杂交应力有限元法的研究进展

卞学鐄

麻省理工学院航空太空学系，美国麻省剑桥市　02139

摘　要　介绍了建立固体力学有限元法的多变量变分原理，和推导杂交应力有限元方法的演变．并指出杂交应力有限元法的许多特殊应用．

关键词　杂交元，变分法，板壳结构，多相材料，断裂分析

1　引　言

直到 1960 年初期，结构和固体有限元法都以单元节点位移为未知数．相当的刚度矩阵的建立法是根据两种基本单变量变分原理．一个是根据势能原理的协调元，其中假定的位移需要满足单元内和单元间的协调．另一个是根据余能原理的平衡元．其中假定的应力需要满足单元内部平衡和相邻单元间的表面力平衡．在 1964 年创始的一个单元也是根据余能原理．不过是假定单元内部平衡的应力和相邻单元间协调的边界位移．所以定名为杂交元 [1~3]．多变量的 Hellinger-Reissner 原理也可用来建立有限元法．可以产生以节点力与节点位移同为未知数的混合元，也可以产生只以节点位移为未知量的单元和以余能原理所产生的杂交元一致．后来发现，最优化的杂交元是可以根据 Hellinger-Reissner 原理来推导的．为了和混合元区分，杂交元法的定义是由多变量变分法推导，但是最后求解时，只是以节点位移为未知数的有限元法．因为有限元可以根据位移与应力，或位移与应变的变分原理，所以又可以区分为杂交应力有限元法与杂交应变有限元法．一本包括杂交有限元法的书是吴和卞合写的《非协调数值分析与杂交元方法》 [4]．

本文简单介绍杂交应力元法的演化历史．指明如何利用不同变分原理建立更精确的有限元法．并列出几项杂交应力元的特殊应用．

2　杂交有限元法的创始

最普遍的有限元法是根据单元的刚度矩阵．单元的应变能 U 由节点广义位移 $\boldsymbol{q}$ 表示

$$U=(1/2)\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{q} \tag{1}$$

$\boldsymbol{k}$ 为单元刚度矩阵．

最早的杂交有限元的建立，是根据假定单元内应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 平衡并与边界力 $\boldsymbol{T}$ 保持平衡，相当的余能原理的表达式为

$$\Pi_C^e=\int_{V_e}\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V-\int_{S_u}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}s=-U=\text{驻值} \tag{2}$$

本文于 2001-06-18 收到

其中 U 为单元应变能，$\boldsymbol{\sigma}$ 为单元应力，$\boldsymbol{T}$ 为边界力分量，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\nu}$ 为边界面法向余弦，$\overline{\boldsymbol{u}}$ 为已知边界位移.

有限元列式时，用 m 个应力参数 $\boldsymbol{\beta}$ 来表达应力分量 $\boldsymbol{\sigma}$, 用节点位移 $\boldsymbol{q}$ 来表达边界位移 $\overline{\boldsymbol{u}}$. 所得的单元应变能包括未知量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{q}$. 由正定余能条件可以得到 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的关系. 在内部消除 $\boldsymbol{\beta}$ 后可以得到方程 (1) 的应变能形式和单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}$.

杂交应力元在建立薄板单元时，很容易保证边界上法向斜率的连续性 (C^1 连续性), 是一般位移元所难以完成的. 最初一般认为杂交应力元的优点仅在于平板结构分析 [5]. 后来发现杂交应力元在其它应用上亦有优点. 如可以免除位移元的一些困难：剪切自锁现象和不可压缩固体自锁现象.

用余能原理建立杂交元的一个缺点是为了满足平衡条件，所采用的坐标系统有限制. 如不能用等参座标.

3 杂交应力有限元法的演化

当建立单元时位移非协调，用 Hellinger-Reissener 原理的表达式为

$$\Pi_{HR}^{e}=\int_{V^e}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}V-\int_{\partial V^e}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})\mathrm{d}S=\text{ 驻值} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 为内位移，$\overline{\boldsymbol{u}}$ 为边界位移

$$\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}_{\lambda}=\text{ 非协调位移} \tag{4}$$

应变与位移关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{5}$$

协调有限元列式时

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{q} \tag{7}$$

由正定的 Hellinger-Reissner 泛函条件得到 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的关系. 内部消除 $\boldsymbol{\beta}$ 后，可以得到单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}$.

