

# 塑性动力学和动态塑性失稳回顾\*

王 仁

北京大学力学与工程科学系, 北京 100871

**摘 要** 首先说明这篇文章不是关于此论题的一般综述, 只是些个人见解, 同时介绍了在中国做过的一些工作, 最近的综述请参阅 Jones 的文章<sup>[1]</sup>.

**关键词** 塑性动力学, 动态塑性失稳, 回顾

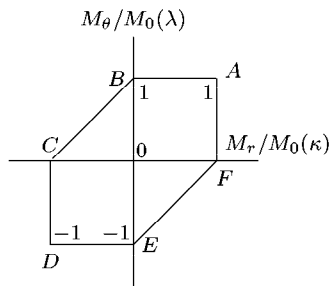
## 1 梁的刚塑性动力学分析

我对塑性动力学的关注要追溯到 50 年代初, 当时我还是布朗大学的博士生, Lee 和 Symonds 的文章<sup>[2]</sup>引起我极大的兴趣, 他们的方法简单明了, 结果却令人惊奇, 他们采用了以理想刚塑性分析来代替弹塑性分析的方法, 该方法源于布朗大学 Prager 及其研究小组的极限分析方法, 它使问题的处理得到了很大的简化. 此后, 塑性动力学的分析方法很快地被推广到了梁的各种情形以及板和壳的分析中. 有关梁的进一步工作参见文献<sup>[3]</sup>.

## 2 简支圆板的刚塑性动力学分析

继成功地运用 Tresca 屈服条件及相应的流动法则来分析准静态载荷下圆板的承载能力之后<sup>[4]</sup>, Hopkins 和 Prager<sup>[5]</sup>研究了简支圆板的动力学问题, 问题的解是基于小变形条件下的薄板理论, 即不考虑大挠度产生的薄膜应力, 并且忽略了剪切变形和转动惯量. 圆板承受突加的均布载荷, 在载荷保持一段时间不变之后又突然卸载. 结果表明, 当压力幅值趋于无穷大而压力作用时间趋于无穷小时, 只要冲量不变, 问题就简化为获得瞬时初始速度的板的动力学问题. 这就是板承受冲击载荷的情形, 它可看作平面冲击波与板相互作用的问题, 是与我当时解决的问题相平行的<sup>[6]</sup>. 处理方法很相似, 在后一情形中, 整个板获得一个瞬时的速度  $v_0$ . 而不受任何压力. 这样, 可以取与文献<sup>[5]</sup>中卸载阶段相似的速度场, 意味着可假设在板的中间有一个截锥型分布的速度场, 截锥平头部分的速度为  $v_0$ , 它使材料屈服并服从 Tresca 屈服条件 (对应于图 1 中的 A 点, 径向和环向弯矩都等于  $1 (M_0$  为极限塑性弯矩)). 圆形平头部分被一个铰圆环绕, 它类似于受弯曲刚塑性梁中的塑性铰, 在铰圆和简支边界之间, 速度线性变化. 这个截锥也屈服并且服从 Tresca 屈服条件的另一部分 (对应于图 1 中的 AB 线段, 弯矩从  $M_0$  变到边界上的零值). 对运动方程积分后可得到铰圆半径的演化方程. 当铰圆缩小时, 可以算出板挠度的增量. 最后, 铰圆缩小到零时, 速度场变成了简单的圆锥形, 它对应于第一阶段的结束.

\* Applied Mechanics Reviews 惠允版权翻译此文 (Published with Permission from Applied Mechanics Reviews, Volume 53, Number 2, February 2000). 关键词是译者加的.



- A :  $M_r/M_0 = M_\theta/M_0 = 1;$   $\kappa, \lambda \geq 0$
- AB :  $0 < M_r/M_0 < 1; M_\theta/M_0 = 1,$   $\lambda \geq \kappa = 0$
- B :  $M_r/M_0 = 0, M_\theta/M_0 = 1,$   $\lambda \geq -\kappa \geq 0$
- BC :  $-1 < M_r/M_0 < 0, M_\theta/M_0 = 1 + M_r/M_0;$   $\lambda \geq -\kappa > 0$
- C :  $M_r/M_0 = -1, M_\theta/M_0 = 0;$   $-\kappa \geq \lambda \geq 0$

