

湍流的分形特征

黄真理

国务院三峡办技术司，北京 100044

摘要 综述了湍流分维测量的最新成果，涉及湍流分维测量的传统证据、分维测量方法以及湍流分维测量成果，重点详细介绍了湍流分维测量的各种方法及其优缺点，讨论了各家的测量成果，指出了具有广泛影响的 Sreenivasan 等人使用的分维测量方法存在的问题，介绍了作者最新的成果。最后，综述了 N-S 方程与分形、标度律、湍流的理论分形模型等与湍流分维应用相关的领域的最新进展。对湍流分形研究进行了讨论和展望。

关键词 湍流，分形，分维，N-S 方程，标度律，湍流理论分形模型

1 引言

湍流又称紊流，是长期的、世界公认的难题。目前，研究湍流的思路很多，不同的学者正试图从不同的角度来揭示湍流的本质和规律。近二十多年来，分形理论及其应用的发展十分迅速，覆盖的学科十分广泛，成为非线性科学的重要研究内容之一。经典几何学是以古希腊的欧几里得 (Euclid) 几何学为基础的逻辑体系。欧几里得几何学里的形状是线和面、圆和球、三角形和锥，自然界的几何可以归结为点、线、面的组合，其中的线和面都被理想化为光滑的。微积分和近代数学许多分支均以此理想化为基础。然而，自然界的线和面并不都是光滑的。相反，如雪花、山脉轮廓、海岸线、河流形状、布朗运动轨迹、生物组织结构以及本文中湍流的图像等等，往往是粗糙、破碎的。Mandelbrot 从 60 年代起就注意到了自然界中像海岸线这样复杂的曲线，提出分形几何学 (fractal geometry) 来描述和研究这些形态极不规划或极为破碎的几何对象^[1]。利用 PLIF (Planar Laser Induced Fluorescence) 技术可以获得真正意义上湍流二维空间时均浓度、瞬时浓度、脉动浓度和能谱等信息^[2]。瞬时图像十分复杂，湍流界面卷褶、破碎而且有细小的“孤岛”存在，实际上包含着大量的湍流信息。过去，由于受统计理论的影响，不论是数值计算还是试验获得的等浓度 (或温度) 线，我们都把它们描绘成连续光滑的曲线。而从实际的流动显示图片中，我们会发现，云团的形状是复杂的，等浓度线也是不光滑的。云团的形成是湍流作用的结果，把云团描绘成连续、光滑的曲线 (面)，实际上抹掉了湍流的重要信息。那么，如何从这些复杂的几何图案中找出规律，或者更准确地说，这些复杂几何图案中究竟有无规律，以及用什么手段和方法来进行研究，一直是湍流工作者思索的问题之一。早在 1922 年，Richardson 提出完全发展湍流是由不同尺度的涡构成，包含了湍流涡的自相似性的重要思想。

收稿日期：1999-08-02，修回日期：2000-06-29

· 581 ·

分形理论的研究对象，有两个共同的特点：一是没有特征长度；二是局部和整体具有自相似性。有特征长度的形状，其重要特征是平滑程度。这是因为与特征长度相比即使把小的部分近似平滑，也不会失去整体的特征。然而，对海岸线和 Koch 曲线来说，不管把局部怎么放大来看，它都像原来一样复杂。复杂的形状中深藏着有组织的结构。分形理论的数学本质在于，它改变了我们认识事物和分析事物的测度观，如用 Hausdorff 测度取代我们已习惯的欧氏测度。这种测度观的改变，使我们能揭示出复杂现象背后隐藏着的自相似 (self-similar) 或自仿射 (self-affine) 规律，为我们认识和处理“乱七八糟”的自然现象提供了有力的工具。

分形理论应用于湍流研究，总起来说，大致有这样三个方面的发展：一是湍流的分维测量，表明了湍流的分形特征；二是描述湍流的 Navier-Stokes (简称 N-S) 方程与分形有关；三是湍流的理论分形模型，主要集中在间歇模型和湍流扩散上。

2 湍流的分维测量

2.1 湍流具有分维的传统证据

从过去的湍流研究理论和数据中，我们可以发现很多有关湍流具有分形特征的证据。

Turcotte (1988)^[3] 重新分析海中温度脉动能谱图 (图 1, Grant 等人, 1968). 从分形的角度来看，在波数 k 较小的惯性子区，分维 $D = 5/3$. 而在高波数的黏性区，分维 $D = 2$.

事实上，人们早就根据实验发现能量耗散率 $E(x)$ 的相关函数有如下关系^[4]

$$\langle E(x) \cdot E(x+r) \rangle \propto |r|^{-\mu} \quad (1)$$

式中， μ 为间歇因子， $0.2 < \mu < 0.5$. 表示湍流在能量耗散区具有分形构造。Mandelbrot (1982)^[1] 认为湍流能量耗散区的分维为 $3 - \mu$.

对于 Kolmogorov 各向同性湍流，根据空间两点的温度方差和压力方差分别随两点距离 r 的 $1/3$ 和 $2/3$ 次方变化的规律，可以推知二维空间中等温线和等压线的分维 D 分别为 $5/3$ 和 $4/3$ ^[5].

2.2 湍流分维测量的方法

现在我们来给出分维在数学上比较严格的规定：

假定 $D > 0$, 用直径为 ε 、个数为 $N(\varepsilon)$ 的球 (ball) 覆盖集合 S , 则 D 维测度 M_D 表示为^[6]

$$M_D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(D) N(\varepsilon) \varepsilon^D \quad (2)$$

式中， $\gamma(D)$ 为几何因子，对直线、正方形和立方体有 $\gamma(D) = 1$; 对圆盘、球体 (sphere) 分别为 $\gamma(D) = \pi/4, \pi/6$; D 称为 Hausdorff-Besicovitch 维数，对自相似集，Hausdorff-Besicovitch 维数与自相似维数 (similarity dimension) 相等。应该说明的是，Hausdorff-Besicovitch 维数的定义并不要求覆盖集合 S 的球的直径 ε 都为一样，也可以小于 ε ，这时， D 维测度 M_D 就取下确界 (infimum)。这里的“球”及其“直径”是个抽象的概念，既可指直线、正方形和立方体，也可指圆盘、球体 (sphere) 等等。有关这方面的数学问题可参阅文献 [7] 和 [8].

