

# 水波动力学研究进展

吴耀祖

加州理工学院, Pasadena, Calif. 91125 U.S.A.

**前言与祝辞** 数学大师 Carl Friedriks Gauss 在他发表的力学基础定律一文 (1829)<sup>[1]</sup> 中, 曾对科学研究的着眼点, 提出了高瞻远瞩的见解: “在科学进展和学习修养的途径上, 总是易先于难, 简先于繁, 特殊先于一般. 然而在到达峰顶后, 悠然回顾, 常有骤得宏观之见, 犹如静力学乃是力学的一隅同样地显而易见.”

鉴于在数学和经典力学发展的黄金时期, 有 Joseph Louis Lagrange 引入的普遍运动方程 (1788) 和 William Rowan Hamilton (1834) 首创的正则方程, 堪称无与伦比. 以此回顾, 或可将 Gauss 的论点再推而广之, 曰: “科学研究的最终目标, 无过于在探索每一学科的基本原理时, 要把准确、简洁、优美和普适统一起来. 对这项工作最能有助益的事, 就是要首先深入了解所观察的现象, 提出明确、深刻的物理概念.”

适逢“力学进展”期刊创立三十周年, 值大家热烈举庆之际, 回顾三十年来, 对众多的力学基础问题中精确、简洁、优美和普适的概念、原则、立论进行了综述, 并为今后工作树立了典范, 值得热诚祝贺. 谨以此共勉, 并循此作恳切和令人鼓舞的展望.

**摘要** 水波动力学, 历史悠久, 内容丰富, 此文仅进行简要的历史回顾, 以阐明其进展的思想、智慧、途径以及这门学科对其它学科进展的贡献和影响. 随后, 引进一个新理论, 能模拟三维、非定常、有完全非线性和频散 (或色散) 性的重力毛细波, 在深度任变的水中传播和演化的现象. 此外, 对二维水波在海滩上之涨落问题, 提供一个 Lagrange-Euler 观点相结合的精确计算方法, 以供读者推广和应用. 此外, 对外力作用下的水波系统共振现象, 作些补充论述.

**关键词** 水波, 重力毛细波, 非线性效应, 频散 (或色散) 效应, 孤立波, 孤立子, 海滩波, 精确定论, 精确解, 外力共振生波, 非线性水波稳定论

## 1 引言

水波现象, 引人入胜. 水波理论这一学科领域内容极其广泛. 典型的例子有涟漪荡漾的毛细波, 有海滩上的滚滚碎波, 有大海上的惊涛骇浪, 更有潮汐, 冲浪, 海啸和海洋内层的内波, 千变万化, 性态各异. 在所有波动现象中, 水波有它独特之处, 为其他波动所不及. 首先, 水波有非常显著的频散特性, 使得不同长度的水波以不同的‘相速’传播, 更有不同的‘群速’传输波能. 例如在深水中, 群速与相速之比, 由极短毛细波的  $3/2$  连续降为重力波的  $1/2$ . 这么宽广幅

度的频散, 非其他介质波动可及. 此外, 还有水波的非线性效应 (即解的叠加原理不再成立) 随波幅而增加, 这是显而易见的. 若看到海滩上翻卷的大浪, 就不言而喻了.

以水波模型而言, 企求阐释和预测不同类型的水波现象, 总是先从选取适当的尺度和参数开始. 在这些主要的物理参数中, 两个主要参数是

$$\alpha = a/h, \quad \varepsilon = h^2/\lambda^2 \quad (1)$$

用来衡量一个 (或一列) 波幅为  $a$ , 波长为  $\lambda$ , 在水深为  $h$  上的行波 (或驻波), 由  $\alpha$  来指示波的非线性效应,  $\varepsilon$  指示波的频散效应. 若水深再有变化分布, 即与  $\alpha$  和  $\varepsilon$  形成水波理论三个主要参数. 此外, 当然还有代表其他物理特性的参数, 诸如惯性力与重力比, 表面张力与重力比, 流体密度非均匀, 更有参照框旋转效应等, 如 C.C Lin & A. Clark(1959), J.D. Cole(1968)<sup>[2,3]</sup> 以及 Sir James Lighthill (1978)<sup>[4]</sup> 所阐明和指出的那样, 必要时, 也得考虑所有这些参数的综合作用, 这就构成水波模拟理论的框架和范畴.

下文中首先进行历史的简要回顾. 继之引进一个统一理论, 能模拟三维、非定常、有完全非线性和频散性的重力毛细波, 在深度任意变化的水中传播和演化现象以及一些相关论证. 此外, 对二维水波在倾斜海滩上之涨落问题, 提供一个 Lagrange-Euler 观点相结合的精确计算方法. 这些新理论和新方法将以简要的应用为实例, 以证明其作进一步推广和实际应用的可能性.

本文拟对水波动力学作一个综述, 并力求全面、完整. 然而, 由于篇幅和能力所限, 仍有些物理特性, 诸如黏性耗散效应、海洋内波现象、旋转效应等, 未能予以展开讨论.

## 2 历史的简要回顾

有关微幅重力波, 上述  $\alpha$  和  $\varepsilon$  两个参数可合二为一, 变成  $\tilde{\alpha} = \alpha\sqrt{\varepsilon} = a/\lambda \ll 1$  (以示波陡很小, 且将水深  $h$  的效应隐去, 见图 1), 以此建立的线性理论, 已成经典, 其中所包含的原理和学问,

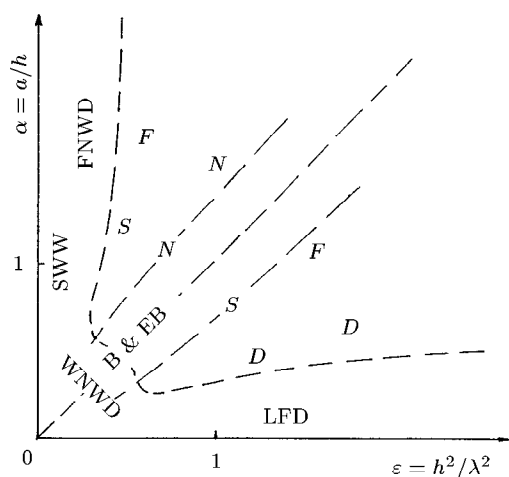


图 1 对于波幅  $a$ , 波长  $\lambda$ , 水深为  $h$  的水波, 其非线性效应和频散效应的参数区. 参数范围由程度不同的线性、弱、强、完全非线性 (L, WN, SN, FN) 和弱、强、完全色散 (WD, SD, FD) 区域构成.  $\alpha = \varepsilon$  线附近是 Boussinesq 和广义 Boussinesq 区.  $\varepsilon = 0$  是经典线性和非线性浅水波区 (SWW).

十分丰富. 其主要原因是由于流场内的频散效应仍极完整, 易于揭示复杂现象的机理. 对非线性水波的研究, Sir George Stokes (1847)<sup>[5]</sup> 是先驱者. 他首先采用空间坐标作自变量, 将在深水中的周期重力水波在  $0 < \tilde{\alpha} \ll 1$  处作级数展开而获得头三阶分析解. 其中的关键是基于假设频散关系也要如波幅一样需作  $\tilde{\alpha}$  的展开, 否则无解. 这一创见, 促进了摄动理论的发展和成熟,

在数学上成为广泛应用的工具. 然而三十余载后, Stokes (1880)<sup>[6]</sup> 在撰写论文集进行回顾时改用复速度势为自变量作  $\tilde{\alpha}$  展开, 推得计算深水重力波的五阶解, 又对有限 (均匀) 水深重力波得到三阶解. 由此足见采用不同自变量对分析工作量有显著影响, 也可见多添一个参数 (这里是  $h = \text{const} < \infty$ ) 所引起的代数运算的复杂性. Stokes 所得的重要成果之一是发现频散关系不仅和频率有关, 也与波幅有关. 继 Stokes 的先驱工作后, 由 Wilton (1914)<sup>[7]</sup> 推广深水波到 10 阶解 (唯 8 阶中有误), 更由 De (1955)<sup>[8]</sup> 将有限水深波推演到 5 阶解.

进入高速计算机时代后, Schwartz (1974)<sup>[9]</sup> 按 Stokes 第二方法, 将深水重力波计算到 117 项, 即已达到最高波形 (波峰有  $120^\circ$  的内尖角). 然而考虑到其中级数之收敛性, 仍需放弃用波陡而改用波高为小参数进行展开, 还需用 Padé 近似获得数值解. Hui (1982)<sup>[10]</sup> 计算 Stokes 水波的高阶解, 引用  $(x, \psi)$  为自变量 ( $x, y$  坐标如前,  $\psi(x, y)$  是流函数) 得到一些分析简化, 推到 11 阶解. Song 和 Li (1988)<sup>[11]</sup> 在用  $(x, \psi)$  为自变量外, 更觅得一个连锁循环公式, 藉此免除各阶需要重复性的计算量, 因而能径直获得极高阶的解. 对于这类由摄动分析而得的级数收敛速率, Li (1982)<sup>[12]</sup> 应用复变函数理论, 将基于实用经验 (empirical) 的 Van Dyke (1974)<sup>[13]</sup> 法则推广, 证得一套俱全的定理, 给出一般结论, 可供广泛应用. 这些进展是极有价值的. 此外, 从数学观点求证解答之存在性和唯一性定理, 先后有 Nakrasov (1921)<sup>[14]</sup> 对深水重力波所得的非线性积分方程解作展开和 Levi-Civita (1925)<sup>[15]</sup> 的级数展开, 双双证得在某一小波幅内, 级数收敛.

在以  $\alpha$  和  $\varepsilon$  为坐标轴的参数空间, 这类级数展开法求解, 乃是由  $\varepsilon$ -轴出发, 令  $\alpha$  增值向内域伸张, 直到级数失去收敛为止. 这片区域在图 1 中以 LFD 表示, 即意为线性, 全频散 (Linear, fully dispersive) 理论区.