用 Hellinger-Reissner 原理推导单元刚度矩阵的一个优点为, 假定应力无必要满足平衡条件. 譬如，可以用等参座标建立不规则四边形单元. 其最重要的优点为，可以采用适当应力与位移而得到最优单元.

最适当假定应力与位移为完备性与相当级性 (譬如平面弹性问题中，应力与应变均为位移的一级导数，所以均比位移低一级). 但是由方程 (7) 所得位移时常为非完备性，因而需要增加非协调位移 $\boldsymbol{u}_{\lambda}$, 因此方程 (3) 的泛函可改为 [6]

$$\Pi_{HR}^{e}=\int_{V^e}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_{q})-(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{\lambda}\right]\mathrm{d}V \tag{8}$$

这里，包括 $\boldsymbol{u}_{\lambda}$ 项所给的约束条件为

$$\partial\int(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{\lambda}\mathrm{d}V=0 \tag{9}$$

是促使假定应力在积分意义下满足平衡条件. 可以先用此约束条件取得应力项，然后用方程式 (2) 的方法推导单元刚度矩阵.

1984 年 Pian 和 Sumihara[7] 最初用此方法，得到一个性能优越的 4 节点平面杂交应力元. 不过在推导过程中需要借助对单元的几何摄动处理. Tian 用相似的方法推导性能优越的轴对称单元 [8]. Pian 和 Tong[9] 改用以下的约束条件取得的应力项：

$$\partial \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_\lambda)\mathrm{d}V = 0 \tag{10}$$

来建立性能优越的 8 节点立体杂交元. 另外一个选择假定应力项的方法是要求高于常应力的边界力与非协调位移 $\boldsymbol{u}_\lambda$ 的虚功等于零 [10].

杂交应力元的最有效的平衡处理为罚平衡法 [11], 即利用罚函数对单元施加平衡约束. 譬如加入罚函数项的 Hellinger-Reissner 泛函

$$\Pi_{HR}^{e} = \int_{V^e}\Big[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u})\Big]\mathrm{d}V - \alpha\int_{V^e}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}V \tag{11}$$

其中罚因子 $\alpha > 0$ 为一大数. 算例证明在建立一些杂交应力元，如以上所提的 Pian-Sumihara 4 节点平面元和 Pian & Tong 8 节点立体元时，加入罚函数项后都得到很大的改进. 优化的杂交应力有限元还可以依对称群理论导出 [12,13].

基于多变量的杂交应力元的建立还要考虑数值稳定性问题 [14]. Babuska[15] 和 Brezzi[16] 把 Hellinger-Reissner 变分原理化为数学上的鞍点问题，提出了有限元法的收敛准则，即所谓 B-B 条件. 在杂交有限元法方面的讨论，可以参看文献 [17, 18].

4 特殊的杂交应力有限单元

为了特殊结构或特殊应用，多年来曾建立了很多特殊杂交应力有限单元.

4.1 层合板结构

在层合板的交接面上只有一部分应力保持平衡. 在此情形下推导有限元所用变分原理中，除了位移外，只有横向应力连续 [19,20]. 关于用此原理推导层合板结构的杂交应力元，可以参看文献 [20~22].

4.2 Loof 和 SemiLoof 单元

在 1966 年的一个学术会议上， Loof 先生提议，在建立单元时可以不把节点放在单元角点上 [23], 后来 Iron 给这类单元起名为 Loof 元 [24]. 建立板壳弯曲元时，角节点上只有线位移 u, v 和 w, 而相邻单元间转动的连续性则由不在角点处的边界上的正交转动来维持，这类单元就称为 SemiLoof 元. Loof 元与 SemiLoof 元如果用位移法建立，均为非协调元，需要很复杂的手续才能得到可靠的结果. 但是如果用杂交应力元法来建立，手续很简单 [23]. 一般常用的板壳单元在角点上只有两个转动自由度. 所以不适合于不在同一平面相交的板壳问题. 但是 SemiLoof 元就很适合于此问题. 用 SemiLoof 元分析板结构的结果可以参看文献 [24~28].