其中径向和周向曲率分别为:

$$\kappa = \partial^3 w / \partial r^2 \partial t; \quad \lambda = -(1/r)(\partial^2 w / \partial r \partial t)$$

图 1 Tresca 屈服条件和对应的流动法则

第二阶段开始于这个圆锥形的速度场，中心的速度为  $v_0$ ，但随半径线性地减少，直到简支边界的零值。由于其屈服状态对应于 Tresca 屈服条件的 AB 段，故对运动方程积分后可得到减速方程。当中心速度减到零时，板停止运动并由此解得最后的挠度。在上述处理过程中，由于采用了 Tresca 屈服条件以及 W. Prager<sup>[7]</sup> 建议的流动法则，问题的求解得到了很大的简化。文献 [6] 所用的方法与文献 [5] 不一样，在 [5] 中，他们仔细地讨论并利用了运动较圆的连续性条件。

许多人对不同形状的压力脉冲以及矩形板进行过类似的分析。所得到的解析结果还与实验进行了比较。应变率对材料性质的影响，特别是有限变形所产生的薄膜应力的影响也得到了详细研究。这在 N. Jones<sup>[8]</sup> 的书中已作了综述。研究表明当  $w/h$  (最大挠度 / 板的厚度)  $> 0.5$  时，薄膜应力变得十分重要，当  $w/h < 10$  时，有  $\cos \theta \sim 1, \sin \theta \sim dw/dr$  (挠度的斜率，其中  $\theta$  为挠度的倾角)，Jones 还给出了二级近似解。他的预测结果与实验相当吻合，其中小变形结果很好地与曲线初始斜率相近似。当处理有限挠度时<sup>[9]</sup>，薄膜应力必须与弯曲应力一起考虑，这时需采用 Hodge 关于轴对称壳的简化的屈服条件<sup>[10]</sup> (见图 2)，结果与实验相当一致。Symonds 和 Wierzbicki<sup>[11]</sup> 还提出过完全忽略弯曲贡献的薄膜模态解。对于在冲击载荷作用下的简支圆盘，他们给出的精确薄膜模态解与 Florence 对  $w/h = 2 \sim 5$  的 6061-T6 铝圆盘所做的试验结果相吻合，但当  $w/h$  取更大的值时，以上的精确解将是一个下界。

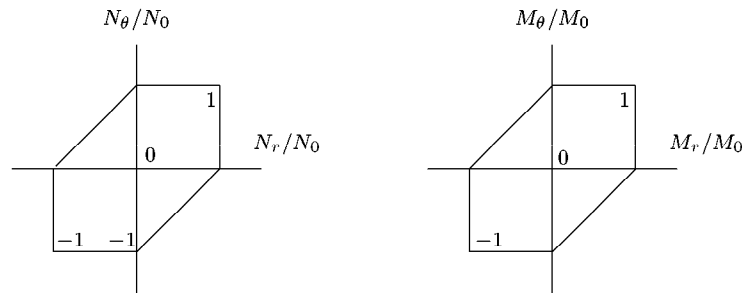


图 2 轴对称载荷作用下轴对称壳体简化的屈服条件

### 3 固支圆板的刚塑性动力学分析

进行了简支圆板的刚塑性动力学分析之后，我们又进行了固支圆板在冲击载荷作用下的刚塑性动力学分析<sup>[12]</sup>。方程仍然相同，只是边界条件不同，但此时的解要复杂得多，这是因为固支边界条件要求一开始就出现较圆，而且它在整个变形过程中始终存在。它对应于具有负曲率的向下弯曲的径向极限弯矩  $-M_0$ 。板的中心部分为以速度  $v_0$  运动的圆形平台，它被另一个较圆