关于较有规则性的二维周期毛细波的研究, 历史已久. 早期有 Wilton (1915)<sup>[16]</sup> 解, Crapper (1957)<sup>[17]</sup> 的纯毛细波确解. 然而毛细重力水波理论比较繁冗. Hogan (1979, 1980, 1981)<sup>[18]</sup> 得到 5 阶解. 继之宋涛和李家春 (1989)<sup>[19]</sup> 采用  $(x, \psi)$  自变数和 REDUCE 解析语言推高到 8 阶解的分析表达式, 对表面张力的影响, 得到更深入的了解.

另一方面是模拟浅水中高幅、长波的首阶近似理论, 一般称为经典浅水理论. 开创者为 Airy (1845)<sup>[20]</sup>. 引入静水压假定, 也即意指完全略去流体在垂向的加速度效应. 若以参数表示这一理论, 相当于  $\alpha = O(1)$ , 而且  $\varepsilon = 0$ , 也即位于图 1 中的  $\alpha$  轴上. 由这一假设得到水力比拟 (hydraulic analogy). 该比拟认为: 相对于每一浅水长波流动, 即对应有一个确定的可压缩气体流动, 以气体密度比拟于全水深, 气压比拟于水深平方, 因此相当气体的比热比等于 2. 按此比拟, 浅水中任一长波, 其波速随当地波高俱增减. 这也意指波峰前缘越走越陡, 而后缘也越缓 (直至原假设不复成立), 犹如气体中强的压力波会渐陡而形成激波. 此一比拟首先应用于描述浅水中的涌潮, 也有实际现象可以观察. 但是无论如何, Airy 理论的最大缺陷是由于过分省略频散效应, 不允许永恒孤立波的存在.

一个历史插曲, 好似骤然天降而来, 这是极为动人的故事. John Scott Russell (1844)<sup>[21]</sup> 发表了他的 ‘奇遇’. 细致地描述了他 ‘偶然’ 发现的一个极为圆滑, 三十来英尺长, 一到一英尺半高, 前后对称, 在河槽中行进, 持久不变的水波. 他后来称它为 ‘孤立波’. 事渊于一艘河道客轮, 由双马拖行. 然不知何故, 双马骤停, 而河水却激动不停, 前涌成波, 弃船于后, 以恒定定形向前行进. Russell 策马追驰一阵, 终于消失于原野. 这孤立波的特征, 显然与当时公认的 Airy 理论发生矛盾, 因而引起一些争论. 直到 Boussinesq (1871, 1872)<sup>[22,23]</sup> 和 Rayleigh (1876)<sup>[24]</sup> 分别求得孤立波的分析解, 与 Russell 所见十分符合后, 遂成定论. 继之再有 Korteweg 及 de Vries (1895)<sup>[25]</sup> 对单向孤立波导出的方程, 成为后来著名的 KdV 方程. 对这类方程, Boussinesq 指出其参数相当于  $\alpha = O(\varepsilon) \ll 1$  (在图 1 中跨越  $\alpha = \varepsilon$  线而与原点不远的区域). 这一理论之获得最后认可有其深远意义: 一个重要发现之所以未能及时取得广泛认可和全面接受, 一般是因为

当时的认识水平还不能看到这个现象的真谛。

经过 70 年的停滞, 对 KdV 方程浓厚兴趣的星星之火又被 Zabusky & Kruskal (1965)<sup>[26]</sup> 的新发现重新点燃而燎原. 这个发现乃是依赖计算机将某一个有空间周期变化的初始值输入 KdV 方程, 发现这个初值在一定时间周期上会重复出现. 这个精妙绝伦的重要发现表明 KdV 方程有无穷个守恒量, 这个预见的论断的确到后来被证实. 换言之, KdV 方程不仅能支持一个, 而是能支持无穷个孤立波, 使他们在无限长的实线上传播、追赶、碰撞, 而过后完全恢复各自原有的基本特性. 为了表达具备这些特性的孤立波, 才给他们创撰了一个新名词‘孤立子’ (soliton, Zabusky & Kruskal 1965)<sup>[26]</sup>. 继此新领域开创之后, 更令人惊异的是在许多物理、地质、生物等学科的研究中都发现有孤立子现象, 因此导致跨学科合作, 使成果文献以指数型速度骤增, 成为近代数理科学发展史上极为灿烂的一章.

以上所述的 Boussinesq 和 KdV 一类的模拟水波理论可说是弱非线性, 弱频散性 (WNWD, weakly nonlinear, weakly dispersive) 理论. 当非线性效应甚强时, Green & Naghdi (1976)<sup>[27]</sup> 假设  $\alpha$  仍为  $O(1)$ , 而  $0 < \varepsilon \ll 1$  (当  $\varepsilon$  为唯一小参数), 以此导出比 Airy 理论高一阶的 Green-Naghdi 浅水理论. 以参数表示, 这类理论可称为全非线性弱频散 (FNWD-fully nonlinear weakly dispersive) 水波理论模型 (见图 1). Ertekin et al. (1984, 1986), Choi (1995), Choi & Camassa (1996)<sup>[28~31]</sup> 等, 对单层水波和二层水波现有的理论作了进一步改进.

以上论述的仍是有关封闭物理系统内的水波问题. 这类问题一般都是在无界空间内的初始值 (或初始与边界值) 问题, 即在时间  $t = 0$  时给出波高和波速 (或速度势) 在全实线上的分布, 而用适当的模型方程计算波之时间演化.

另一大分类是有关开放物理系统内的水波问题. 一提到开放, 指的是这物理系统与外界即可互相交换质量、动量和能量, 这些交换可藉水面压力 (与黏性剪切力) 分布推动或由水底的起伏变动 (以代表气象变化, 浮体和潜体运动, 水底滑坡以及地震海啸等现象). 这些由外力在水中产生波的问题, 一般已为水波理论所熟知, 例如在深水上航行船只所生的 Kelvin 尾波波型, 其水面上的包络波锥角是  $\sin^{-1}(1/3) = 19^\circ 28'$ , 而且在水深变浅时, 此角渐渐张开成  $90^\circ$  (于是波阵面横贯河道). 但是在强的非线性效应下, 会有特别奇异丰富的新现象出现. 这新现象的特征, 可以用下述实验作代表: 用一个小船模在实验水槽中的浅水上以跨临界常速 ( $\approx \sqrt{gh}$ ,  $h$  为水深,  $g$  为重力加速) 拖行, 在船肩有几乎横贯水槽的水波逐渐加高、加强而向前方水面辐射、变成自由波后继续向前滑行, 继之有第二、第三, …… 等幅的水波周期性地向前辐射. 循此在船的前缘, 有一系列逐渐增多的孤立波极为整齐地向前行进, 而后随的船模仍在继续造波. 这现象首先为哈尔滨工业大学吴德铭教授与作者在 1981 年于二维情况下的数值解绘图上发现, 与预期概念相符 (Wu, D.M. & Wu 1982, 1988, Zhung & Chuang, 1986)<sup>[32~34]</sup>. 随即在加州理工学院水槽中由二维水底拱板拖行实验证实. 与此同时, 加州大学 Berkeley 分校 J.V. Wehausen 教授与加州理工学院作者研究组合作, 由黄德波教授 (Huang, et.al. 1982)<sup>[35]</sup> 在 Berkeley 船模水槽中获得三维船模共振波的饶有兴趣的实验结果. 与此同时, 孙明光教授 (1985) 在广州中山大学水槽船模实验也独立地得到同一发现. 此后不久, 朱锦林 (Zhu 1986), Grimshaw & Smyth (1986), Zhu et al. (1986, 1987)<sup>[36~39]</sup> 在二层流体 (二层各自密度均匀) 中由外力共振产生的内孤立波与单层共振波的现象是完全相似的, 并由朱锦林 (1986)<sup>[36]</sup> 以实验证明. 继之在许多不同的物理、地质、生物等科系中也都发现极为相似、机理相同的现象. 对这一课题的综述, 见周显初 (1998), 程友良 (1998), Wu (2000)<sup>[40~42]</sup>. 在下节也将再稍详论述.

另有一种外力是流体在局地上作周期性振动, 产生一般称为 Faraday 波. 在一个狭长浅水水箱里产生共振的 Faraday 波, 首先由吴君如 (Wu et al. 1984)<sup>[43]</sup> 发现, 即在横窄方向前后作半波长振动而在纵长方向有  $\text{Sech}(x)$  的包络型驻波, 且证实这族共振驻波于超低临界波数 ( $\pi h/b \leq 1.022$ ,  $h$  为水深,  $b$  为水箱横宽) 不复存在. 然稍后 Denardo et al. (1990), Guthart &

Wu (1991)<sup>[44,45]</sup> 独立地发现在  $\pi h/b \leq 1.022$  的参数范围里有另一族扭曲型的 Faraday 共振波出现, 且 Guthart & Wu (1992, 1993)<sup>[46,47]</sup> 以分析和实验证实在这族共振波存在条件下, 它十分稳定. 对 Faraday 非线性共振波问题, 南京大学非线性声波中心在魏荣爵教授领导下贡献很多 (Wei 1990)<sup>[48]</sup>.

为了推进基础研究, 有必要建立全非线性、全频散性的水波理论. 为了实际应用, 也有必要使水深能有任意变化的分布直到滩岸水线. 在这方面, 作者近来循序做了一些工作, 逐步前进, 得到一个颇有普遍意义的水波理论, 能分析和计算行进于单层均匀深度的水中 (Wu 1997; 1998a,b,c; 1999a)<sup>[49~53]</sup> 或在双层有变深度的水中 (Wu 1999b)<sup>[54]</sup>, 或在单层任变深度的水中 (Wu 2000)<sup>[42]</sup> 的水波. 三维、非定常、全非线性、全频散性的重力毛细水波理论虽仍仅局限于无黏的流体, 但完全采用流场界面上的流函数作基本变量, 故较原有 Euler 系统减少了一维空间. 它的不同程度的近似都简化成现有的其他水波理论, 这就证明了这一理论的普适性. 这些对照相比的实例将在这个新水波理论模型的应用上作简略论述.