4.3 具有旋转自由度的平板单元

不在同一平面相交的板壳问题的另外分析方法，为增加单元角点的旋转自由度 ω [29]. 在三维问题分析时，是位移 $\boldsymbol{u}$ 与旋转 $\boldsymbol{\omega}$ 同为独立场. 在此情形下的变分原理， Reissner[30] 主张将应变能分为对称与反对称两部分分别处理. 关于用 Hellinger-Reissner 泛函建立此类单元，可以参看文献 [29~34].

4.4 用于板壳分析的三维固体单元

一般三维固体单元如用于薄板分析，将有剪切自锁困难. 如用于薄壳分析，又多一个薄膜自锁的可能性. 在建立一个 18 个节点 54 个自由度的三维单元时， Sze 用了适当换算系数 [35], 所得的单元用来分析许多板壳结构，得到很精确的结果.

4.5 预先满足部分无边界力的杂交应力元

杂交应力有限元创始时曾指出，其特点之一为可以建立预先满足部分无边界力的单元 [36]. 一个算例是用有圆柱面的单元分析平面弹性力学问题 [37].

4.6 预先满足平衡与协调的杂交应力元

为了分析平面断裂问题而建立的一种特殊杂交应力单元 [38], 是根据余能原理，其中的应力预先满足平衡条件，而且相应的应变还满足应变位移关系. 在此情形下应力与位移都可以用同一应力函数表示. 变分原理的表达式可以改写为在边界为 C 的领域中，下列泛函为驻值的条件

$$\Pi_{mC}^{e}=\oint_{C}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{u}}\right)\mathrm{d}S \tag{12}$$

其中边界力 $\boldsymbol{T}$ 与边界位移 $\boldsymbol{u}$ 均由假定单元内应力函数 $\boldsymbol{\beta}$ 代表. 边界位移 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 插值以节点位移 $\boldsymbol{q}$ 为待定参数. 由于泛函 Π_{mC}^{e} 为驻值，函数 $\boldsymbol{\beta}$ 可以在单元上消除，而得到单元刚度矩阵.

用此方法建立平面裂纹尖端的单元时，可以在假定应力函数中加入奇异项. 所以有限元分析后，可以直接得到裂纹尖端应力强度因子. 此方法在断裂问题方面的推广包括：加劲板上裂纹尖端应力强度因子和加劲杆应力分布 [39] 以及不同各向异性介质间界面裂缝尖端应力分布 [40].

为了用有限元法分析非均匀分布微型结构的多相材料的二维问题，Ghosh[41] 曾建议将整体分为多边形网络，其中每个包括一个弹性杂质的多边形的基体为一个单元. 至于如何推导此单元的刚度矩阵， Zhang 和 Katsube[42] 提出了一个根据预先满足平衡与协调的应力的变分原理的方法，此单元分为基体和杂质两部分. 在基体部分的内外边界分别用 C_1 和 C_2 表示. 用变分泛函 (12), 其中边界力 $\boldsymbol{T}$ 与边界位移 $\boldsymbol{u}$ 均由假定域内应力函数 $\boldsymbol{\beta}_m$ 代表，只是边界 C_1 的 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 由杂质部分边界的未知位移 $\boldsymbol{u}$ 表示. 边界 C_2 的 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 由节点位移 $\boldsymbol{q}$ 插值. 在杂质部分所用的变分泛函是

$$\Pi_{mC}=\frac{1}{2}\oint_{C_1}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mathrm{d}S-\oint_{C_1}\overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mathrm{d}S \tag{13}$$

其中边界力 $\boldsymbol{T}$ 与边界位移 $\boldsymbol{u}$ 均由假定单元内应力函数 $\boldsymbol{\beta}_i$ 代表，只是 $\overline{\boldsymbol{T}}$ 是和基体部分边界力相反的边界力. 用变分法可以把 $\boldsymbol{\beta}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_i$ 在域内消除，而得到单元刚度矩阵. 此方法可以用于建立含有坚固杂质 [43] 或空隙 [44] 的单元.

为了分析一些板弯曲和平面弹性力学问题， Jirousek 和他的同事们建立了一种根据符合所有基本微分方程的位移分布的特殊单元，称为 Hybrid-Trefftz 单元 [45,46]. 其实与此节所述的杂交应力元等价.

