- 76 庄表中, 邢宏, 高瞻. 关于非线性隔振系统动态特性的描述方法. 振动与冲击, 1986, 20(4): 33~37
- 77 胡振锡, 毛家祥, 蒋金南等. SJ-1 型钢丝绳减振器的特性及其应用. 振动与冲击, 1988, 7(3): 67~72
- 78 胡年丰, 王建华. 具有非线性刚度特征隔振器的动态分析. 机械强度, 1987, 9(2): 14~17
- 79 周强. 钢丝绳隔振器的非线性特性及其应用. 噪声与振动控制, 1994, (4): 8~11
- 80 田千里, 高赞明, 倪一清. 用钢丝绳减振器控制结构振动. 机械强度, 1991, 13(4): 7~10
- 81 王杰, 赵玖. 高弹联轴节轴系在简谐激励下非线性振动的稳态解. 噪声与振动控制, 1996, (2): 18~20
- 82 龚宪生, 赵玖, 骆振黄. 非线性迟滞特性钢丝绳联轴器建模与参数辨识. 见: 第六届全国振动理论及应用学术会议论文集. 武汉: 华中理工大学, 1997. 408~411
- 83 李伟, 王轲等. 基于遗传算法的非线性迟滞系统参数识别. 振动与冲击, 2000, 19(1): 8~11
- 84 白鸿柏, 黄协清. 干摩擦非线性减振器构成的迟滞振动系统的响应计算. 机械工程学报, 1998, 34(5): 70~75
- 85 白鸿柏, 黄协清. 干摩擦振动系统响应计算方法研究. 振动工程学报, 1998, 11(4): 15~19
- 86 白鸿柏, 黄协清. 含有三次非线性的黏性阻尼双线性滞迟隔振系统. 振动与冲击, 1998, 17(1): 5~8
- 87 白鸿柏, 黄协清. 三次非线性黏性阻尼双线性滞迟振动系统 IHB 分析方法. 西安交通大学学报, 1998, 32(10): 35~38
- 88 白鸿柏, 黄协清. 基础柔性对干摩擦隔振系统影响作用研究. 机械强度, 1998, 21(1): 22~25
- 89 白鸿柏, 黄协清. 柔性基础上的干摩擦隔振系统. 振动与冲击, 1998, 17(3): 34~37
- 90 白鸿柏, 黄协清. 干摩擦振动系统稳态响应的最优化计算方法. 振动与冲击, 2000, 19(1): 68~70
- 91 白鸿柏, 黄协清. 干摩擦振动系统随机激励响应的 Krylov-Bogoliubov 计算方法. 振动与冲击, 2000, 19(2): 83~85

## AN OVERVIEW ON STUDY OF METHODS OF RESPONSE COMPUTATION FOR THE DRY FRICTIONALLY DAMPED VIBRATION SYSTEMS\*

Bai Hongbai

Department of Weapon Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China

Huang Xieqing

School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

**Abstract** In this paper, various dry friction models about two solid contact surface were discussed, and the emphasis is on the hysteretic dry friction model. Then the methods of response computation for the dry frictionally damped vibration systems under harmonic, random and shock excitations were discussed with the emphasis on the cases based on the hysteretic restoring force model and different computation methods were compared. Finally, some important problems that require further studies were pointed out.

**Keywords** frictionally damped vibration systems response computation overview

---

\* The project supported by the Post-doctoral Science Foundation of China (97-7)