环绕, 对应于具有正曲率朝上弯曲的极限弯矩。

第一个铰圆是固定的, 第二个铰圆是运动 (收缩) 的。它们分别对应 Tresca 屈服条件上的  $C$  点和  $A$  点, 圆板的其余部分对应于两点之间的状态, 即  $AB$  和  $BC$ 。其次, 我们考虑了对应于这些状态相关联的流动法则, 只是在  $BC$  段存在负曲率。这样, 在边界的附近应该存在对应于  $BC$  段的塑性区, 然后是  $AB$  段且在  $A$  点与运动的铰圆相连。令板中对应于  $B$  点的圆的半径为  $r_1$ , 板中央运动的铰圆半径为  $r_0$ , 在冲击载荷开始时它们都起始于板的边界  $R$  处, 但是具有不同的收缩率, 令  $r_1$  的收缩率为  $\xi$ ,  $r_0$  的收缩率为  $\eta$ , 那么速度的分布由三部分组成, 即, 一个半径为  $r_0$  速度为  $v_0$  的中央圆平台; 以  $r_0$  和  $r_1$  为边界的速度线性变化的环形区; 和以  $r_1$  和  $R$  为边界的环形区。最外层环形区的速度为对数分布, 这可以从 Tresca 屈服条件上对应于  $BC$  段的流动法则求得。通过对不同区域运动方程的积分, 可得到关于  $\xi$  和  $\eta$  的两个联立的一阶非线性常微分方程。用我从 RM Rosenberg 那儿学到的等倾线方法可以对以上方程进行数值求解。然而数值求解过程很繁琐, 那时我不得不用手摇式计算机进行计算, 幸好没费太大的劲就得到相当精确的结果, 当中心铰圆收缩到零时, 板的运动将进入第二阶段, 此后可进行类似的处理, 直到板终止运动。最后的结果表明, 由于边界固支, 板的塑性变形过程所持续的时间仅仅是简支板的 54%, 相应地, 最终挠度的幅值也减小到后者的 56%。

此后, 有许多关于固支圆板的理论和实验研究。Wierzbicki 和 Florence<sup>[13]</sup> 考虑了应变率效应和大变形, 发现它们对减少板的最终挠度具有同等的重要性。类似地, 板上的不同压力分布和脉冲形状的影响也得到了研究<sup>[8]</sup>, 后来, 沈伟琴和 Jones<sup>[14]</sup>, 李庆明和 Jones<sup>[15]</sup>, 文鹤鸣和 Jones<sup>[16]</sup> 进一步从理论和实验上考虑了横向剪切和转动惯量的影响, 他们还考虑了大变形引起的薄膜应力和屈服时的剪切应力, 当考虑横向剪切时, 他们采用了推广的 Johansen 屈服面, 它在  $M_r/M_0$ ,  $M_\theta/M_0$  和  $Q/Q_0$  空间中是一个单位立方体, 这里  $Q$  为广义剪应力。

#### 4 梁的弹塑性动力学分析

Symond 和 Fleming<sup>[17]</sup> 重新研究了刚塑性分析的有效性。最初认为, 如果塑性变形产生的塑性耗散能超过结构能够吸收的最大弹性能的 3 倍, 忽略弹性变形是很合理的。Stronge 和余同希在文献 [3] 中对梁的刚塑性分析与弹塑性分析的比较进行了综述。关于悬臂梁的研究表明, 其差别尤其表现在变形形式的某些细节方面。对于承受局部载荷的大结构, 在冲击点附近, 刚塑性分析有很好的近似, 在远处则不精确了。对于板和壳仍然缺乏类似的分析, 它们也许会相当复杂。从刚塑性分析的简单性来看, 我个人认为在设计的最初阶段, 这种分析可以起指导作用, 但是在受到局部载荷的情况下应该谨慎。

#### 5 压力脉冲形状的影响

有些作者研究了冲击载荷下压力脉冲形状对结构塑性动力响应的影响。Youngdahl<sup>[18,19]</sup> 引入有效载荷和有效冲量来消除脉冲形状对最终变形的影响。我们在文献 [20] 中依据有效载荷与有效冲量的概念构建了特征曲线来估算一般冲击载荷下结构 (梁、板和壳) 动态塑性变形的最终挠度, 最大的偏差在 5% 以内, 但是难以确定有效载荷与有效冲量。对于相对大的载荷, 我们还建议采用基于总有效载荷与总有效冲量概念构建特征曲线以简化计算。当总有效载荷较大时, 分散性较小, 这种方法比 Youngdahl<sup>[18]</sup> 的方法更容易使用。