4.7 压电介质杂交有限元

为了分析压电介质的断裂问题，刘和吴建立了一种适于机电耦合分析的优化杂交有限元模型 [47], 相当于弹性力学问题的 Pian-Sumihara 元 [7]. 并且用来分析裂纹尖端应力分布.

5 结束语

根据合理的变分法并且经过优化处理，可以建立高功效的杂交应力元. 在许多结构力学的问题上，这种杂交元法比位移元有效. 有一些特殊的力学问题，只有用杂交应力元法处理才方便.

参 考 文 献

1 Pian T H H. Some notes on the early history of hybrid stress finite element method. *Int J Number Meth Engng,* 2000, 47: 419~425

2 Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA J,* 1964, 2: 1333~1336

3 Pian T H H, Tong P. Basis of finite element methods for solid mechanics. *Int J Numer Meth Engng,* 1969, 1: 3～28
4 吴长春，卞学鐄．非协调数值分析与杂交元方法．北京：科学出版社， 1997
5 Severn R T, Taylor P R. The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed. *Proc Ins in Civil Engrs,* 1966, 34: 153～170
6 Pian T H H, Chen D P. Alternative ways for formulation of hybrid stress elements. *Inter J Numer Meth Engng,* 1982, 18: 1679～1984
7 Pian T H H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements. *Inter J Numer Meth Engng,* 1984: 1685～1695
8 Tian Z. Axisymmetric solid elements by a rational hybrid stress method. Computers and Structures, 1985, 20: 141～1498
9 Pian T H H, Tong P. Relations between incompatible displacement model and hybrd stress model. *Int J Numer Meth Engng,* 1986, 22: 173～181
10 Pian T H H, Wu C C. A rational approach for choosing stress term for hybrid stress finite element formulation. *Inter J Numer Meth Engng,* 1988, 26: 2331～2343
11 Wu C C, CHeung Y K. On optimization approachs of hybrid stress elements. *Finite ELements Analysis and Design,* 1995, 21: 111～126
12 Punch E F, Atluri S N. Development of and testing of stable, invariiant isoparametric curvilinear 2- and 3-D hybrid stress elements. *Comp Meth Appl Mech Engng,* 1984, 47: 331～356
13 Punch E F, Atluri S N. Application of isoparametric three-dimensional hybrid stress finite elements with least-order stress fields. *Computers & Structures,* 1984, 19(3): 409～430
14 Wu C C. Dual zero energy modes in mixed/hybrid elements-definition, analysis and control. *Compu Meth Appl Mech Engng,* 1990, 81: 39～56
15 Babuska I. The finite element methods with Lagrange multipliers. *Numer Meth,* 1973, 20: 179～192
16 Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. *RAIRO,* 1974, Ser. Rouge, 8: 129～151
17 Xue W M, Karlovitz L A, Atluri S N. On the existense and stability conditions for mixed-hybrid finite element solutions based on Reissner's variational principle. *Int J Solids Structures,* 1981, 21: 97～116
18 周天孝．鞍点有限元格式的等价定理和强 Babuska-Brezzi 条件判别准则．中国科学， 1981, 1: 13 ～24
19 Reissner E. On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory. *Int J Solids Structures,* 1986, 23: 193～198
20 黄黔．杂交能变分原理及层合板三维理论的基础．应用数学和力学， 1988, 9: 599～608
21 Pian T H H, Li M. Stress analysis of laminated composites by hybrid finite elements. In: Kuhn G, Mang H, ed. Discretization Methods Structural Mechanics, IUTAM/IACM Symposium Vienna 1989, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1990. 363～372
22 Jing H S, Liao M L. partial hybrid stress element for analysis of thick laminated composite plates. *Inter J Numer Meth Engng,* 1989, 28: 2813～2827
23 Loof H W. The economical computation of stiffness of large structural elements. presented at Int Symposium on Use of Computer in Structural Engineering, Univ Newcastle-upon-Tyne, 1966
24 Irons B M. The semiloof shell element. In: Ashwell D G, Gallagher R H, ed. Finite Elements for Thin Shells & Curved Memebers. London: Wiley, 1978: 197～222
25 Pian T H H. On hybrid and mixed finite element methods. In: Proc Invitational Symposium on FInite Element MEthod. Hefei China, May 19～23, 1981. Beijing: Science Press, 1982. 1～19
26 Pian T H H, Kang D, Wang C. Hybrid plate elements based on balanced stresses and displacement. In: Hughes T J R, Hinton E, eds. Finite Element Methods for Plate and Shell Structure, Vol.1: Element Technology. Swansea, U K: Pineridge Press International, 1986. 24～41
27 Wang C, Pian T H H. Hybrid semiloof element for buckling of thin-walled for buckling of thin-walled structures. *COmputers & Structures,* 1988, 30: 811～816
28 Sze K Y. Simple semiloof element for analyzing folded-plate structures. *J of Engng Meth,* ASCE, 1994, 120(1): 120～134
29 Allman D J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Computers & Structures,* 1984, 19: 1～8
30 Reissner E. A note on variational principles in elasticity. *Int J Solids Struct,* 1965, 1: 93～95
31 Hughes T J R, Brezzi F. On drilling degrees of freedom. *Comp Meth App Mech Engng,* 1989, 27: 105～121