结束这段历史回顾, 可以指出, 几乎每次在水波理论上有重大突破性进展时, 都在相关的学科领域中引起类似的重大进展, 尤其是在物理概念和数学方法上奠定了新基石. 这些多学科的相互交流、切磋、合作和论证, 真是给近代科学史增添了光辉灿烂的篇章. 这也可说明水波理论的进展对科学的贡献是很深远的. 思其所以然, 似有两点值得提出. 一是水波的非线性和频散性较其他波动理论的视野 (scope) 远为广阔, 因此所有临界共振现象的框架也稍为宽阔, 所以较易发现. 二是对水波现象的观察, 一般说来, 只要能集中注意力, 不至于过度依赖精密仪器. 例如 Russell 偶遇的孤立波, 是有目共睹的.

### 3 问题和提法

目前的问题是要完成精确描述三维、非定常、不可压缩、无黏性的水波, 而水深  $h(\mathbf{r}, t)$  可随水平面上位矢  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  和时间  $t$  作任意变化的一般水波问题. 任意水深与时间的变化是足以代表潜体运动, 水底滑坡、沙滩运动, 甚至地震海啸等现象, 流体以速度  $(\mathbf{u}, w) = (u, v, w)$  在流场中运动, 下界为海底  $z = -h(\mathbf{r}, t)$ , 上界是水面  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$ , 在水面静止时为  $z = 0$ . 在这前提下, Euler 的连续性方程、水平和垂向动量方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + w_z = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + w \mathbf{u}_z = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dt} = w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w w_z = -\frac{1}{\rho} p_z - g \quad (4)$$

其中  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, 0)$ ,  $(\partial_x = \partial/\partial x, \text{等})$  是水平面上的梯度算子,  $d\mathbf{u}/dt$  是随体加速度,  $p$  是水压,  $\rho$  是定常水密度,  $g$  是重力加速度. 此外, 边界条件是

$$\hat{w} = \hat{D}\zeta \quad \text{on } z = \zeta(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

$$p = p_a(\mathbf{r}, t) + \rho\gamma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } z = \zeta(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

$$\check{w} = -\check{D}h \quad \text{on } z = -h(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$

其中  $\hat{D} = \partial_t + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla$ ,  $\check{D} = \partial_t + \check{\mathbf{u}} \cdot \nabla$ ,  $p_a(\mathbf{r}, t)$  是水表面上的任何外压分布 (大气压为 0),  $\rho\gamma$  是均匀的表面张力,  $\mathbf{n}$  是水面上外向的单位法矢. 再有  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{w})$ ,  $(\check{\mathbf{u}}, \check{w})$  将称为界面函数, 界面函数  $\hat{f}(\mathbf{r}, t)$  和  $\check{f}(\mathbf{r}, t)$  定义为任何流体函数  $f(x, z, t)$  在水表面  $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$  和水底  $z = -h(\mathbf{r}, t)$  的函数

值

$$f(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t) = \hat{f}(\mathbf{r}, t), \quad f(\mathbf{r}, -h(\mathbf{r}, t), t) = \check{f}(\mathbf{r}, t) \quad (8)$$

此外再假设流场无旋, 因此有速度势  $\phi(\mathbf{r}, z, t)$ , 给出  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ ,  $w = \partial\phi/\partial z$ , 并满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\phi + \phi_{zz} = 0 \quad (9)$$

此外, 还有 Bernoulli 方程

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\mathbf{u}^2 + w^2) + gz + \frac{p}{\rho} = 0$$

此式在条件 (6) 下给出边界条件

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\mathbf{u}^2 + w^2) + g\zeta + \gamma\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\rho}p_a \quad (z = \zeta(\mathbf{r}, t)) \quad (10)$$

最后, 我们再假设流场在水平面各方无界, 在无穷远处运动静止,  $\phi$  和  $\zeta$  正规地趋于 0.

#### 4 Stokes 非线性水波

如历史回顾所述, Sir George Stokes (1847)<sup>[5]</sup> 是将线性水波理论推广到高阶的非线性和频散性水波理论的先驱. 一经推广, 使我们视野开阔, 看到一些新概念. 首先见到周期性水波能在非线性范畴内存在, 这是由高阶谐波之助. 再者, 虽然线性频散关系仅与波频有关, 次高一阶的非线性频散关系即变成波频和波幅的二元函数. 这些重要概念俱为奠定此后发展数学中摄动理论的基础, 我们简要地将 Stokes 非线性水波分析温故于下.

首先采用无限小波幅的假设, 视  $|\phi|$  和  $|\zeta|$  为  $O(\alpha) \ll 1$ , 而  $\alpha = a/h$  是波幅为  $a$  在均匀水深  $h$  上的波. 此外, 为简化分析, 设表面张力和水面大气压都为 0 ( $\gamma = 0$ ,  $p_a = 0$ , 因为这些效应都可迭加). Stokes 的总法则的主要概念是将所有流体在水表面的函数对水面平均位移  $z = 0$  作级数展开 (使各阶解答都可迭加成为高阶解). 如此, 我们随流体质点对动力边界条件 (10) 取时间微分, 并应用 (4) 式而得

$$F(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t) \equiv \phi_{tt} + g\phi_z + \partial_t(\nabla_o\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_o\phi) \cdot \nabla_o(\nabla_o\phi)^2 = 0 \quad (11)$$

其中  $\nabla_o = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ . 此式变量虽然仅有  $\phi$ , 变量  $\zeta$  仍在  $\phi$  函数的自变量中 (argument) 隐含. 因此此式对  $z = 0$  的级数展开即得

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \zeta^n \partial_z^n F(\mathbf{r}, 0, t) = 0 \quad (N \leq \infty) \quad (12)$$

我们若将  $\zeta$  从 (10) 和 (12) 式中消去, 即可得到单一方程式, 而其中变量仅有  $\phi(\mathbf{r}, 0, t)$  (和它的各阶微分). 例如取  $N = 3$  即得

$$F(\mathbf{r}, 0, t) + \zeta_{(2)} F_z(\mathbf{r}, 0, t) + \frac{1}{2} \zeta_{(1)}^2 F_{zz}(\mathbf{r}, 0, t) + O(\alpha^4) = 0 \quad (13)$$

其中  $\zeta_{(n)}$  是 (10) 式中将  $\zeta$  对  $\phi(\mathbf{r}, 0, t)$  展开到  $O(\alpha^n)$  阶, 目下即是

$$\zeta_{(1)} = -\frac{1}{g} \phi_t \Big|_{z=0}, \quad g\zeta_{(2)} = -\left\{ \phi_t + \frac{1}{2}(\nabla_o\phi)^2 - \frac{1}{g} \phi_t \phi_{tz} \right\} \Big|_{z=0}$$

上面 (13) 式的误差项是  $O(\alpha^4)$  阶, 因此首三项的展开仅需准确到  $O(\alpha^3)$ , 其他高阶项可综合归于误差项. 如此得到的方程是比线性理论仅高一阶的非线性分析. 更高阶理论的方法同此 (Stokes, 1880)<sup>[6]</sup> 得  $N = 4$  阶解, De (1955)<sup>[8]</sup> 得  $N = 6$  阶解, 唯其中代数运算繁杂性, 与阶俱进.

以周期波为特例, 我们循 Stokes 将  $\phi$  和  $\zeta$  对波高  $\alpha$  展开 (变量取无量纲 (21) 式)

$$\zeta/h = \alpha \cos \theta + \beta_{21} \alpha^2 \cos 2\theta + \dots, \quad (\theta = kx - \omega t + \delta) \quad (14)$$

$$\phi/(gh^3)^{1/2} = \alpha \beta_1 \cosh \sigma \sin \theta + \alpha^2 \beta_{22} \cosh 2\sigma \sin 2\theta + \dots \quad (\sigma = k(z+h)) \quad (15)$$

$$\omega = \omega_0(k) + \alpha \omega_1(k) + \alpha^2 \omega_2(k) + \dots \quad (16)$$

其中  $\beta_1, \beta_{21}, \beta_{22}$  是与  $\alpha$  无关的待定系数. 式 (16) 表示频散关系  $\omega = \omega(k; \alpha)$  也需对  $\alpha$  展开; 这是 Stokes 引入的新概念 (否则无解). 此外, 在分析过程中发现, 我们必需在 Bernoulli 方程中加一个  $O(\alpha^2)$  阶的常数, 或在  $\phi$  的展式中加一项  $\phi_0 = \beta_0 \alpha^2 t$  (并不影响流速), 或在  $\zeta$  展式中加一项  $O(\alpha^2)$  阶的常数 (以示波高的周期平均可有上下位移), 这三种解释都可互易, 否则也无解. 循此将 (14)~(16) 式代入 (13), 即得

$$\omega_0^2 = gk \tanh \kappa, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \kappa^2 (9 + 8 \sinh^2 2\kappa) / \sinh^4 \kappa, \quad \kappa = kh$$

$$\beta_1 = \left( \frac{2}{\kappa \sinh 2\kappa} \right)^{1/2}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{2} \kappa \coth \kappa \left( 1 + \frac{3}{2 \sinh^2 \kappa} \right), \quad \beta_{22} = \frac{3}{4} \frac{\omega_0}{\sinh^4 \kappa} \quad (17)$$

这结果与 Stokes (1880)<sup>[6]</sup> 一致. 若应用于深水波, 上式简化为 Stokes (1847)<sup>[5]</sup> 的经典结果:

$$\phi = O(\alpha^3), \quad \omega^2 = gk(1 + k^2 a^2) \quad (18)$$

以上是最初一阶中含有非线性效应的水波理论, 而它已有好几点新启示. 首先, 我们看到频散关系是频率和波幅的双元函数, 确切地可以分为频散和幅散 (高幅促进高频), 二者合称波散. 对波型来说, 愈陡的波, 波峰愈尖, 波谷愈平坦, 因而表明波高的平均水平愈低. 这点更深刻的含义是指每一行波非但在波向传输动量和能量, 且也在波向 (群速方向) 传输质量. 这些都渊源于波的非线性和频散性的联合效应. 再者, 应用于浅水长波 ( $\kappa = kh = 2\pi h/\lambda = 2\pi\sqrt{\varepsilon} \ll 1$ ), 无量纲的 (17) 式自然地简化并给出两个参数,  $\alpha$  和  $\alpha/\kappa^2$ , 而后者即  $\alpha/\varepsilon$ , 也称为 Ursell 数. 分析浅水长波必需用两个参数的观点, 是 Rayleigh (1876)<sup>[24]</sup> 和 Ursell (1952)<sup>[55]</sup> 首先指出的, 而我们在高阶摄动分析中也自然得之. 当水深 (相对于波长) 变大, 水波在  $\varepsilon > 1$  后即已消除底部影响而成深水波. 我们必须注意到 Stokes 非线性水波之应用, 需顾及其有受侧带 (side-band) 干扰引起的不稳定性而变形 (见 Benjamin & Feir 1967)<sup>[56]</sup>.