如果测量海岸线的码尺为 ε ，覆盖海岸线的码数为 $N(\varepsilon)$ ，根据式 (2) 有

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D} \quad (3)$$

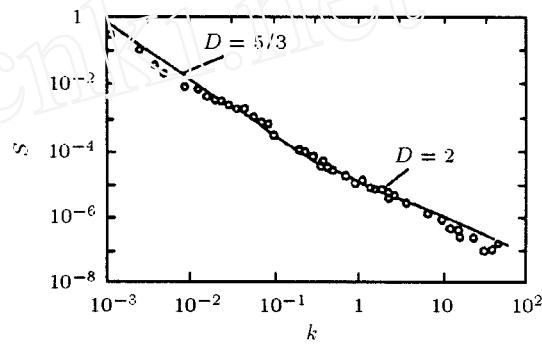


图 1 海中温度脉动能谱图^[3]

这样，由海岸线长度 $L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$ 就可以推出

$$L(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1-D} \quad (4)$$

因此，可以通过将 $N(\varepsilon)$ 或 $L(\varepsilon)$ 与 ε 绘制在双对数坐标上，利用回归方法确定直线斜率来求出分维 D 。这种通过计算覆盖集合 S 的盒子（box）数目来确定的分维，又称盒子维数（box dimension 或 box counting dimension）。

在湍流分维测量中，还经常会用到 Mandelbrot^[1] 提出的所谓周长（ P ）- 面积（ A ）关系： $P \propto A^{D/2}$ 。Feder (1988)^[6] 认为该关系式与式 (3) 和 (4) 是一致的，可以从式 (3) 或 (4) 中推导出来。

由于还没有找到对任何事物都适用的定义，在有关分形和分维的专著和论文中，还有很多关于维数的定义方法，如信息维、关联维等等。对不同的研究对象，有的适用有的不适用。分形和分维的概念，还在不断发展中。

自然界中没有真正的分形体。与理论分形体如 Koch 曲线等相比，实际分形体只在有限层次而非无限层次范围内具有分形特征。另一方面，实际分形体的自相似也不像 Koch 曲线那样十分严格，而是统计上的自相似，这是实际分形体与理论分形体的根本差别，也是带来分维测量不确定性的主要原因^[9]。

分维是分形理论的基本量。实用的分维测量方法较多，视具体研究对象而定。高安秀树 (1986)^[4] 把分维测量归为五类：(1) 改变粗视化程度求维数。比如用脚规去量测海岸线分维就属此类；(2) 根据测度关系求维数。这一方法适用于测量某一类分形体的分维。与改变粗视化程度求维数方法的不同之处在于，不变化单位正方形的大小，而是预先尽量把它固定得小一些；(3) 根据相关函数求维数。在进行统计分析时，我们常常采用到相关函数。如果相关函数本身属于指数型或高斯型，那么就不存在分形问题，因为它们具有特征长度。如果相关函数符合幂型分布，分布就具有分维，可以利用幂指数求出分维；(4) 根据分布函数求维数。这个方法与相关函数方法类似；(5) 根据波谱求维数。对空间或时间的随机变量进行统计分析时可以得到波谱。利用波谱的幂型分布的指数，可以确定分维。

湍流分维测量的困难表现在两个方面：一是湍流信息的获取；二是分维测量本身。

2.2.1 湍流信息的获取

湍流信息有矢量和标量两种形式。从测量技术的角度，湍流信息的获取可分为两大类：一是传统的测量方法，单一的流动测量仪器如压力、温度或热线风速仪以及 LDV (Laser Doppler Velocimeter) 测速仪获取的流动中某一点的信息，比如某一点速度随时间的变化过程。另一类是基于流动显示技术的一维或二维空间信息，其中 PLIF 技术是一种十分重要而且定量化的技术，该技术自 70 年代中期用于剪切层的混合流动显示开始发展起来，已经历了从气体到水体，从定性到定量，从线测量到面测量等不同的发展过程，逐步得到改进和完善。例如：多种激光染料用于水体的流动显示；根据诱导荧光对酸度 (pH 值) 的敏感用于化学反应流动中进行显示；在超音速气体流动研究中加入碘蒸汽或 NO 气体可提高流动显示的可视性，凡此等等，结合激光片光技术的发展，已广泛应用于旋涡分离流、化学反应流、混合流和湍流基础研究中，有效地揭示了流动的三维结构。通过研究和改进，目前 PLIF 技术已可以定量测量湍流浓度场，并且具有较高精度^[2,10,11]。

本文讨论的分维主要是二维平面（准确地说，是二维截面）湍流图像标量场的成果。真实的湍流属于三维问题，目前真正三维湍流图像的分维测量尚不可能。那么，自然会产生这样的疑问：三维空间中湍流界面的分维如何测量？它与二维截面的分维有没有关系？这就需要用到所谓的余维相加性定律（Law of Additive Codimensions）(Marstrand, 1954; Mandelbrot, 1982)^[1]：

如果 S_1 和 S_2 是两个嵌入 d 维空间的独立集合，并且如果有：余维 $(S_1) + \text{余维} (S_2) < d$ ，那么， S_1, S_2 截面的余维等于 S_1 的余维和 S_2 的余维的总和。

如果 F 被嵌入三维空间中，并且被平面切割。上述定律表明：截面集合的维数小于 F 的维数。根据余维相加性定律，如果一、二、三维湍流图像的分维分别为 D_1, D_2 和 D_3 ，则有 $D_3 = D_2 + 1 = D_1 + 2$ 。这个做法的前提是：截面在不同方向都具有相同的分维。

Sreenivasan 等人^[8] 利用二维湍流图像中抽取一维截线 (line intersection) 检验了余维相加性定律，二维测量的结果与一维结果相近，说明余维相加性定律在湍流测量中是有效的。

2.2.2 分维测量方法

改变粗视化程度求维数的方法，也叫粗视化方法，它是实际测量分维的常用方法。粗视化方法的重要思想在于：分形体的细节是通过码尺的选择来反映的。码尺越大，反映的细节越少。码尺越小，反映的细节越多。粗视化方法通常也可分成三种：

(1) “脚规”(divider) 法

以分形曲线一端为起点，然后以此点为中心画一个半径为 ε 的圆，把此圆与曲线最初相交的点用直线连接起来。把此交点重新看作起点，反复进行同样的操作。这样，用长度为 ε 的线段去近似分形曲线，线段总数记为 $N(\varepsilon)$ ，线段总长 $L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$ 。如果改变码尺 ε ， $N(\varepsilon)$ 也要变化。从而可以利用式 (3) 求出分维。这种方法，叫做“脚规”法。

这种方法反映了粗视化方法的思想。分形曲线的细节，通过线段 ε 的大小来反映。线段 ε 越长，反映的细节越少，小于线段 ε 的迂回曲线被忽略了。而线段越短，反映的细节显然越多。

这种方法只适用于分形曲线，不适用于平面上点的分布。同时，我们也看到，这种测量方法较为繁琐，技巧性较高，比如在曲线十分破碎时如何确定“脚规”与曲线的交点，常常需要测量者自己拿主意。另一方面，这种方法也不适于在计算机上快速测量。