32 Ibrahimegovic R L, Taylor R L, Wilson E L. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. *Inter J Numer Meth Engng,* 1990, 30: 445~457
33 Sze K Y, Ghali A. Hybrid plane quadrilateral element with corner rotations. *J Struct Engng, ASCE,* 1993, 119: 2552~2572
34 Cazzani A, Atluri S N. Four-node mixed finite elements, using unsymmetrical stresses for linear analysis of membranes. *Computational Mechanics,* 1993, 11: 229~251
35 Sze K Y, Yi S, Tay M H. An explicit hybrid stabilized eight-node solid element for thin shell analysis. *Inter J Numer Mech Engng,* 1997, 40: 1839~1856
36 Pian T H H. Element stiffness matrices for boundary computatibility and for prescribed boundary stresses. Proc Conf on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL TR-66-80, 1966. 457~477
37 Pian T H H, Tian Z. Hybrid solid element with a traction-free cylindrical surface. In: Spilker R L, Reed K W, eds. Proc Symposium on Hybrid and Mixed Finite Element Methods. ASMD AMD Vol 73, 1985. 69~75
38 Tong P, Pian T H H, Lasry S. A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. *Inter J Numer Meth Engng,* 1973, 7: 297~308
39 Tong P. A hybrid finite element method for damage tolerrance analysis. *Computer & Structures,* 1984, 19: 263~269
40 Chow W T, Beom H G, Atluri S N. Calculation of stress intensity factors for an interfacial crack between dissimilar anisotropic media using a hybrid element method and the mutural integral. *Computational Mechanics,* 1995, 15: 546~557
41 Ghosh S, Mukhopaddhyay S N. A two dimensional automatic mesh generator for finite element analysis for random composites. *Computers & Structures,* 1991, 41: 241~256
42 Zhang J, Katsube N. A finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed elastic inclusions. *Finite Elements Analysis Design,* 1995, 19: 45~55
43 Zhang J, Katsube N. A finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed rigid inclusions. *Inter J Numer Meth Engng,* 1995, 38: 1635~1653
44 Piltner R. Special finite elements with holes and internal cracks. *Inter J Numer Meth Engng,* 1985, 21: 1471~1485
45 Jirousek J. Hybrid-Trefftz plate bending elements with *p*-method capabilities. *Inter J Numer Meth Engng,* 1987, 24: 1367~1397
46 Jirousek J, Venkatesh A. Hybrid-Trefftz plane elasticity elements with *p*-method capabilities. *Inter J Numer Meth Engng,* 1992, 35: 1443~1472
47 刘鸣，吴长春. 压电介质机电耦合裂尖场的杂交元数值分析. 科学通报， 1999, 44(6): 603~608

RECENT ADVANCES IN HYBRID STRESS FINITE ELEMENT METHODS

Theodore H.H. Pian

Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139-4307, USA

Abstract Introduction of multivariate variational principles for the formulation of finite element methods for solid mechanics, presentation of the progress made in advancing the method for constructing hybrid stress finite elements, and description of special applications of the hybrid stress finite element methods.

Keywords hybrid finite element, variational methods, plates and shells, heterogeneous material, fracture analysis