结束此节时, 我们看到虽然高阶 Stokes 水波可采用更确切的参数作级数展开和使用加速级数收敛的方法 (例如 Padé 近似), 然毕竟还是限于定常, 二维, 周期, 行进于均匀水深的水波. 为了进行基础研究和实际应用, 消除这些限制也是学术界努力的目标.

## 5 水波模型的一般理论

最近 Wu (2000)<sup>[42]</sup> 引入了一个水波模型的一般理论, 用以模拟非定常、三维、全非线性、全频散 (FNFD) 重力毛细波在任变深度的水中传播. 如前所述, 这理论假定流体无黏不可压缩, 速度场无旋, 故有速度势  $\phi$ , 满足 Laplace 方程 (9), 理论发展遵循两个原则:

**原则 1** 所有边界条件, 无论边界位置是指定 (如水底) 或未知 (如水面) 都得映射到界面上, 用 '界面函数' (18) 式中  $\hat{f}(\mathbf{r}, t)$  和  $\check{f}(\mathbf{r}, t)$  表达.

**原则 2** 采用  $\phi$  的方程式 (9), 求取一个微分级数型或积分方程型的规范解, 以完成基本方程组的封闭.

首先, 界面函数的微分, 可由链式法则求得

$$\partial_t \hat{f}(\mathbf{r}, t) = \left( \partial_t f + \frac{\partial f}{\partial z} \partial_t \zeta \right) \Big|_{z=\zeta} \quad \nabla \hat{f}(\mathbf{r}, t) = \left( \nabla f + \frac{\partial f}{\partial z} \nabla \zeta \right) \Big|_{z=\zeta}$$

同时对  $\check{f}(\mathbf{r}, t)$  也类同. 应用这些关系式即得下列界面传输定理

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{z=\zeta} = \widehat{D}\widehat{f} \quad (\widehat{D} = \partial_t + \widehat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \quad (19)$$

$\check{D}\check{f}$  也类同. 应用这些公式, 水平方向动量方程 (3) 即可映射到水面而得

$$\widehat{D}\widehat{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \Big|_{z=\zeta} = -\frac{1}{\rho}\left(\nabla\widehat{p} - \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \nabla\zeta\right)$$

继之再用垂向动量方程 (4) 和条件 (5), (6), 最后得到

$$\widehat{D}\widehat{\mathbf{u}} + [g + \widehat{D}^2\zeta]\nabla\zeta = -(1/\rho)\nabla p_a - \gamma\nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \quad (20)$$

此外, (5) 式原已符合原则 1. 所以由原则 1 我们得到两个基本方程, (5) 和 (20), 都是精确的, 但含有  $\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{w}$  和  $\zeta$  三个变数. 我们将遵循原则 2 以完成这个基本方程组的封闭.

### 5.1 界面流速的级数解答

首先我们求 Laplace 方程 (9) 的级数解. 鉴于 (5) 和 (20) 都是完全精确的, 我们可假定波幅为任意, 即  $\alpha = O(1)$ , 置之不计, 而先考虑一般浅水中的长波为特例, 仅先假定  $\varepsilon = h^2/\lambda^2 \ll 1$  是唯一小参数 (可于最后结果中验证, 这个假设可以大幅度放松, 甚至可以完全不计). 由此假设, 可取下列无量纲变数

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* = \mathbf{r}/\lambda, \quad z_* = z/h_0, \quad t_* = c_0 t/\lambda, \quad \zeta_* = \zeta/h_0, \quad h_*(x_*) = h/h_0, \quad \phi_* = \phi/c_0\lambda, \\ \varepsilon = h_0^2/\lambda^2, \quad u_* = u/c_0 = \nabla_*\phi_*, \quad w_* = w/c_0\sqrt{\varepsilon} = e^{-1}\partial\phi_*/\partial z_*, \quad p_* = p/\rho gh_0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $h_0$  是标准或平均水深,  $\lambda$  是波长,  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  是线性波速. 略去 \* 后, (2), (5) 和 (7) 原封不动, 而 (20) 变为

$$\widehat{D}\widehat{\mathbf{u}} + [g + \varepsilon\widehat{D}^2\zeta]\nabla\zeta = -(1/\rho)\nabla p_a - \gamma\nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \quad (22)$$

这式中唯一含  $\varepsilon$  的项属  $O(\varepsilon)$  阶, 它是由于水质点垂向加速效应所引起. 再有 (9) 的无量纲形式变为

$$\phi_{zz} + \varepsilon\nabla^2\phi = 0 \quad (-h(\mathbf{r}, t) \leq z \leq \zeta(\mathbf{r}, t)) \quad (23)$$

此式表明  $\phi$  的解答可以用  $\varepsilon$  的幂级数分析证得 (见 Wu, 2000, 公式 (22))<sup>[42]</sup>

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, z, t; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n I^n \phi_0(\mathbf{r}, t; \varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} I^n [(z+h)\check{w}(\mathbf{r}, t; \varepsilon)] \\ I^n \phi_0 &= (-1)^n \nabla^{2(n-1)} \left[ \frac{(z+h)^{2n}}{(2n)!} \nabla^2 \phi_0 \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ I^n [(z+h)\check{w}] &= (-1)^n \nabla^{2(n-1)} \left[ \frac{(z+h)^{2n}}{(2n)!} H_1(\mathbf{r}, t) + \frac{(z+h)^{2n+1}}{(2n+1)!} H_2(\mathbf{r}, t) \right] \\ H_1(\mathbf{r}, t) &= (\check{w}\nabla^2 h + 2\nabla h \cdot \nabla\check{w}), \quad H_2(\mathbf{r}, t) = (\nabla^2\check{w}), \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $I^0 = 1$ ,  $\check{w}$  是 (7) 式所给海底上的垂向速度. 显然, 很容易验证这个答案满足 Laplace 方程 (24) 和水底条件 (7). 解 (24) 更显示  $\phi_0(\mathbf{r}, t)$  是仅存的唯一未知量. 从这解答  $\phi(\mathbf{r}, z, t)$ , 我们可以直接求得  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ ,  $w = \varepsilon^{-1}\partial\phi/\partial z$ .



最后还得从  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, z, t)$  和  $w(\mathbf{r}, z, t)$  在  $z \rightarrow \zeta(\mathbf{r}, t)$  和  $z \rightarrow -h(\mathbf{r}, t)$  的极限中导出  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\hat{w}(\mathbf{r}, t)$  和  $\check{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ . 但在这步分析程序上, 必需注意  $\lim(z \rightarrow \zeta)$  和  $\nabla$  这两个算子不能互易 (not commutative), 因此互易次序而结果不变的结论不成立 (最后答案见 Wu 2000 (26)~(29))<sup>[42]</sup>.

至此, 我们已获得几个不同基本变量但精度完全相等的基本方程组, 能计算非定常、三维、FNED 重力毛细水波, 如下所列.

(1)  $(\check{\mathbf{u}}, \zeta)$  系统 —— 这个系统的基本方程是由 (5), (22) 和 (24) 导出的  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\hat{w}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\check{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ . 由此表明这个系统完全显式, 最为直接, 因为其中  $\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}$  和  $\mathbf{u}_0 \equiv \nabla\phi_0$  都是  $(\check{\mathbf{u}}, \zeta)$  的显函数. 以上的 5 个方程式可供计算  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}, \mathbf{u}_0, \check{\mathbf{u}}, \zeta)$  而以  $(\check{\mathbf{u}}, \zeta)$  作为基本变量 (所列完备方程, 见 Wu 2000)<sup>[42]</sup>.

在此, 我们指出若  $(\check{\mathbf{u}}, \zeta)$  在流场内为解析, 则 (24) 式中的级数和  $\hat{\mathbf{u}}, \hat{w}$  所导出的级数都是绝对一致收敛的, 其收敛半径为无穷大. 这一点意义重大, 因为开始认为  $\varepsilon$  是小参数的假设可以大幅放松, 甚至可以完全不计, 只需这些级数不要过分截断 (当然除非真是浅水长波,  $\varepsilon$  的确微小). 如此我们可令  $\varepsilon = 1$ , 即所有垂向和水平方向的长度都以  $h_0$  为标度. 因此水深可以任变.

(2)  $(\hat{\mathbf{u}}, \zeta)$  系统 —— 这个模拟系统的基本方程是 (5), (22),  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  和  $\hat{w} = \hat{w}[\hat{\mathbf{u}}, \zeta, \zeta]$ . 其中  $\check{\mathbf{u}}[\hat{\mathbf{u}}, \zeta]$  代表原有用级数表达的  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}[\check{\mathbf{u}}, \zeta]$  的级数求逆而得的逆函数. 这个逆级数也是绝对一致收敛的, 唯其收敛半径为有限. 这个系统的优点是  $(\hat{\mathbf{u}}, \zeta)$  被 Zakharov (1968)<sup>[57]</sup> 证明为正则变量 (canonical variables), 故有 Hamiltonian 辛对称特性.