(2) “香肠”(sausage) 法

这种方法在操作上与“脚规”法不同。该法考虑所有距离海岸线 (或边界线) 不超过 ε 的点，这些点组成一个像香肠一样、宽为 2ε 的带子 (tape 或 strip)，测量带子的面积，并将面积除以 2ε 就可得到海岸线的估算长度 $L(\varepsilon)$ 。改变 ε ，则 $L(\varepsilon)$ 也要变化，从而可用式 (4) 确定分维。如果海岸线为直线，显然带子就是个矩形。由于这种方法还没有名称，而且在操作中获得的带子像香肠一样，形象地称之为“香肠”法。

在计算机上测量时，将海岸线的图像数字化，以海岸线上的每个像素为中心画半径为 ε 的圆，这样就可得到沿海岸线的带子，带子宽度为 2ε ，则带子的面积就是带子内的像素数目 $N(\varepsilon)$ (以像素为基本面积单位)，这样有： $N(\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot L(\varepsilon)$ 。因此，可利用式 (3) 或式 (4) 来确定分维。Sreenivasan 和 Meneveau (1986)^[14] 最初应用此法测量湍流 / 非湍流界面的分维，但测量圆形射流的分维为 $D_2 = 1.33 \pm 0.15$ ，这个精度似乎差了些。Takeno 等人 (1990)^[12] 用此法测量了火焰表面的分维。

(3) “数盒子”(box counting) 法

该法的要点是：用边长为 ε 的正方形网格分割分形图形 (像)，即进行空间量子化。然后数出要研究的形状中所含的正方形网格数 $N(\varepsilon)$ 。换句话说，在图像处理中，就是要计算出含有分形图像像素 (至少一个) 的所有网格数目。这样，可以利用式 (3) 求出分维。

该法易于在具有图像处理功能的计算机上实现。通过把分形图形 (像) 数字化，很容易进行空间量子化并且改变网格尺度 ε 。它不仅适用于分形曲线，也适用于平面上点的分布以及有大量分岔的河流。Prasad 和 Sreenivasan (1990)^[13] 主要利用此法进行了湍流 / 非湍流界面分维的测量。PLIF 技术获取的湍流二维瞬时图像中，湍流界面卷褶、破碎而且有细小的“孤岛”存在，因此，用“数盒子”法测量湍流分维是比较合适的。

Falconer 认为用“数盒子”法测量分维至少有五种方法，不同方法不一定得到相同的分

维^[8]. Sreenivasan 等人^[13~15]用“数盒子”法测量湍流分维时, 是先从湍流图像中提取边界线(湍流/非湍流界面), 然后测量边界线的分维。通过仔细研究, 我们发现: 利用这种“数盒子”法去测量卷褶(convolutedness)较严重的分形曲线(如海岸线), 如果把含有海岸线的所有网格都记入 $N(\varepsilon)$ 的话, 测得的分维 D_2 就偏小。如果把记入 $N(\varepsilon)$ 的网格涂黑, 因为码尺 ε 反映的细节过多了一点, 以致出现成片的黑正方形, 如图 2(b) 所示。而粗视化技术的重要思想在于, 码尺 ε 越大, 反映的细节越少, 反之亦然。

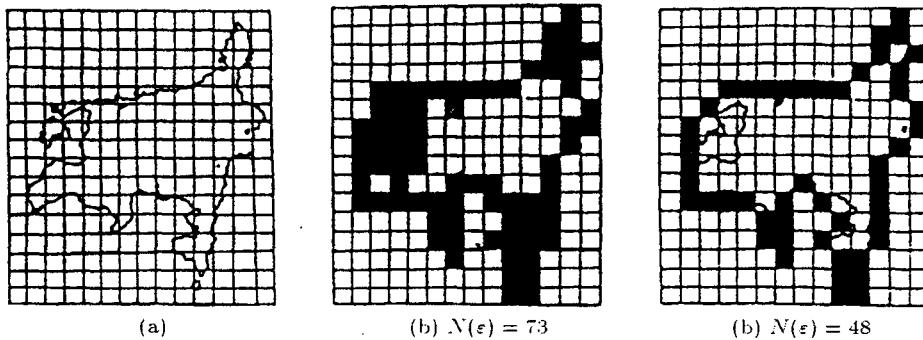


图 2 用“数盒子”法和修正“数盒子”法近似某海岸线的比较

因此, 我们提出了修正“数盒子”法, 要点是: 对湍流图像进行空间量子化, 把含有湍流区(包括界面)的网格涂黑(其他网格则为白色), 这样, 把和白网格相邻的黑网格看成界面的近似, 计算网格数目 $N(\varepsilon)$ 。该法与 Sreenivasan 等人采用的“数盒子”法的不同之处是: (1) 不需要事先抽取界面; (2) 只把与白网格相邻的黑网格计入 $N(\varepsilon)$ 。如图 2(c) 所示, 把含有一小点岛及海岸线的正方形涂黑, 把与白正方形相接的黑正方形看成岛的海岸线的近似。图 2(c) 中为简便美观起见, 仅把与白正方形相接的部分涂黑, 即岛的近似海岸线。而涂黑的近似海岸线内部的迂回曲折的部分“真正海岸线”被忽略了, 因为码尺 ε 现在还无法反映这部分“真正海岸线”的细节。随着码尺的减小, 这部分细节会被逐渐反映出来, 这才体现粗视化方法的本质思想。应该特别强调指出, 本文测量的是“岛屿的海岸线”的分维, 不像文献[13]仅仅测量“海岸线”的分维而忽略了“岛屿”的存在。Lovejoy(1982)^[5]利用周长(P)-面积(A)测量云和雨区的分维时, 周长 P 是通过计算与非云(雨)区相邻的云(雨)的像素来确定的^[6], 这与修正“数盒子”法的思想相一致。

比较“数盒子”法和本文提出的修正“数盒子”法在测量 Koch 曲线的差别。如图 3 所示(实线是回归结果), 利用“数盒子”法测得网格数 $N(\varepsilon)$ 和网格尺寸 ε (以 pixel 为单位)的关系, 测得 Koch 曲线的分维 $D_2 = 1.1230$, 这个结果与理论值 $1.26186\cdots$ 相差 $\Delta D_2 \approx 0.1389$ 。一般说来, 这个差值过大, 不是由误差和所谓分维测量的不确定性引起的。对直线和圆形曲线的测量发现, 所得结果相当好, 与理论值 1 基本接近。修正“数盒子”法的测量结果, $D_2 = 1.26195$, 与理论值相当接近, 相关性也很好。