#### 6 壳体的刚塑性动力学分析

基于壳体的极限分析所取得的成果, Hodge<sup>[21]</sup> 和其他几位作者进行了壳体的塑性动力学分析。对于一般载荷下的壳体, 将变得十分复杂, 甚至对于夹心壳, 屈服条件也仍然是很复杂的。

对于柱壳和球壳研究的一般性综述请见文献 [8]. 对此我只简单地补充一点, 宋国玄和王仁 [22] 对受横向和轴向冲击载荷作用的悬臂短壳进行了分析. 我们比较了不同屈服条件的影响, 即内接多面体屈服面和外切多面体屈服面的这两种近似的影响. 如果以上两种屈服面仅仅是在尺度上有差别, 以使得相关联的流动法则是一样的, Hodge 建议的尺度因子使相应的静态极限载荷相同的观点对于动态情况也是成立的. 但是如果两个近似的屈服面不同, 即相关联的流动法则不同, 那么两者的最大挠度和能量吸收将会有相当大的差别.

## 7 最终位移 (挠度) 估算的近似方法

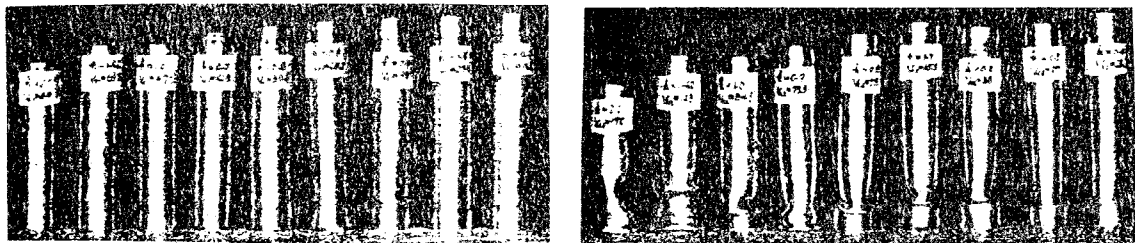
因为许多实际问题是难以处理的, 所以近似的结果对于初始设计也是十分有用的, 有两种近似的方法可以用来估算结构在动态载荷下的最终位移:

(1) 上下限方法可以给出位移的上和 / 或下限. 在理想情况下, 它给出的近似值可以从上和下很好地逼近精确解. 冲击载荷作用下结构位移的上限定理首先由 Martin<sup>[23]</sup> 提出, 而位移的下限定理则由 Morales 和 Nevill<sup>[24]</sup> 给出, 这些定理后来被推广到更一般的情形. 黄筑平<sup>[25]</sup> 指出, 文献 [24] 给出的位移下限需要对所选的运动许可场作出某些限制性条件 (而这种限制性条件实际上是无法知道的, 译者注), 为此, 他提出了一个新的位移下限定理, 其中用到了动力响应时间的上限. 新的下限定理对所选许可场未加任何限制性条件. Symonds 在文献 [26] 中讨论了黄氏定理. 此外, 新的下限定理也被推广到一般载荷情况<sup>[27]</sup>, 通过使用等效幂次黏性材料本构关系, 黄氏下限定理还被推广到黏塑性的情况<sup>[28]</sup>.

(2) 模态近似方法是由 Martin 和 Symonds<sup>[29]</sup> 提出的. 该方法的解能满足所有场方程但不精确满足初始条件. 黄筑平和王仁<sup>[30]</sup> 对这一技巧的进展情况进行了综述. 将模态近似方法和上下限定理结合起来, 文献 [31] 提出了一个结构最终位移分布的近似表达式, 可用于当通常的模态近似方法有很大误差的情形.

## 8 轴向冲击下圆柱壳的动态塑性失稳

1979 年, 我们重新开始了轴向冲击下较长壳体的实验工作, 进行了塑性动力学分析. 由此提出了失稳问题. 所用材料为铝合金和碳钢. 为了使壳体先产生塑性变形后再失稳, 就需要使用较厚的壳. 引起塑性失稳的第一临界冲击速度在试验中得到了证实, Vaughan<sup>[32]</sup> 称这一临界速度为速度阈值. 变形后的壳沿整个长度方向上具有轴对称的屈曲波形 (见图 3(a)). 当增加冲