(3)  $(\bar{\mathbf{u}}, \zeta)$  系统 —— 在此我们首先不用 (5), 而代之以下列的精确连续性方程

$$\eta_t + \nabla \cdot (\eta \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (\eta = h(\mathbf{r}, t) + \zeta(\mathbf{r}, t)) \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta} \int_{-h}^{\zeta} \mathbf{u}(\mathbf{r}, z, t) dz \quad (\eta = h(\mathbf{r}, t) + \zeta(\mathbf{r}, t)) \quad (26)$$

这里  $\bar{\mathbf{u}}$  是  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, z, t)$  在全部水深上的平均值. 所以组成这个系统的基本方程是 (25) 和  $\hat{\mathbf{u}}[\check{\mathbf{u}}[\bar{\mathbf{u}}, \zeta], \zeta]$ . 其中  $\check{\mathbf{u}}[\bar{\mathbf{u}}, \zeta]$  是从  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0[\check{\mathbf{u}}, \zeta]$  和 (26) 中消去  $\mathbf{u}_0$  所得的级数. 这组变量是随 Boussinesq (1871, 1872)<sup>[22,23]</sup> 和 Korteweg & de Vries (1895)<sup>[25]</sup> 首先引用后被广泛采用的基本变量.

(4)  $(\mathbf{u}_*, \zeta)$  系统 —— 其中  $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}(\mathbf{r}, -h_*, t)$  是选定某一定常水深  $z = -h_* = -\beta h_0 \equiv -\beta$  ( $0 \leq \beta < 1$ ) 与  $\zeta$  合成的基本变量. 可直接得到

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}[\mathbf{u}_*, \zeta], \quad \hat{w} = \hat{w}[\mathbf{u}_*, \zeta]$$

因此, 可将上列二式直接代入 (5) 和 (22) 而得此新  $(\mathbf{u}_*, \zeta)$  系统. 这系统近年来也被广泛采用, 尤其是深淡水俱涉及的水波问题 (有关文献, 见 Wu 2000)<sup>[42]</sup>.

## 5.2 界面积分方程

如上节所述, 用速度势级数解完成封闭, 便于分析和获得各低阶的近似理论以供简化模拟. 若为方便起见直接用数值计算求解, 则以求速度势的边界积分方程来完成封闭最为合适. 我们分别对二维和三维水波问题探讨如下.

(1) 二维水波: 围道积分

对一般二维无黏无旋的水波问题, 我们采用 Cauchy 的围道积分 (contour integral) 公式. 先将坐标符号稍作改换, 在竖直  $xy$ - 流面,  $x$  指主流方向,  $y$  垂直向上,  $y = 0$  与静水面相合, 流速矢在  $x$ - 和  $y$ - 向分量为  $u$  和  $v$ , 而流场或在  $-A < x < A$  上有周期性, 或是仅限于近区, 在远处正规地趋于 0. 于是以复变函数表示, 复速度  $w(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t)$  是复坐标  $z = x + iy$  的解析函数, 并满足 Cauchy 积分公式

$$i\Omega(z)w(z, t) = \oint_{\partial D} \frac{w(z_1, t)}{z_1 - z} dz_1 \quad (27)$$

其中线积分以逆时针沿流场  $D$  的围道  $\partial D$  围绕一周. 若  $z \in D$ ,  $\Omega = 2\pi$ , 若  $z \in \partial D$ ,  $\Omega = \pi$ , 若  $z \notin D + \partial D$ ,  $\Omega = 0$ . 对  $z \in \partial D$  时, 此线积分取 Cauchy 主值 (principal value). 这流场域  $D$ , 在周期流动时取其单周期  $-A < x < A$ , 或对于局部波动时取全流场 ( $A = \infty$ ). 在这两种情形下, 围道  $\partial D$  的左右两侧上行和下行的部分显然对消. 最后将 (27) 应用于水表面任一点  $\hat{z} = x + i\zeta(x, t)$ , 再应用于水底面任一点  $\check{z} = x - ih(x, t)$ , 然后分开虚实两部而得到新的由积分封闭的二维水波基本方程组如下

$$\hat{v} = \hat{D}\zeta \quad (\hat{D} = \partial_t + \hat{u}\partial_x) \quad (5c)$$

$$\hat{u}_t + \hat{u}\hat{u}_x + [g + \hat{D}^2\zeta]\zeta_x = -\partial_x p_a - \gamma\partial_x \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (20c)$$

$$\pi\hat{v} = \text{Re} \left[ \int_{-A}^A \frac{\check{u}_1 + i\check{D}_1 h}{\check{z}_1 - \hat{z}} d\check{z}_1 - \int_{-A}^A \frac{\hat{u}_1 - i\hat{v}_1}{\hat{z}_1 - \hat{z}} d\hat{z}_1 \right] \quad (27ac)$$

$$\pi\check{u} = \text{Im} \left[ \int_{-A}^A \frac{\check{u}_1 + i\check{D}_1 h}{\check{z}_1 - \hat{z}} d\check{z}_1 - \int_{-A}^A \frac{\hat{u}_1 - i\hat{v}_1}{\hat{z}_1 - \hat{z}} d\hat{z}_1 \right] \quad (27bc)$$

其中 Re 和 Im 指实部和虚部,  $\check{D}_1 = (\partial_t + \check{u}_1\partial_x)$ , (5c) 和 (20c) 是 (5) 和 (20) 的二维的相应方程式, (27ac) 和 (27bc) 是 (27) 式水面上和在水底上的特殊情形, 同时也引用了条件 (7). 这最后两个方程是 Fredholm 的第二类积分方程式, 它的收敛和效率特性是数值计算理论中众所周知的.

### (2) 三维水波: 界面积分方程

为计算三维无黏无旋的水波, 我们可采用速度势  $\phi(\mathbf{x}, t)$  和 Green 函数的 Green 第二公式

$$2\pi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial D} [\phi_n(\mathbf{x}_1, t)G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_1, t)G_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)] dS_1 \quad (28)$$

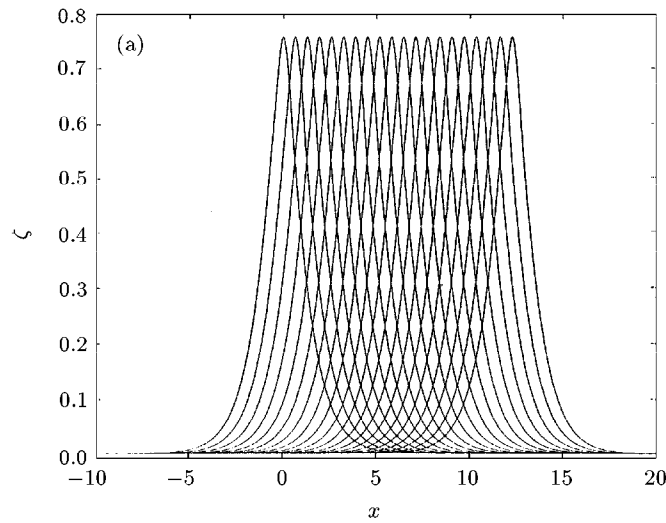
其中  $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = -|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^{-1}$ ,  $\mathbf{x} = (r, z) = (x, y, z)$  已恢复原先的三维位矢,  $\partial D$  是三维流场的边界面, 下标 (subindex)  $n$  是指在  $\partial D$  上  $\mathbf{x}_1$  点向外法线的微分算子, 且上式因  $\mathbf{x} \in \partial D$  故其面积分取 Cauchy 主值. 从这恒等式可以直接导出  $\hat{u}, \hat{w}, \check{u}$  和  $\zeta$  的关系式, 由此即与 (5) 和 (20) 形成封闭的基本方程组, 可以直接用于计算三维, 非定常 FNFD 重力毛细波在任变深度的水中传播和演化. 其计算区也可分为有周期性波 ( $-A < x < A, -B < y < B$ ) 或是波动仅限局部区域 ( $A = \infty, B = \infty$ ). 此外, 我们也可选用偶极子或面涡分布, 从这类面积分也可求得封闭积分方程式. 因这类文献很全, 不再赘述 (e.g. Tsai & Yue 1996)<sup>[58]</sup>. 最后需指出, 因三维自由面水流问题计算量一般很大, 若能发展高效、高精度的计算法则 (algorithm) 总是有利于计算工作 (e.g. Hou et al. 1996)<sup>[59]</sup>.

## 6 初步数值计算结果

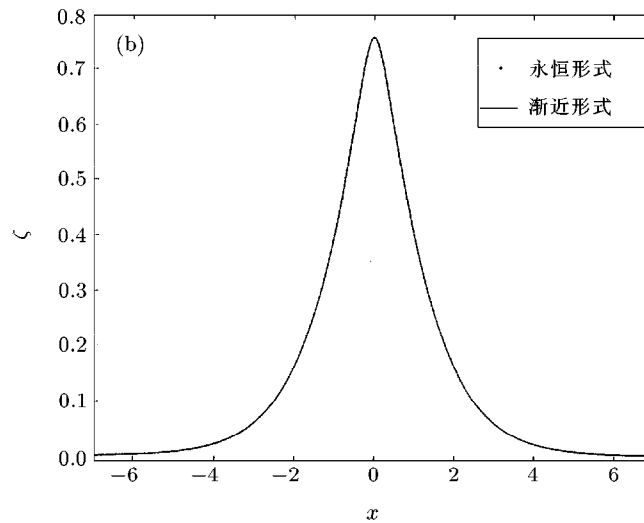
为计算目前 FNFD 水波理论模型, 曲文东 (Qu 2000)<sup>[60]</sup> 先对二维重力毛细波在均匀深度水中传播和演化发展了一个叫 FNFD-2 的计算方法, 这方法采用 (5c), (20c) 和 (27) (在 (27) 中用  $h = \text{const.}$  简化后的积分方程) 三个方程式, 选用适当的微分算子、有限差分格式以及最为合适的滤子以争取最优化的数值收敛性、稳定性和精度, 随后用时间步进法将初始值演化趋近于定常波, 并小于给定的误差. 与此非定常孤立波计算平行进展的有另一工作, 即是直接计算定常的孤立波的波型及其速度, 所得结果 (Kao 2000)<sup>[61]</sup> 与非定常计算所得的逼近解 (Qu 2000)<sup>[60]</sup> 相比较, 下面是这类研究中有代表性的成果.