杨国伟(1992)研究了利用周长 P 与面积 A 的关系 $P \propto A^{D/2}$ 测量分维 D_2 时的不确定

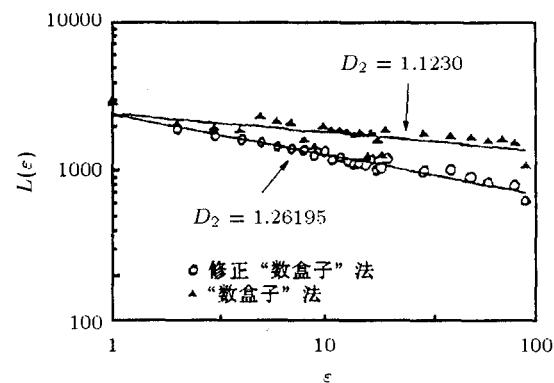


图 3 用“数盒子”法和修正“数盒子”法
测量 Koch 曲线比较

性问题^[9]. 为了进一步研究分维测量的精度, 需要考虑利用式(3)测量分维时的不确定性问题. 通过对三种标准曲线(直线、圆和 Koch 曲线)和湍流射流图像进行多次分维测量, 发现有两个因素影响分维测量结果: 网格尺寸和空间量子化的起始点. 通过改变起始点位置对三条标准曲线以及圆射湍流射流图像进行大量的分析, 我们发现对分维测量结果确有一定的影响, 与理论值相比, 最大绝对误差约为 ± 0.04 ^[2].

2.3 湍流分维测量成果

2.3.1 准二维或二维湍流图像的分维

湍流中, 界面(interface)是一个经常使用的名词, 有多种不同的定义, 如等浓度线(面)、等压线(面)、等速度线(面)、等耗散线(面)等等. 这些界面统称为标量界面(scalar interface), 研究这些界面的性质对认识湍流是十分重要的, 因为它们与卷吸和混合过程密切相关. 湍流分维测量中, 通常利用示踪物获得湍流图像. 本文主要讨论这方面的成果.

根据分形理论对湍流图像进行分维测量, 最有名的当推 Lovejoy (1982) 的工作^[5]. Lovejoy 根据 Mandelbrot (1982)^[1] 提出的所谓面积(A)-周长(P)关系, $P \propto A^{D/2}$, 测量了气象卫星和雷达照片中云和雨区在 1 km 到 10^3 km 很宽的范围内存在分维 $D_2 = 1.35 \pm 0.05$. 云和雨区是由天空中的水蒸汽形成的, 受大气湍流的驱使. 因此, 云和雨区的图像反映了大气湍流的作用. 这个值与 Kolmogorov 各向同性均匀湍流的等压线分维 $4/3$ 相当接近. Rys 和 Waldvogel (1986)^[6] 利用雷达获得的冰雹云(hail cloud)的图像进行了 P - A 关系研究, 认为当周长 $P > 3$ km 时, 分维 $D_2 = 1.36 \pm 0.1$, 与 Lovejoy 的结果基本一致. 但当周长 $P < 3$ km 时, 分维 $D_2 \approx 1$. 小舞知子(1984)^[4] 在洗脸盆大小的容器中将水进行搅拌后滴入墨汁使其形成“水墨画”, 然后测此“水墨画”的分维 D_2 约为 1.3. 高宝贵树认为, 大气这样的大流动和洗脸盆中的小流动具有极为相似的性质, 表现了流体流动的普遍特征. 应该指出的是, 不论是云和雨区, 还是“水墨画”和冰雹云, 也不论它们的图像是通过卫星还是雷达, 或者是摄像机直接获取, 这些图像都不是真正二维的, 而是多层二维图像的叠加, 即准二维图像, 这是应用这些成果时应该十分小心的地方.

Sreenivasan 等人(1986, 1990)^[13~15] 利用 PLIF 技术获得的湍流图像对边界层、轴对称圆形射流、平面尾流和混合层问题等开展了湍流分维的测量和分析, 取得了有广泛影响的成果. 他们的主要结论有: (1) 湍流分维存在两个区. 其中, 积分尺度(integral scale)和 Kolmogorov 尺度之间称为 K 区, 分维为 1.36 ± 0.05 , 这个值可作为完全发展湍流的初步近似; (2) Kolmogorov 尺度和 Batchelor 尺度之间称为 B 区, 分维为 1.7 ± 0.03 . Sreenivasan 等人还分析了实验中截面厚度、雷诺数等对分维值的影响. 根据动力相似理论, 人们通常认为只有惯性子区(Kolmogorov 尺度 \ll 惯性子区 \ll 积分尺度)才具有分形特征, Sreenivasan 等人的成果中一个引人注目之处就在于, 湍流的标度区间很宽, 从 Kolmogorov 尺度到积分尺度. 为什么会这样? 原因是不清楚的. Lovejoy 关于云的分维测量中标度区间从 1 km 到 10^3 km, 这个范围也是出人预料的宽. 其他与湍流有关的流动现象的分维测量工作也取得了一些成果, 如 Takeno 等人(1990)^[12] 测量了火焰表面(flame surface)的分维. Fan (1988) 对平板边界层的涡量面(vorticity interface)的一维测量结果为 0.37, 根据余维相加性定律在三维空间中的分维为 2.37.

黄真理(1994, 1995)^[16,17] 利用改进和完善的 PLIF 技术对自由湍流射流进行了分维测量和分析, 如图 4 所示是自由湍流射流的瞬时图像, 利用录像机记录信息, 抓拍时间为 0.04 s/frame, 而文献[13]中瞬时图像的抓拍时间为 0.8 s/frame. 文献[12]中采用照相记录方式获取火焰燃烧图像, 快门时间为 1/1000 s. 但是, 应该注意, 文献[12]获得的分维测量结果却比文献[13]的小.

图 4 是一幅二值化射流瞬时图像. 表 1 为射流的有关参数. d_0 为喷嘴直径, u_0, u' 和 Re 分别为喷嘴的时均速度、脉动速度和出口雷诺数($= d_0 u_0 / \nu$, ν 是水的运动黏性系数). $\Delta x, \Delta y$ 分

别为图像显示屏在水平方向和垂直方向的像素分辨率，即每个像素所代表的实际长度。从表 1 可以看出，本文所达到的最小像素分辨率为 $0.14 \times 0.1 \text{ mm/pixel}$ 。这与 Prasad 和 Sreenivasan 在文献 [15] 中所明确报道的像素分辨率为 $0.5 \times 0.5 \text{ mm/pixel}$ （文献 [13] 中未明确报道）和 Takeno 等人在文献 [12] 中的像素分辨率为 $0.277 \times 0.277 \text{ mm/pixel}$ 相比，我们的测量系统的像素分辨率是比较高的。