(a) 9 个不同  $a/h$  值 (4.7 ~ 25.5) 的壳体  
在  $V_{c1}$  下的屈服形式

(b) 9 个不同  $a/h$  值 (4.7 ~ 25.5) 的壳体  
在  $V_{c2}$  下的屈服形式

图 3

击速度后, 变形后的形状仍然是轴对称的, 尽管屈曲半波数可能有些变化. 但是, 如果进一步增加冲击速度到大约阈值的 2 倍后, 壳体变形将成为非均匀或非轴对称的 (见图 3(b)), 我们称以

上的速度为第二临界速度<sup>[33,34]</sup>。注意，在达到第二临界速度之前，壳的内部看上去是完好无损的，轴向缩短也相当小。在适当条件下，壳体仍然能够作为一个容器被使用，因此对冲击速度的设计稳定性准则来说，它可以提高到第二临界速度。图4给出了径厚比( $a/h = \text{半径} / \text{厚度}$ )从4.7到25.5的铝合金壳的试验结果，速度比从1.91到1.08，图中水平虚线为 $a/h = 38.9$ 的弹性壳的动态临界速度的计算值10.9 m/s。

最近，马宏伟等人<sup>[35]</sup>对铜管作了类似的试验，得到了大约为速度阈值3倍的第二临界速度。事实上，我们的理论分析已经表明，当径厚比更小时，速度比值可以大于2。但是在他们的实验中，是由材料性质的差别引起的。文献[36]给出了以上问题的近似分析方法。轴向冲击作用下的后屈曲塑性分析的困难在于运动方程中轴向位移 $u$ 和径向位移 $w$ 的耦合。严格求解耦合方程是很复杂和困难的。在以前的分析中， $u$ 与 $w$ 之间的关系是事先假设(例

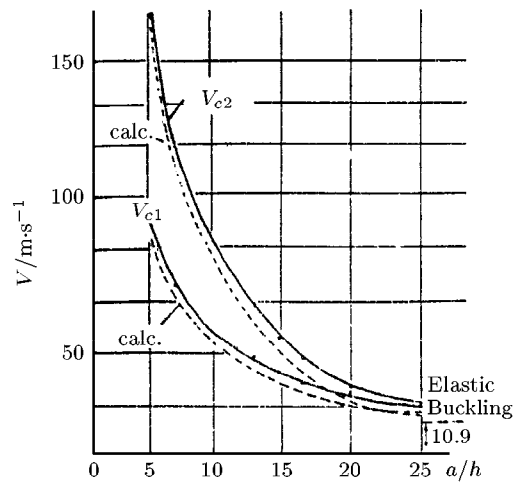


图4  $V_{c1}$  和  $V_{c2}$  随  $a/h$  的变化

如，在文献[32]中假设 $u$ 是常数或者假设 $u$ 从冲击速度 $v$ 线性减少到固定端0值)完全忽略了 $u$ 对 $w$ 的影响，因此在径向运动方程中只有 $w$ 是未知的。受流体流动稳定性处理方法的启发，茹重庆和王仁在文献[36]中建议引入因子 $\beta$ 来近似考虑 $u$ 对 $w$ 影响，将轴向应变增量 $\Delta\epsilon_x$ 与 $w'^2$  ( $\Delta\epsilon_x$ 为有限变形公式中的第二项)联系起来，而 $\beta$ 可以通过本构关系近似地确定，并且与屈服应力联系起来作为常数处理。因此，只需要求解径向运动方程就可以得到 $w$ ，然后再将求得的解代回到 $u$ 的精确方程来求得 $u$ 。

## 9 关于第二临界速度

文献[33, 37]给出了第二临界速度的理论解释。我们认为，由于冲击后的对称屈曲波形的增长，当速度超过阈值，壳体外层由屈曲产生的拉伸应变率将超过轴向冲击产生的压缩应变率，这意味着应变率可以反向。以此为准则并假设壳体有初缺陷，可以得到一个计算第二临界速度的公式，计算所得的速度与实验符合得很好，只是有点偏低。图4表明第二临界速度与速度阈值的比值随着壳体的厚度变薄逐渐减小直至为1。之后，计算的第二临界速度甚至小于速度阈值，这意味着动态轴向载荷作用下的薄壳总是非轴对称屈曲的。