图 2(a) 是一系列按时间步进的一个孤立波长期逼近序列, 其波已稳定在  $\alpha = 0.75815$ , 波速达  $c = 1.291$ , 最大局部误差小于  $10^{-4}$ . 图 2(b) 显示这个逼近孤立波数值解与波幅相同的定常孤立波相比, 因后者的局部误差小于  $10^{-5}$ , 两者已不可分辨. 这个 FNFD-2 算法的高精度在此后

各种计算应用已得到一致证实. 相比来说, 一般纯数值边界积分方程法很难计算到如此高幅的水波.



(a) 用本文 FNFD 理论计算的长时间渐近孤立波形的时间序列图



(b) FNFD 理论同永恒波理论的孤立波形比较, 波幅均为  $\alpha = 0.75815$ , 相速度均为 1.291, 最大误差分别小于  $10^{-4}$  和  $10^{-5}$

图 2

## 7 水波在倾斜海滩上之涨落 (Peregrine 1967, Wu 1981, Zhang & Wu 1999)<sup>[62~64]</sup>

水波在倾斜海滩之涨落为历久共识的难题. 首先, 在岸边水线附近流场, 完全受制于非线性效应, 绝无供线性化的余地, 所以必需将这效应充分考虑. 此外, 在计算移动水线时, 必需要有一个精确、稳定、高效率的数值方法, 再有, 就是人们发现在水线近域因三维水深变化也不能将频散效应忽略不计 (Zhang 1996, Wu & Zhang 1996a, b)<sup>[65~67]</sup>. 除这几点以外, 尚有其他物理效应, 包括黏性耗散、湍流、波浪破碎和泥沙传输等, 在某些条件下也得计及而使问题更加复杂化.

在文献中,唯一有精确分析解的仅限于二维、倾斜平面海滩,水流无黏无旋的一类问题.采用浅水方程式和巧妙的变数变换而得的精确解, Carrier & Greenspan (1958)<sup>[68]</sup> 和 Tuck & Hwang (1972)<sup>[69]</sup> 的贡献已视为经典工作,屡被新数值解和实验作为检验的标准.从计算方法入手的途径很多,诸如以干湿分界作有限差分网格的进退迭代 (Yeh et al. 1996)<sup>[70]</sup>,或以水线近域数值光滑化 (Hibberd & Peregrine 1979)<sup>[71]</sup>.但这些方法仅是近似,需用迭代试探,更有累积误差.此外,另一种方法是采用 Lagrange 坐标,如 Pedersen & Gjevik (1983)<sup>[72]</sup>, Zelt (1986, 1991)<sup>[73,74]</sup> 和 Zelt & Raichlen (1990)<sup>[75]</sup>.然而此法引入多项非线性项的方程式,增加不少工作量.这里我们不涉及边界积分方程 (BIEM) 等纯计算的方法,因文献丰富,故不予讨论.

在改进海滩波岸线的分析和计算方法方面, Zhang (1996)<sup>[65]</sup> 和 Zhang et al. (2000)<sup>[76]</sup> 引入了一个 Lagrange-Eulerian 观点相结合的理论,可供计算研讨二维水波在海陆向陡度任变的海滩上涨落演化.这理论先基于浅水方程,随后加进非线性频散效应项而得的精确算法.为便于应用,进一步将非定常计算区变换成一个定常计算区,使用极为简便,如下所述.

首先, (1+1) 维的浅水方程式 ( $\alpha = O(1)$ ,  $\varepsilon = 0$ , 全非线性无频散) 是

$$\zeta_t + [(h + \zeta)u]_x = 0 \quad (29)$$

$$u_t + uu_x + \zeta_x = 0 \quad (30)$$

其中,  $h(x)$  是静水深,可在海陆向任变,  $\zeta(x, t)$  是自静水面 ( $z = 0$ ) 算起的波高,  $u(x, t)$  是在垂向平均后的海向水平流速.这里,所有长度以  $h_0$ , 时间以  $(h_0/g)^{1/2}$  无量纲化. (29) 是连续性方程, (30) 是 FNFD 中取  $\varepsilon = 0$  的动量方程式.从这两式得如下的特征关系式

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{h + \zeta}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} \pm \sqrt{h + \zeta} \frac{du}{dt} = -uh_x$$

它们在水线 (定义:  $h + \zeta = 0$ ) 上简化为

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (31)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -uh_x \quad (32)$$

## 7.1 水线方程式

对一个随时间移动的二维水线,我们用 Lagrange 变量  $x = X(t)$  来定位.为了取得水线在倾斜的海滩上随无黏海水移动的精确而简易的理论和计算方法,我们全程沿用 Lagrange 表述,得到以下的方程组

$$h(X(t)) + \zeta(X(t), t) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{dX}{dt} = u(X(t), t) \equiv U(t) \quad (34)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\zeta_x \quad (35)$$

(33) 乃水线之定义,即全水深为 0. (34) 式给出水线的 Lagrange 速度,且与水线的特征线 (31) 重合.再有 (35) 式确是 (30) 写为 Lagrange 型的动力学方程式.所以这组方程中, (33) 是几何性的, (34) 是运动学性的,而 (35) 是动力学性的 Lagrange 式综合水线描述.它们组成必须满足的 Lagrange 型的在斜滩上二维海水线的理论方程组.

如果  $X(t)$  和水深  $h(x)$  为已知, 则  $V(t), \zeta(x, t)$  和  $\zeta_x$  可以由 (33)~(35) 求得, 而且可用以向流体内域作解析延拓 (analytic continuation). 至于内部流场, 我们仍然沿用原有的 Euler 型的描述方法, 即 (29), (30) 方程式. 因为 Euler 方程较 Lagrange 方程简单, 计算效率也高.

## 7.2 一个固定计算区域的数值方法

为了再进一步简化数值计算的工作, 我们将原来因水线移动而使物理区域随时间变化的情况用以下变换变为一个固定计算区域, 从而使差分网格不必随时间变化

$$x = (1 + X/L)x' + X, \quad t = t' \quad (36)$$

其中  $x = X(t)$  指移动水线位置,  $x = -L$  是另一端的计算域界 (对界外海内的流动是开放而且连续的). 由此变换, 原有与时间有关的计算域,  $-L \leq x \leq X(t)$ , 即变为固定计算域,  $-L \leq x' \leq 0$  ( $L$  为常数), 同时 (23), (24) 式变为

$$\zeta_t - c_1 U \zeta_x + c_2 [(h + \zeta)u]_x = 0 \quad (37)$$

$$u_t - c_1 U u_x + c_2 (uu_x + \zeta_x) = 0 \quad (38)$$

其中系数  $c_1 = c_1(x, t) = (1 + x/L)/(1 + X/L)$ ,  $c_2 = c_2(t) = 1/(1 + X/L)$  由变换而得, 而且新公式中  $x'$  已写成  $x$ .

引用这些 Lagrange-Euler 观点相结合新公式, Zhang (1996)<sup>[65]</sup> 发展了一个数值方法, 即用 Richtmyer 二步 Lax-Wendroff 格式和 leap-frog 程序, 从 (35) 积分得  $U(t)$ , 再自 (34) 积分得水线位置  $X(t)$ . 这整套数值方法在空间和时间精度上都为二阶.

这个二维海滩水波涨落的综合算法可应用于滩坡任变的一般情况时仍得精确解. 并且和仅有的一组分析精确解 (倾斜平面海滩) 比较, 结果完全验证了其精确性. 图 3 是其中一例, 是在平斜海滩  $h = -\alpha x$ , ( $\alpha = 1$  即  $\alpha = \tan 45^\circ$ , 从此仅需改换尺度即可推广到任何  $\alpha$  值) 上的周期波

$$\phi = A J_0(\sigma) \cos \lambda \quad (A = 1)$$

以此得 (Carrier & Greenspan, 1958)<sup>[68]</sup>  $u = \phi_\sigma / \sigma$ ,  $\zeta = (\phi_\lambda - 2u^2)/4$ ,  $t = \lambda/2 - u$ ,  $x = \zeta - \sigma^2/16$ ,  $J_0(\sigma)$  为 Bessel 函数. 这个海滩波解在  $0 < A < 1$  参数内是周期波;  $A = 1$  时, 在波降落到最低点水线处波形垂直, 波陡为无穷;  $A > 1$  时波高有双值 (意指破碎). 所以,  $A = 1$  为临界情况. 用综合法计算, 取网格  $\Delta x = 1/100$ ,  $\Delta t / \Delta x = \pi/10$ , 其数值结果如图所示, 完全与分析解重合; 计算误差在临海端 ( $x = L$ ) 区最小,  $< 10^{-6}$ , 在岸线区最大, 但仍  $< 10^{-3}$ , 这点表明由于计算水线区  $\zeta_x$  的巨大数值误差所致. 再有, 若将  $\Delta x$  减半, 误差减少 1/4, 足证其精度为 2 阶. 与其他计算方法相较, 本法极为简易. 大概这是由于程序的每步都是精确而且直接, 故较为精确和便捷; 在 Sun Ultra-Enterprise 10000 计算机上, 用  $\Delta x = 1/200$  算得图 3 每点仅需 CPU 时间 3.5 秒. 所以这个综合计算方法可供普遍应用.