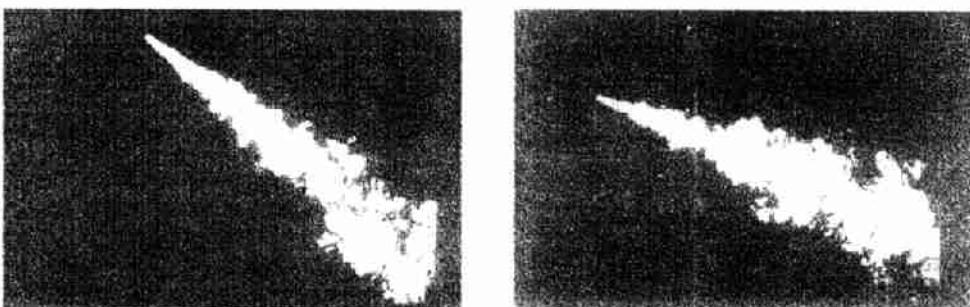


图 4 PLIF 技术获得的湍流射流瞬时图像 (二值化)

表 1 不同像素分辨率和研究区域中射流图像的分维测量结果

No.	d_0 (mm)	u_0 (cm/s)	u' (cm/s)	Re	Δx (mm/pixel)	Δy (mm/pixel)	研究区域 [*]	D_2	相关系数
1	6	75	11.32	4550	0.12	0.30	12	1.4296	0.9059
2	6	75	11.32	4550	0.30	0.43	38	1.4952	0.9347
3	6	75	11.32	4550	0.70	0.50	43	1.5153	0.8387
4	6	75	11.32	4550	1.05	0.74	45	1.5227	0.9123
5	3	20	36.72	6200	0.42	0.30	67	1.5883	0.8508

* 研究区域是指图像中射流从喷口算起的纵向距离 (X/d_0)

(1) 分维尺度的上、下临界点

为使图面简捷美观，图 5 仅仅给出了 No.1 和 No.2 两幅不同像素分辨率的射流图像的分维测量结果。从图中可以发现，射流中确实存在某一尺度范围的自相似性。

No.1 中网格 ε 在 $8 \text{ pixel} \sim 20 \text{ pixel}$ ($1.12 \text{ mm} \sim 2.8 \text{ mm}$) 范围内分维为： $D_2 = 1.4296$ ，回归相关系数为 0.9059。No.2 中网格 ε 在 $1 \text{ pixel} \sim 5 \text{ pixel}$ ($0.6 \text{ mm} \sim 3 \text{ mm}$) 范围内分维为： $D_2 = 1.4952$ ，回归相关系数为 0.9347。

湍流尺度的测量较为困难。利用 Wygnanski 和 Fieldler (1969) 的成果^[18]，可以粗略估计出射流在轴线上的最大纵向积分尺度 $A_f = 8.9 \text{ mm}$ ，最大横向积分尺度 $A_g = 3.6 \text{ mm}$ ；最大纵向耗散长度尺度 $\lambda_f = 1.1 \text{ mm}$ ，最大横向耗散长度尺度 $\lambda_g = 0.85 \text{ mm}$ 。因此，可以认为，射流分维尺度的上、下临界点约为积分尺度和耗散长度尺度。其他射流图像的测量和分析也证实了这一点。

另外，利用各向同性湍流中耗散长度尺度 λ_g 与 Kolmogorov 尺度 η 的关系^[19]，可以粗略估计 η 约为 0.044 mm ，这个尺度比耗散长度尺度约小一个量级。

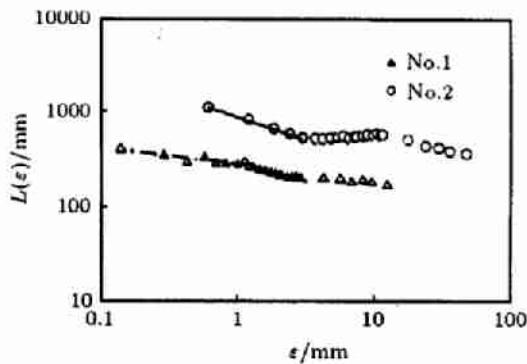


图 5 No.1 和 No.2 湍流射流分维测量结果

在 No.1 中 ϵ 小于 1.12 mm (8 pixel) 的数据似乎也有自相似性, 分维 $D_2 = 1.1603$, 相关系数为 0.7464, 如图 5 中虚线所示, 网格尺度范围为 $0.14 \text{ mm} \sim 1.12 \text{ mm}$. 由于这个范围的测量较少, 而且数据的相关系数似乎略小了一些, 这个尺度范围是否具有分维, 还需进一步研究. 当然, 这首先还需要提高测量的分辨率, 以便能探测更小的尺度空间.

应该指出, Sreenivasan 等人的 PLIF 射流图像的最大分辨率为 $0.5 \times 0.5 \text{ mm}/\text{pixel}$, 达不到能分辨他们所研究的射流图像的 Kolmogorov 尺度(约 0.15 mm). B 区的分维成果, 是他们基于泰勒假设 (Taylor's hypothesis), 利用点测量以获得较高的分辨率来研究尾流分维所取得的.

Lane-Serff (1993)^[20] 测量圆形湍流射流和羽流 (plume) 的分维结构时, 其分维尺度上临界点接近积分尺度, 下临界点为 Kolmogorov 尺度的数倍.

关于分维尺度的上、下临界点, Takeno 等人 (1990)^[12] 对火焰表面的分维测量和分析表明: 火焰分维尺度的上、下临界点大约分别是火焰厚度和火焰平均直径的一半, 与湍流特征尺度无关.

这里应该说明: 不论是圆形湍流射流, 还是平面尾流等湍流流动, 其湍流特征尺度如积分尺度、耗散尺度、Kolmogorov 尺度等都是随空间变化的, 不是一个常数. 因此, 用湍流特征尺度来表示湍流的上、下临界点只是一种近似估计. 这种将分维与湍流特征尺度相联系的做法, 可能对今后利用分维改进湍流模型会带来很多方便.

(2) 分维 D_2 沿程的变化

图 6 是根据表 1、表 2 绘制的湍流射流沿程 (X 方向) 发展时分维的变化. 随着湍流射流的发展, 射流图像的空隙和“孤岛”逐渐增多, 界面破碎更严重, 分维 D_2 也逐渐增大, 这是容易理解的.

图 6 中 $X/d_0 \approx 6$ 附近, 分维 D_2 的变化剧烈, 有一个“跳跃”, 过渡区很短. 这是由于湍流射流从初始段向完全发展区 (主体段) 转化, 经过很短的过渡段. 从这里可以看出, 分维的沿程变化, 可以反映出湍流射流的分区特性. Prasad 和 Sreenivasan (1990)^[13] 对雷诺数为 2000 的射流的测量也有同样的结论. 因此, 可以把分维作为判断湍流射流分区结构的一个指标, 它反映了湍流从简单到复杂、从剪切流到完全发展湍流的物理图像的变化特征.