## 10 动态稳定充分性的能量准则

利用经典的能量准则并考虑冲击载荷下的稳定性特征，王仁 and 茹重庆<sup>[38]</sup>提出了一个修正的动态稳定充分性的能量准则。基本思想叙述如下：对于一个受一定冲击载荷作用的系统，如果给系统的主导运动施加任意运动许可的扰动，使系统由于扰动而吸收或耗散的能量总大于载荷在扰动上所作的功，那么该主导运动是稳定的。文献[39]用以上的能量方法预测了发生非轴对称屈曲的第二临界速度的下限值。

## 11 Shanley 假定和应力波效应

当研究在轴向冲击载荷下弯曲波对长柱体动态屈曲的影响时, 揭敏等人<sup>[40]</sup> 在实验中发现, 在屈曲开始时, 柱体两侧的应力仍然在增加. 这意味着准静态下柱体塑性失稳时的 Shanley 假定在动态下也成立. 文献 [41, 42] 对圆柱壳屈曲时的应力波效应也进行了实验研究. 除了证实以上结果在壳的屈曲中也成立外, 陈长安等人<sup>[41]</sup> 发现正是由于应力波多次反射的增强作用使得屈曲在壳的一端开始, 王仁和刘宗德<sup>[42]</sup> 计算了壳体中黏塑性波的传播和反射. 他们试图确定冲击速度和端部局部化的大屈曲波形的关系, 即要确定屈曲首先是发生在冲击端还是固定 (反射) 端. 徐新生等人<sup>[43]</sup> 考虑了弹塑性应力波对半无穷长圆柱壳在轴向冲击载荷下动态屈曲的影响. 在我看来, 关于这一课题仍然有许多工作要做.

## 12 第二临界速度是二次分叉吗?

回头来看, 当塑性失稳涉及到几何非线性和动态时, 会产生一个问题, 均匀的对称屈曲模式向非均匀的或非轴对称的模式转变, 即第二临界速度的出现, 是非线性力学中的二次分叉吗? 有人对这个问题进行过讨论, Tvergaard<sup>[44]</sup> 考虑圆柱壳受内压的情形, 他提到有两个失稳阶段, 第一个是轴对称鼓胀, 第二个是由于拉伸失稳引起的局部颈缩. 近来, 胡守信<sup>[45]</sup> 考虑了在三维有限变形条件下的受压缩的杆, 且得到了二次分叉. 基于以上考虑, 我在文献 [34] 中曾提出了两个问题, 第二临界速度是二次分叉吗? 这一转变所涉及的更深刻的、内在的机制是什么?

## 13 结语

最近几年, 塑性动力学分析已经扩大到材料动态断裂的研究, 即含缺陷物体或损伤结构的失效. 这些研究领域成果卓著, 但在这里我不作评论. 可是, 我想对以后的研究发表一点看法, 在我看来, 在材料的动态性能和结构的动力响应的研究中包含应力波效应是值得做的. 以前认为, 由于结构的尺寸与应力波在研究的时间区间内能够传播的距离相比如此之小, 应力波效应可以完全忽略. 对于含自由边界的细薄结构, 这肯定是对的, 反射时应力不增强. 但如果边界是刚性的或者坚固的, 反射后应力增强, 正如带有附加质量的飞行壳体高速撞击一坚硬的边界, 波反射后应力增强, 这样, 壳可以首先在一端屈曲, 至于哪一端则取决于撞击速度<sup>[42]</sup>. 对于含有硬界面的复合材料, 也会发生同样的事情. 对于这一目标仔细的实验研究似乎是最重要的.