在此我们指出, Zhang, et al. (2000)<sup>[76]</sup> 曾进一步探索频散效应在海滩上水波涨落过程中所起作用. 为此, 先将浅水方程 (29), (30) 换成 Boussinesq 型的方程组; (29) 不变, 而 (30) 将右面的 0 换为频散项

$$D = -\frac{1}{3}(h + \zeta)^2 \zeta_{xxx}$$

鉴于这频散项  $D$  在水线位上有双重 0 点, 原来浅水理论的 Lagrange 水线方程组 (33)~(35) 仍然保持有效. 以此推论, 证明频散效应在海滩水波上升时很微小 (因波面平缓), 但在波下降时有重要作用, 尤其当波面几乎竖直时,  $\zeta_{xxx}$  远较  $\zeta_x$  为重要, 不过这数值算法仍可沿用, 如 Zhang et al. (2000)<sup>[76]</sup> 所举孤立波爬升海滩之例所示.

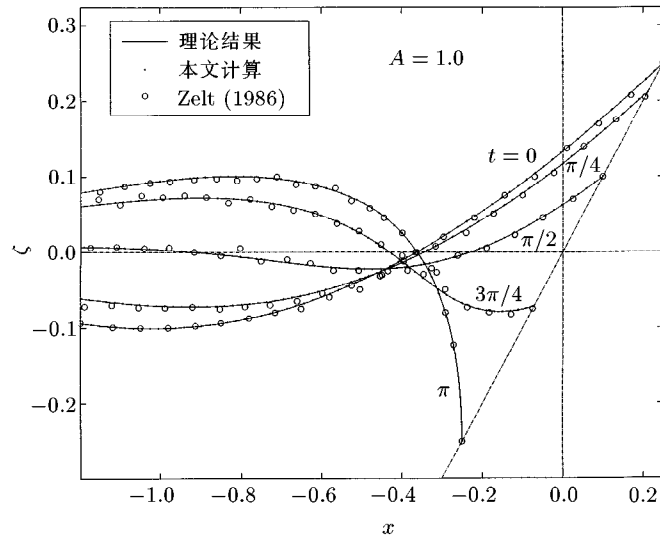


图3 平斜海滩上水波用综合计算法与理论结果的比较

## 8 结 语

最后, 我们还要提及水波理论中的一些最新进展: 如: 寄生毛细波与遥感; 风生浪、流与对 Stokes 波稳定性的影响; 风、波、流、结构相互作用及数据分析的 HHT (Hilbert-Huang Transform) 方法等.

关于表面张力在水波中的一般效应和影响, 除了传统的毛细水波外, 对高幅水波诸如趋近破碎时的浪尖和高幅的孤立波也因波面有局部大曲率而值得深入研究. 此外由于高空遥感的 SAR (Synthetic Aperture Radar) 和 Bragg 散射仪 (Scatterometer, 为加州理工学院的 Jet Propulsion Laboratory 在 NSCAT 等项目中作重点采用) 的发展和运用, 发现所测数据都受到毛细波的显著影响. 例如陡度较大的重力波常在波顶前缘出现“寄生”毛细波 (parasitic ripples), 而且这些片片毛细波时隐时现, 在海面上星罗棋布, 瞬变无常. 因而干扰 Bragg 散射 (所用雷达微波属 cm 尺度) 见 Bourassa et al. (1997)<sup>[77]</sup>. 这些问题, 目前仍在研究阶段.

此外, 风, 浪和海流自然而然形成一个自然现象的系列. 风生浪, 风浪产生水流, 然其中的相互作用, 此涨彼落的机理, 一般是相当复杂. 例如前节述及 Stokes 自由波有侧频带非稳定所生的高低侧频双带新波, 它们的指数增长率已有实验证实. 然而假若这列自由波再有风力强迫, Bliven, Huang & Long (1986)<sup>[78]</sup> 有实验指明风力够强时, 反会使侧频带的波增长率推迟和减小. 这项重要发现, 继之由 Li, Hui, Donelan (1988)<sup>[79]</sup> 用理论证明初始 Stokes 水波的侧频带波的增长率在风生旋度低时加强, 但在风生旋度高时反而减弱 (低于或高于某一临界基本水波旋度). 作者们在同文中并发表实验结果, 与理论大致性质相合.

最后我们提出有关水波、水流, 和它们与外界 (物体面和风力等) 相互作用, 一般含有强非线性, 强频散性, 强瞬变性. 这类现象的测量数据 (通常为时间序列 ——time series) 一般都内含这些特性. 但这些特性都不是傅里叶分析 (Fourier based spectral methods, 包括这类小波分析, wavelet methods) 所能显示和表达的. 为了专门分析含有这些特性的时间数据, Huang et al. (1998)<sup>[80]</sup> 发明了一种新方法, 称为 Hilbert-Huang Transform (HHT) 方法. 这方法有两个阶段, 第一阶段是将任何时间数据整理分成 intrinsic mode function (IMF) —— 内禀模态函数; 这个分解法完全按原数据“内在”的性质和数量, 不介入任何人为参数 (诸如傅氏法中在分析时间

序列时必须要有周期  $T$ ), 而得到有限而为数不多的内禀模态函数 (IMF). 第二阶段将这些模态函数求其 Hilbert transform. 每一模态函数和它的 Hilbert 变换都能给出这一模态的波幅和波频, 显示它们随时间变化的内在性质和数量. 由所有各模态作综合分析可以探究整体现象内在的非线性, 波散性和瞬变性. 因为这 HHT 法有这些功能, 它可以提供广泛应用和进一步创新发展.

总结来说, 水波问题, 今后与国家建设、经济发展和环境改善无不有密切关系. 新的和悬而未决的问题, 多依赖先进科技的发展来解决, 诸如河流大川的洪涝和淤塞, 三角洲的衰废, 海岸的侵蚀, 沙漠的扩展, 都需科技人员献良策取得进展. 本文介绍的一些新方法, 基于运用界面函数, 使得非线性运动和动力学方程式得以定型不变, 而需要完成封闭的方程始于线性型式, 直到需要它变为界面函数时才在最后非线性化. 正如 Qu (2000)<sup>[60]</sup> 和 Wu (2000)<sup>[42]</sup> 文中好些基本而又具体例子所示. 由此所得高效率的应用使得分析和计算精确解的工作量显著减少. 以这些经验和成果作展望, 希望这些方法能协助克服更多的难题, 得到更完美的解答, 贡献更多的回报给新世纪的科学技术进展.

**致谢** 此文能得中科院力学所李家春教授编辑协助, 作者深致谢忱.

## 参 考 文 献

- 1 Gauss C F. Crelle's Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1829, IV: 232~235; *Werke*, 1829, V: 23~26
- 2 Lin C C, Clark A Jr. On the theory of shallow water waves. *Tsing Hua J of Chinese Studies Special*, 1959, 1: 54~62; also In: Selected Papers of C C Lin, Singapor: World Scientific, 1987. 352~360
- 3 Cole J D. Perturbation Methods in Applied Mathematics. Blaisdell Publ Co Waltham, MA, 1968
- 4 Lighthill J M. Waves in Fluids. Cambridge University Press, 1978
- 5 Stokes G G. On the theory of oscillatory waves. *Trans Cambridge Phil Soc*, 1847, 8: 441~455
- 6 Stokes G G. Math Phys Papers. Cambridge Univ Press, 1880. 1, 197~229
- 7 Wilton J R. *Phil Mag*, 1914, 27: 385
- 8 De S C. *Proc Camb Phil Soc*, 1955, 51: 713
- 9 Schwartz L. Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves. *J Fluid Mech*, 1974, 62: 553~578
- 10 Hui W H. A New approach to steady flows with free surfaces. *J Appl Math Phys (ZAMP)*, 1982, 33: 569~589
- 11 Song Tao, Li Jiachun. Numerical calculation for the coefficients of stokes harmonic waves of high orders. *Appl Math Mech*, 1988, 9(7): 625~641
- 12 Li Jiachun. Singularity criteria for perturbation series. *Scientia Sinica (A)*, 1982, 25(4): 593~600
- 13 Van Dyke M. Analysis and improvement of perturbation series. *Quart J Mech Appl Math*, 1974, 27: 423~440
- 14 Nakrasov A I. On waves of permanent type. I. *Izv. Ivanovo-Voznesensk. Politekhn Inst*, 1921, 3: 52~65
- 15 Levi-Civita T. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Math Ann*, 1925, 93: 264~314
- 16 Wilton J R. On ripples. *Phil Mag*, 1915, 29: 173
- 17 Crapper G D. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude. *J Fluid Mech*, 1957, 2: 532~540
- 18 Hogan S J. Some effects of surface tension on steep water waves. *J Fluid Mech*, 1979, 91: 167~180; 1980, 96: 417~445; 1981, 110: 381~410
- 19 宋涛, 李家春. 深水重力毛细波的高阶摄动解. *力学学报*, 1989, 21(2): 145~153
- 20 Airy G B. Tides and waves. *Encyc Metrop*, 1845, Art 192
- 21 Russell John Scott. Report on waves. Rept 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London: John Murray, 1844. 311~390
- 22 Boussinesq J. Théorie de l'intumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. *C R Acad Sci Paris*, 1871, 72: 755~759
- 23 Boussinesq J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J Math Pures Appl Ser 2*, 1872, 17: 55~108
- 24 Rayleigh Lord. On waves. *Phil Mag*, 1876, 1: 257~279; Reprinted in Scientific Papers, Cambridge Univ Press, 1. 251~271
- 25 Korteweg D J, de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. *Philos Mag*, 1895, 39: 422~443