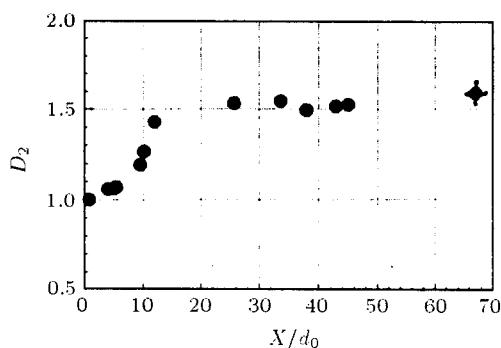


图 6 湍流射流分维 D_2 沿程 X/d_0 的变化

图 6 中使用了喷嘴直径 d_0 为 3 mm 、雷诺数为 6200 的一个数据. 应该指出, 在流动未达到完全发展湍流以前, 雷诺数对分维也有明显的影响, 平面尾流和混合流的测量数据表明^[13]: 随着雷诺数的增加, 分维也增大.

(3) 分维 D_2 随标量 (浓度) 的变化

射流喷嘴浓度为 C_0 , 在空间任一点的浓度为 C . 当射流从喷嘴射出后, 随着射流的发展, 由于湍流卷吸作用, 射流破碎加剧, 射流浓度也总体上趋于衰减. 图 7 为射流分维随浓度 C/C_0 的变化. 越靠近喷口, C/C_0 越大, 分维越小, 接近 1. 随着射流的发展, 浓度 C/C_0 减小, 分

表 2 分维随 X/d_0 的变化 (No.1)

X/d_0	D_2	相关系数
0.84	0.9981	0.9676
4.1	1.0592	0.8580
5.5	1.0686	0.9151
10.2	1.2639	0.9472
12	1.4296	0.9059

维增大，最大达到 1.5 以上。

图 7 中，分维 D_2 随 C/C_0 的变化呈高斯型分布。可用下式表示

$$D_2 = 1 + K_1 \exp \left[-K_2 \left(\frac{C}{C_0} - C \right)^2 \right] \quad (5)$$

式中， K_1, K_2 为回归常数， $K_1 = 0.5260, K_2 = 4.1594$ 。

式 (5) 中，当 $C/C_0 \rightarrow 1$ 时，分维 $D_2 \rightarrow 1$ ；当 $C/C_0 \rightarrow 0$ 时，分维 D_2 趋近于完全发展湍流的分维值，约 1.53。

Prasad 和 Sreenivasan (1990)^[15] 认为分维值与浓度（或“阈值”）无关。实际上，测量结果仅仅在一定范围内分维随浓度的变化平缓，但在高浓度（“阈值”）和低浓度区域，分维随浓度的变化是显著的，如图 8(a), (b) 所示。Miller 和 Dimotakis (1991)^[21] 的测量也表明分维与浓

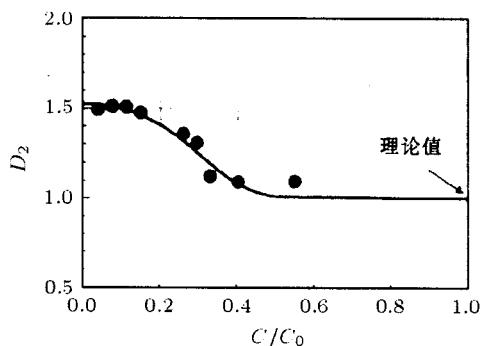
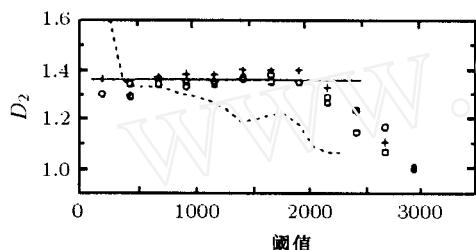


图 7 湍流射流分维 D_2 随浓度 C/C_0 的变化



(a) 穿过射流轴线的截面

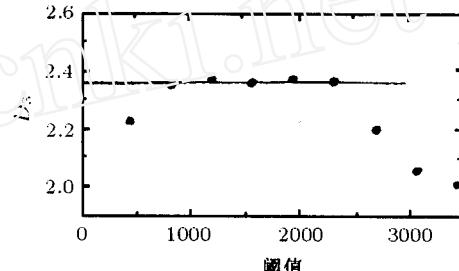


图 8 射流边界分维值随“阈值”的变化^[15]

度有关。Lane-Serff (1993)^[20] 对圆形湍流射流和羽流 (plume) 进行分维结构测量，考虑了浮力的影响。研究区域为 ($250d_0 \sim 550d_0$)，属于远区。片光厚度较大，为 Kolmogorov 尺度的数倍。如图 9 所示。实验结果表明：湍流分维是浓度的函数，最小值为 1.23 ± 0.01 ；射流与羽流的分维相同，浮力主要影响大尺度（平均浓度）。

2.3.2 完全发展湍流的分维

Sreenivasan 等人 (1990)^[13] 研究几种典型湍流的边界线获得了 K 区的分维 $D_2 = 1.36 \pm 0.05$ ，因此，他们推荐三维空间中完全发展湍流分维的初步近似值为 2.36 ± 0.05 。这个值与本文的测量结果相比显然偏小。Constantin (1990)^[20] 估算等浓度线的分维上限为 2.5。Constantin, Procaccia 和 Sreenivasan (1991)^[22]

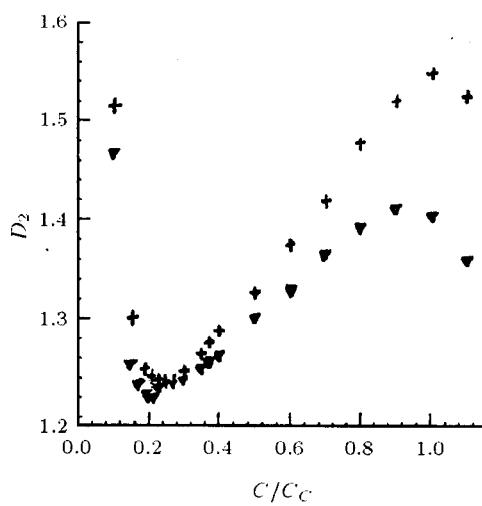


图 9 湍流射流和羽流的分维随浓度的变化^[20]
(C 为任意点浓度， C_C 为射流中心线的浓度均值)

认为完全发展湍流的等浓度线的分维为 2.67. 笔者认为, 从目前的大量数据和理论分析表明, 完全发展湍流的分维不应该小于 2.5. 本文中, 当沿程距离 $X/d_0 > 12$ 时, 分维 D_3 大于 2.36 ± 0.05 , 当 X/d_0 达到 67 时, 分维 D_3 高达 2.588. 利用我们的成果推荐完全发展湍流的分维值, 根据式(5), 随着湍流沿程方向发展, 射流逐渐变成完全发展湍流, 考虑到分维测量的不确定性影响, 笔者认为可采用 2.53 ± 0.04 .