## 参考文献

- 1 Jones N. Some comments on several phenomena in structural impact. In: Batra R C, Mal A K, MacSithigh G P, eds. Impact, Wave, and Fracture. AMD Vol 205, ASME, 1995. 153~168
- 2 Lee E H, Symonds P S. Large plastic deformations of beams under transverse impact. *J Appl Mech*, 1952, 19: 308~314
- 3 Stronge W J, Yu T X. Dynamic Models for structural Plasticity. London: Springer-Verlag, 1993. Ch 5
- 4 Hopkins H G, Prager W. The load carrying capacities of circular plates. *J Mech Phys Solids*, 1953, 2: 1~13
- 5 Hopkins H G, Prager W. On the dynamics of plastic circular plates. *Z Ang Math Phys*, 1954, 5: 317~330
- 6 Wang A J. The permanent deflection of a plastic plate under blast loading. *J Appl Mech*, 1955, 22: 375~376
- 7 Prager W. On the use of singular yield conditions and associated flow rules. *J Appl Mech*, 1953, 20: 317~320
- 8 Jones N. Structural Impact. London: Cambridge Univ Press, 1989 (paperback edition 1997)
- 9 Jones N. Impulsive loading of a simply supported circular rigid-plastic plate. *J Appl Mech*, 1968, 35: 59~65
- 10 Hodge Jr P G. Yield conditions for rotationally symmetric shells under axisymmetric loading. *J Appl Mech*, 1960, 27: 323~331
- 11 Symonds P S, Wierzbicki T. Membrane mode solutions of impulsively loaded circular plates. *J Appl Mech*, 1979, 46: 58~63

- 12 Wang A J, Hopkins H G. On the plastic deformation of a built-in circular plate under impulsive load. *J Mech Phys Solids*, 1954, 3: 22~37
- 13 Wierzbicki T, Florence A L. A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates. *Int J Solids Struct*, 1970, 6: 553~568
- 14 Shen W Q, Jones N. Dynamic response and failure of fully clamped circular plates under impulsive loading. *Int J Impact Eng*, 1993, 13: 259~278
- 15 Li Q M, Jones N. Blast loading of fully clamped circular plates with transverse shear effects. *Int J Solids Struct*, 1994, 31: 1861~1876
- 16 Wen H M, Jones N. Experimental investigation into the dynamic plastic response and perforation of a clamped circular plate struck transversely by a mass. *Proc I Mech Eng*, 1994, 208C: 113~137
- 17 Symonds P S, Fleming Jr W T. Parkes revisited: on rigid-plastic and elastic-plastic dynamic structural analysis. *Int J Impact Eng*, 1984, 2: 1~36
- 18 Youngdahl C K. Correlation parameters for eliminating the effect of pulse shape on dynamic plastic deformation. *J Appl Mech*, 1970, 37: 744~752
- 19 Youngdahl C K. Influence of pulse shape on the final plastic deformation of a circular plate. *Int J Solids Struct*, 1971, 7: 1127~1142
- 20 Zhu Guo-Qi, Huang Yong-Gang, Yu Tong-Xi, Wang Ren. Estimation of the plastic structural response under impact. *Int J Impact Eng*, 1986, 4: 172~283
- 21 Hodge Jr P G. Impact pressure loading of rigid plastic cylindrical shells. *J Mech Phys Solids*, 1955, 3: 176~188
- 22 Song Guo-Xuan, Wang Ren. Rigid plastic analysis of a cantilever cylindrical shell under transverse and axial impulsive loading. In: Proc 1st Symp on Limit Analysis and Plasticity Theory. Dalian, China: Science Press, 1965. 77~85 (in Chinese)
- 23 Martin J B. Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua. *J Eng Mech*, Div, Proc ASCE, 1964, 90(EM5): 27~42
- 24 Morales W J, Nevill G E. Lower bounds on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua. *AIAA J*, 1970, 8: 2043~2046
- 25 Huang Z P. Revised lower displacement bounds on impulsively-loaded rigid-plastic structures. *Mech Res Comm*, 1985, 12: 257~264
- 26 Symonds P S. On Huang Zhuping's theorem for a lower displacement bound. *Mech Res Comm*, 1985, 12: 265~270
- 27 Huang Z P, Jin Q L. Lower displacement bound estimates of plastic dynamic response of structures under arbitrary loading. In: Yu T X, Wang D J, eds. Plasticity and Geodynamics. Peking University Press, 1990. 114~123 (in Chinese)
- 28 Huang Z P, Vaughan H. A displacement lower bound for viscous continuum subjected to impulsive loading. *Int J Non-linear Mech*, 1987, 22: 291~296
- 29 Martin J B, Symonds P S. Mode approximations for impulsive-loaded rigid-plastic structure. *J Eng Mech*, Div, Proc ASCE, 1966, 92(EM5): 43~66
- 30 Huang Z P, Wang R. Mode approximation method in plastic dynamic response. *Advances in Mechanics*, 1985, 15: 1~20 (in Chinese)
- 31 Huang Z P, Sun L Z. The optimal mode and an approximate expression of final displacement in dynamic response of structures. *J Appl Mech*, 1992, 59: 33~38
- 32 Vaughan H. The response of a plastic cylindrical shell to axial impact. *Z Ang Math Phys*, 1969, 20: 321~328
- 33 Wang R. Dynamic plastic stability of cylindrical shells. In: Lee W B, ed. Advances in Engineering Plasticity and Its Applications, Amsterdam, Elsevier, 1993. 63~70
- 34 Wang R. On secondary bifurcation of a slender body...Is the second critical velocity of a circular cylindrical shell under axial impact a secondary bifurcation? In: Wang Lili, ed. Proc Sino-Japanese Symp Deformation/Fracture of Solids, Huangshan, China, 1997. Ningbo, China: Ningbo Univ Press, 1998. 1~7
- 35 Ma Hongwei, Cheng Guoqiang, Zhang Shanyuan, Yang Guitong. Experimental studies on dynamic plastic buckling of circular cylindrical shells under axial impact, submitted to *Acta Mech Sinica*, 1999
- 36 Ru C Q, Wang R. On the post buckling analysis of plastic structures under impulsive loading. *Acta Mech Sinica*, (Eng edition), 1990, 6: 45~49
- 37 Wang Ren, Han Mingbao, Huang Zhuping, Yang Qingchun. An experimental study on the dynamic axial plastic buckling of cylindrical shells. *Int J Impact Eng*, 1983, 1: 249~256
- 38 Wang R, Ru C Q. An energy criterion for the dynamic plastic buckling of circular cylinders under impulsive loading. In: Reid S R, ed. Metal Forming and Impact Mechanics, Pergamon Press, 1985. 213~223