- 26 Zabusky N J, Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys Rev Lett*, 1965, 15: 240~243
- 27 Green A E, Naghdi P M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J Fluid Mech*, 1976, 78: 237~246
- 28 Ertekin R C, Webster W C, Wehausen J V. Ship-generated solitons. In: Proc 15th Symp Naval Hydrodynamics. Washington, DC: National Academy of Sciences, 1984, 347~364
- 29 Ertekin R C, Webster W C, Wehausen J V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width. *J Fluid Mech*, 1986, 169: 275~292
- 30 Choi W. Nonlinear evolution equations for two-dimensional surface waves in a fluid of finite depth. *J Fluid Mech*, 1995, 295: 381~394
- 31 Choi W, Camassa R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system. *J Fluid Mech*, 1996, 313: 83~103
- 32 Wu D M, Wu T Y. Three-dimensional nonlinear long waves due to moving surface pressure. In: Proc 14th Symp on Naval Hydrodynamics. Washington, DC: National Academy Press, 1982. 103~125
- 33 Wu D M, Wu T Y. Precursor solitons generated by three-dimensional disturbances moving in a channel. In: Horikawa K, Maruo H, eds. Nonlinear Water Waves. IUTAM Symp on Nonlinear Water Waves, 25~28 Aug 1987. Tokyo, Japan: Springer-Verlag, 1988. 69~75
- 34 Zhang D H, Chwang A T. Numerical study of nonlinear shallow water waves produced by a submerged moving disturbance in viscous flow. *Phys Fluids*, 1996, 8: 147~155
- 35 Huang D B, Sibul O J, Webster W C, Wehausen J V, Wu D M, Wu T Y. Ships moving in the transcritical range. Proc Conf Behavior of Ship in Restricted Waters. Varna: Bulgarian Ship Hydrodynamics Center, 1982. 2, 26/1~26/10
- 36 Zhu J L. Internal solitons generated by moving disturbances. [Ph D Thesis]. California Institute of Technology, Pasadena, California, 1986
- 37 Grimshaw R H J, Smyth N F. Resonant flow of a stratified fluid over topography. *J Fluid Mech*, 1986, 169: 429~464
- 38 Zhu J L, Wu T Y, Yates G T. Generation of internal runaway solitons by moving disturbances. In: Proc 16th Symp on Naval Hydrodyn ONR. Washington, DC: National Academy Press, 1986. 186~197
- 39 Zhu J L, Wu T Y, Yates G T. Internal solitary waves generated by moving disturbances. In: List E J, Jirka G H, eds. Proc Third Intl Symp Stratified Flows, ASCE, 1987. 74~83
- 40 周显初. 流体力学中的强迫孤立波. *力学进展*, 1998, 28(3): 374~382
- 41 程友良. 分层流体中内孤波的研究进展. *力学进展*, 1998, 28: 383~391
- 42 Wu T Y. A unified theory for modeling water waves. In: Advances in Appl Mech. Boston: Academic Press, 2000. 1~88
- 43 Wu J, Keolian R, Rudnick I. Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton. *Phys Rev Lett*, 1984, 52: 1421~1424
- 44 Denardo B, Wright W, Putterman S, Larraza A. Observation of a kink soliton on the surface of a liquid. *Phys Rev Lett*, 1990, 64-13: 1518~1521
- 45 Guthart G, Wu T Y. Observation of standing kink cross wave parametrically excited. *Proc Royal Soc Lond A*, 1991, 434: 435~440
- 46 Guthart G. On the existence and stability of standing solitary waves in Faraday resonance. [Ph D thesis] California Institute of Technology, Pasadena, California, 1992
- 47 Guthart G, Wu T Y. On the stability of standing solitons in Faraday resonance. In: Lin S P, Phillips W R C, Valentine D T, eds. Proc IUTAM Symp on Nonlinear Instability of Nonparallel Flows, 26-31 July 1993. Clarkson University, Springer-Verlag, 1993. 397~406
- 48 Wei R, Wang B, Mao Y, Zheng X, Miao G. Further investigation of nonpropagating solitons and their transition to chaos. *J Acoust Soc Am*, 1990, 88: 469~472
- 49 Wu T Y. On modeling nonlinear water waves. In: Proc 12th Int'l Workshop on Water Waves and Floating Bodies. Centennial Celebration of Georg Weinblum, March 16-20, 1997, Marseilles, France. 1997. 321~324
- 50 Wu T Y. Nonlinear waves and solitons in water. *Physica D*, 1998a, 123: 48~63
- 51 Wu T Y. On fully nonlinear water waves. In: Chien Wei-zang ed. Proc 3rd Intern Conf on Nonlinear Mechanics. 17~20 Aug, 1998. Shanghai: Shanghai Univ Press, 1998b. 119~124
- 52 Wu T Y. Modeling and computing nonlinear dispersive water waves. In: Kim H, Lee H S, Lee S J, eds. Proc 3rd Intern Conf on Hydrodynamics. Seoul, Korea, 12~15 Oct. 1998. Seoul: UIAM Publ, 1998C, 3~9
- 53 Wu T Y. Modeling nonlinear dispersive water waves. *J Engrg Mech Div ASCE*, 1999, 125: 747~755
- 54 Wu T Y. On modeling unsteady fully nonlinear dispersive interfacial waves. In: Wei Shyy, Narayanan R, eds. Fluid Dynamics at Interface. 13th U.S. National Congress of Appl Mech Yih Memorial Symp, 21-26 June 1998. Gainesville, FL. Cambridge Univ Press, 1999b. 171~178
- 55 Ursell F. The long wave paradox in the theory of gravity waves. *Proc Cambridge Phil Soc*, 1953, 49: 685~694
- 56 Benjamin T B, Feir J E. The disintegration of wave trains in deep water. Part 1. Theory. *J Fluid Mech*, 1967 27: 417~430
- 57 Zakharov V E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Z Prikl Mek Tekh Fiziki*, 1968, 9: 86~94



- 58 Tsai W, Yue D K P. Computation of nonlinear free-surface flows. *Ann Rev Fluid Mech*, 1996, 28: 249~278
- 59 Hou T Y, Teng Z, Zhang P. Well-posedness of linearized motion for 3-D water waves far from equilibrium. *Comm Partial Diff Equat*, 1996, 21(9&10): 1551~1585
- 60 Qu W. Studies on nonlinear dispersive water waves. [Ph D Thesis]. California Institute of Technology, Pasadena, 2000
- 61 Kao J. Personal communication, 2000
- 62 Peregrine D H. Long waves on a beach. *J Fluid Mech*, 1967, 27: 815~827
- 63 Wu T Y. Long waves in ocean and coastal waters. *J Engng Mech Div ASCE*, 1981, 107: 501~522
- 64 Zhang J E, Wu T Y. Oblique long waves on beach and induced longshore current. *J Engng Mech Div ASCE*, 1999, 125: 812~826
- 65 Zhang J E. I. Run-up of ocean waves on beaches; II. Nonlinear waves in a fluid-filled elastic tube. [Ph D Thesis]. California Institute of Technology, Pasadena, 1996
- 66 Wu T Y, Zhang J E. On modeling nonlinear long waves. In: Mathematics is for Solving Problems: A Volume in honor of Julian Cole on his 70th birthday. SIAM, 1996. 233~247
- 67 Wu T Y, Zhang J E. Mass and energy transfer between unidirectional interacting solitons (A tribute to Prof. C.C. Yu in honor of his 80th Anniversary). *The Chinese Journal of Mechanics*, 1996, 12(1): 79~84
- 68 Carrier G F, Greenspan H P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J Fluid Mech*, 1958, 4: 97~109
- 69 Tuck E O, Hwang L S. Long wave generation on a sloping beach. *J Fluid Mech*, 1972, 51: 449~461
- 70 Yeh H, Liu P, Synolakis C. Long-Wave Runup Models. Singapore: World Scientific, 1996
- 71 Hibberd S, Peregrine D H. Surf and run-up on a beach: A uniform bore. *J Fluid Mech*, 1979, 95: 323~345
- 72 Pedersen G, Gjevik B. Run-up of solitary waves. *J Fluid Mech*, 1983, 135: 283~299
- 73 Zelt J A. Tsunamis: the response of harbours with sloping boundaries to long wave excitation. [Ph D Thesis]. California Institute of Technology, Pasadena, 1986
- 74 Zelt J A. The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves. *Coastal Engrg*, 1991, 15(3): 205~246
- 75 Zelt J A, Raichlen F. A Lagrangian model for wave-induced harbor oscillations. *J Fluid Mech*, 1990, 213: 203~225
- 76 Zhang J E, Wu T Y, Hou T Y. Coastal hydrodynamics of ocean waves on beach. In: Advances in Appl Mech. Boston: Academic Press, 2000. 37, 89~165.
- 77 Bourassa M A, Freilich M H, Legler D M, Liu W T, O'Brien J J. Wind observation from new satellite and research vessels. *EOS Trans Am Geophys Union*, 1997, 78: 597~602
- 78 Bliven L F, Huang N E, Long S R. Experimental study of the influence of wind on Benjamin-Feir sideband instability. *J Fluid Mech*, 1986, 162: 237~260
- 79 Li J C, Hui W H, Donelan M A. Effects of velocity shear on the stability of surface wave trains. In: Horikawa K, Maruo H, eds. Nonlinear Water waves. Berlin: Springer-Verlag, 1988
- 80 Huang N E, Shen Z, Long S R, Wu M C, Shih H H, Zheng Q, Yen N C, Tung C C, Liu H H. The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis. *Proc R Soc Lond A*, 1998, 454: 903~995

## ADVANCES IN WATER WAVE MECHANICS

Theodore Yaotsu Wu

California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, U.S.A.

**Abstract** This article first gives a brief review on the history of various approaches of modeling water waves based on differing emphases on the main physical parameters involved. It presents a unified theory for modeling unsteady, three-dimensional, fully nonlinear and fully dispersive gravity-capillary waves in water of variable depth. Also presented is a Lagrangian-Eulerian hybrid numerical method for evaluating run-ups of nonlinear waves on sloping beach. Applications of these methods are illustrated with several problems of fundamental significance.

**Keywords** water wave, gravity-capillary wave, nonlinear effect, dispersion effect, solitary wave, soliton, shoaling wave, exact solution, externally excited resonant wave, stability of nonlinear water wave