如表 3 所示, Mandelbrot (1982)^[1] 认为 Kolmogorov 各向同性湍流的理论分维值为 2.67. Hentschel 和 Procaccia (1982)^[23] 把湍流看成自回避折叠的涡管集合体从理论上估算出完全发展湍流的分维在 2.5~2.75 的范围内. 笔者的结果与这个范围相当吻合.

表 3 完全发展湍流的分维值比较

	推荐值		理论估算值	
	黄真理 (1993)	Sreenivasan 等人 (1986, 1990)	Mandelbrot (1982)	Henstchel 和 Procaccia (1982)
完全发展 湍流分维值	2.53 ± 0.04	2.36 ± 0.05	2.67	2.5~2.75

2.3.3 问题讨论

(1) 片光厚度对分维的影响

正如前面所指出的那样, 不论是云和雨区 (Lovejoy, 1982)^[3], 还是“水墨画”(小舞知子, 1984)^[4] 和冰雹云 (Rys 和 Waldvogel, 1986)^[6], 也不论它们的图像是采用哪种方式记录的, 这些图像都不是二维的, 而是投影图像 (projection image), 即多层“云”的叠加结果. 利用 PLIF 技术获得的射流图像才是二维图像. 事实上, 由于存在片光厚度 δ , 它们实际上也是在截面厚度 δ 内的叠加结果. 所以, 我们总是希望把片光做得越薄越好. Sreenivasan (1990) 等人^[15] 的测量装置中片光厚度约为 0.25 mm. Takeno (1990) 等人^[12] 的片光厚度约为 0.4 mm. 本文中片光厚度约为 1.5 mm.

Prasad 和 Sreenivasan (1990)^[13] 研究了截面厚度 δ 对分维 D_2 的影响. 如图 10 所示是雷诺数为 4000 的射流和尾流的结果. 从图 10 可以看出, 随着截面厚度 δ/η (η 为 Kolmogorov 尺度) 的增加, 分维 D_2 减小, 随着 δ/η 的增大, 图像趋近于投影图像, 分维 D_2 为 1.22.

分维 D_2 沿截面厚度 δ/η 呈高斯型分布, 可表示为

$$D_2 = 1.22 + 0.147 \exp \left[-0.01075 \left(\frac{\delta}{\eta} \right)^2 \right] \quad (6)$$

这个关系是最小二乘法的回归方程, 并不是普适性的. 还不能认为任何雷诺数的流动都符合这个关系, 需进一步研究.

Lovejoy (1982) 利用 $P \propto A^{D/2}$ 关系获得云的分维为 1.36 ± 0.05 . 据此, 我们应该希望

图 10 中投影图像的分维是 1.36 左右而不是 1.22. 这两个值相差 0.14, 显然不可能由分维测量的误差或不确定性带来. 这进一步说明: Sreenivasan 等人仅仅测量边界线而忽略“岛屿”存在的分维测量方法有问题, 应该采用本文提出的修正“数盒子”法.

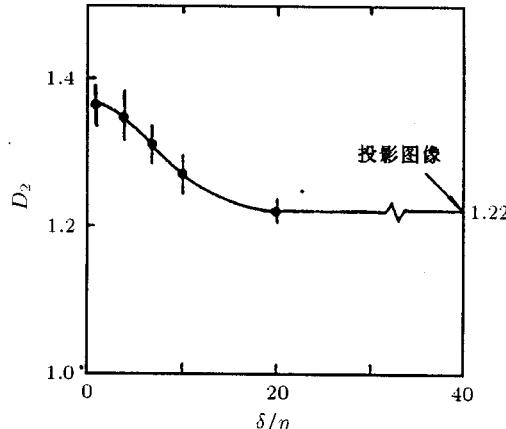


图 10 片光 (截面) 厚度对分维的影响^[15]

(2) 雷诺数等对分维的影响

雷诺数对湍流分维的影响，因流动形式而异，没有统一的规律。如图 11 是两种流动中雷诺数对分维的影响。图 11(a) 是 Prasad 和 Sreenivasan (1990) 利用近区附近固定探头测量二维尾流的结果。图 11(b) 是 Ramshankar (1988) 测量逆流混合层 (countercurrent mixing layer) 的结果^[13]。从图 11 可以看出，雷诺数大于某一值后，分维与雷诺数无关。进一步说，完全发展湍流的分维与雷诺数无关。

Prasad 和 Sreenivasan (1990)^[13] 讨论了标量界面中 Schmidt 数 (Sc) 的影响，指出 Schmidt 数不同，湍流分形的标度区间和分维值也不同。此外，Redondo 和 Linden (1988) 对分层湍流的密度界面分维的研究表明：分维随 Richardson 数的增加而减少。Johnson (1989) 研究马赫数约为 3 的湍流边界层的密度界面的分维约为 1.2，小于不可压缩流的情况。

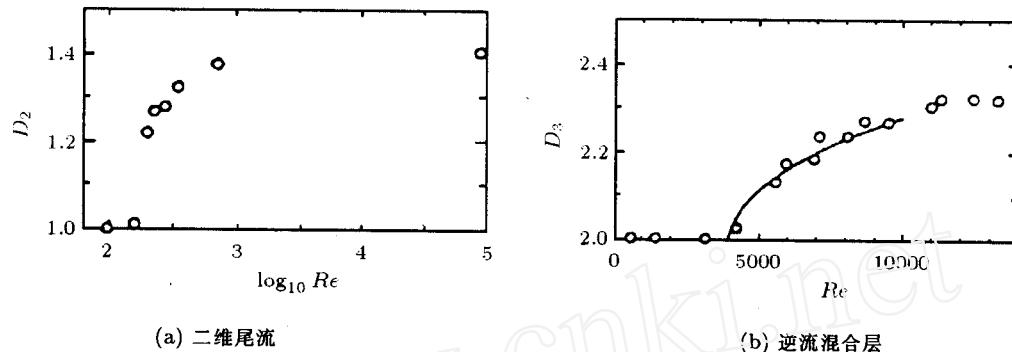


图 11 雷诺数对分维的影响^[15]