- 39 Ru Chong-Qing and Wang Ren. Two plastic buckling problems of cylindrical shell under impulsive loading. *Acta Mech Solida Sinica* (Eng edition), 1988, 1: 111~115
- 40 Jie Min, Han Ming-Bao, Wang Ren. Effect of flexural waves on the dynamic buckling of a long column under axial impact. In: Proc Int Symp on Intense Dynamic Loading and Its Effect. Chengdu, China: Sichuan Univ Press, 1992. 511~515
- 41 Chen Changan, Su Xianyue, Han Mingbao, Wang Ren. An experimental investigation on the relation between the elastic plastic dynamic buckling and the stress wave in cylindrical shells subjected to axial impact. In: Proc Int Symp on Intense Dynamic Loading and its Effects. Chengdu, China: Sichuan Univ Press, 1992. 543~546
- 42 Wang Ren, Liu Zhong-De. Stress wave effect on the dynamic plastic buckling of cylindrical shell under axial impact. Abstract, ICTAM 1992, Hifa, Israel, 1992
- 43 Xu Xinsheng, Su Xianyue, Wang Ren. Dynamic buckling of elastic-plastic cylindrical shells and axial stress waves. *Science in China Series A*, 1995, 38: 472~480
- 44 Tvergaard V. Bifurcation in elastic-plastic tubes under internal pressure. *Eur J Mech, A/Solids*, 1990, 9: 21~35
- 45 Hu Shouxin. Global analysis of secondary bifurcation of an elastic bar. *Acta Mech Sinica*, (Eng edition), 1995, 11: 327~336

(中国科学院力学研究所 刘希国 译自 A retrospective on dynamic plasticity and dynamic plastic instability. *Appl Mech Rev*, 2000, 53(2): R5~R10, 北京大学力学与工程科学系 黄筑平 刘宗德 校)

## A RETROSPECTIVE ON DYNAMIC PLASTICITY AND DYNAMIC PLASTIC INSTABILITY

Ren Wang (formerly AJ Wang)

Dept. of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China; 0461raj@pku.edu.cn

**Abstract** First of all this is not a general review on these subjects, it is a personal account and some personal views about them. It also introduces some works done in China. For a recent review see Jones<sup>[1]</sup>.

**Keywords** dynamic plasticity, dynamic plastic instability, retrospective