2.3.4 湍流分形特征的评价

Frederiksen 等人 (1996, 1997a, 1997b, 1998)^[21,24~26] 利用 LIF 技术获得的大量一、二、三维空间和时间系列圆形湍流射流实验数据 ($Sc \gg 1$)，对湍流分形进行了深入细致的实验评价。研究的尺度分为标量 (浓度) 扩散尺度 (空间尺度 λ_D , 时间尺度 T_D)、黏性扩散尺度 (空间尺度 λ_ν , 时间尺度 T_ν) 和外层尺度 (也称平均剪切尺度, 空间尺度 δ , 时间尺度 T_δ)。其中，内层范围是指标量扩散尺度与黏性尺度之间，外层范围是指黏性尺度与外层尺度之间，研究重点是内层范围。重点评价的对象是标量场、标量耗散场、多重分形、雷诺数和 Schmidt 数的影响。他们认为，利用有限长系列的实验数据来判定分形或非分形是不可能的。因此，最佳办法是与已知同样长系列的确定性和随机性分形集合进行比较，如非规则 Cantor 集和 fBm(fractional Brownian Motion) 集。他们的主要结论为：

(1) 一维截面的测量结果表明：在内层范围，标量场近似于分维 $D_1 = 0.48 \pm 0.12$ 的 fBm 集，且分维值不随标量 (浓度) 变化。在外层范围，标量场没有分形标度相似性 (fractal scale-similarity)。另一方面，从内层到外层的整个尺度范围内，标量耗散场都具有与分维 $D_1 = 0.66 \pm 0.05$ 的 fBm 集的分形标度相似性，且分维值随阈值的增加而减少，随测量数据量的增加而增加，如表 4、表 5 所示。

表 4 (一维截面) 阈值对分维值的影响

$C/\langle C \rangle$	0.2	0.5	1	1.5	2	3	4
$\langle D_1 \rangle$	0.479 ± 0.141	0.455 ± 0.128	0.460 ± 0.122	0.462 ± 0.124	0.461 ± 0.131	0.466 ± 0.135	0.471 ± 0.140
$\phi/\langle \phi \rangle$	0.2	0.5	1	1.5	2	3	4
$\langle D_1 \rangle$	0.782 ± 0.103	0.691 ± 0.124	0.619 ± 0.137	0.576 ± 0.143	0.547 ± 0.147	0.508 ± 0.152	0.482 ± 0.155

注：() 表示平均值；标量耗散 $\phi = \nabla C \cdot \nabla C$

表 5 (一维截面) 数据量对分维值的影响

$\langle D_1 \rangle$		
256-point 记录	空间支撑 (support)	0.619±0.137
	时间支撑 (support)	0.618±0.139
	空间等浓度	0.460±0.122
	时间等浓度	0.453±0.129
4096-point 记录	时间支撑 (support)	0.661±0.047
	时间等浓度	0.466±0.039

(2) 二、三维截面的测量结果表明：标量场在内层和外层都没有严格的分形标度相似性，而标量耗散场在内层和外层整个范围内都具有分形标度相似性。

(3) 一、二、三维截面的测量结果对比表明：有非分形包含物 (non-fractal inclusion) 存在时，随着截面维数的增加，非分形包含物的影响增加，测量的分维 (D_3) 反而减小，余维相加性定律失效。

Frederiksen 等人的成果是基于 LIF 技术测量浓度场的完善和提高，如表 6 所示，测量分辨率较高，空间测量尺度小于分子扩散尺度 λ_D ，时间测量尺度小于 (λ_D/u) ，获得了一、二、三维空间和时间系列的湍流标量(浓度)场的大量数据。在此基础上对湍流分形特征进行评价，这个成果值得重视。应该指出，他们的结论 (2) 中，标量场在内层和外层都没有严格的分形标度相似性是指在截面测量中，与已知的分形集相比较，具有分形特征的截面数占测量总截面数的百分数比较低。

表 6 二、三维截面的分维测量成果 *

射流工况	R0806	R0703	R0304	
Re_δ	5000	3700	2900	
Re_λ	52	45	40	
$\lambda_D (\mu\text{m})$	209	257	309	
$\lambda_\nu (\mu\text{m})$	9520	11700	14100	
$\Delta x, \Delta y (\mu\text{m})$	107	109	110	
$\Delta z (\mu\text{m})$	100	120	88	
$\lambda_D/u (\text{ms})$	62	103	158	
$\lambda_\nu/u (\text{ms})$	2820	4690	7200	
$\Delta t (\text{ms})$	8.87	8.87	8.87	
$\Delta T (\text{ms})$	2270	2270	2270	
二维截面 $\langle D_2 \rangle$	标量场 标量耗散场	1.28 (79.4%) 1.5 (59.8%)	1.29 (32.1%) 1.49 (49.4%)	1.24 (56.9%) 1.55 (83.9%)
三维截面 $\langle D_3 \rangle$	标量场 标量耗散场	2.18 2.45	2.21 2.44	2.14 2.50

* 表中 Re_δ, Re_λ 分别为外层尺度雷诺数和 Taylor 尺度雷诺数； $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 为空间像素分辨率；

Δt 为平面数据采集时间； ΔT 为三维空间数据采集时间； u 为射流中心线流速； (%) 表示具有分维的截面占总截面的百分数。

3 N-S 方程与分形

描述湍流的 Navier-Stokes 方程 (简称 N-S 方程) 与分形有关。Lorenz (1963) 在研究大气湍流时，对 N-S 方程进行了大刀阔斧的简化，得到了一组常微分方程，现称为 Lorenz 方程。通过在计算机上求解方程的解发现了混沌行为 (chaotic behavior) 和后来所称的 Lorenz 吸引子 (attractor)。这个相空间中的吸引子是一个分形体，其分维为 2.06 (Mori, 1980)。Scheffer 在探讨

三维空间中 N-S 方程解的性态时发现，方程解的奇性（如果它们存在的话）必在维数小于 3 的集合中。理想流体的奇性也有同样的结论^[27]。

在低雷诺数情况下，N-S 方程解的性态稳定，即当 t 趋于无穷时趋于唯一稳定的解。在高雷诺数情况，方程解围绕着吸引子集合转。Fias 和 Teman 等人已经证明这些吸引子集合在一适当的函数空间中，具有有限的分维。当雷诺数趋于无穷时，该维数趋于无穷^[27]。

最近对雷诺数为 2800 的 Poiseuille 流动的数值仿真表明，N-S 方程的湍流解的确位于奇怪吸引子上，但它的分维大约为 400^[28~30]。

虽然 N-S 方程与分形有关。但是，目前还没有从 N-S 方程这样的基本方程中直接导出分维的理论。但是，Cao 等人（1996）^[31] 对 N-S 方程进行直接数值模拟（DNS）发现，在湍流惯性区，标度和概率密度函数与耗散机制无关，各阶速度结构函数之间存在普适的相对标度率，这些相对标度率与 K41 的预言有明显偏离。与下面要谈到的层次结构模型精确相符。

4 湍流的理论分形模型

湍流的理论分形模型主要集中在间歇模型（intermittency model）和湍流扩散上^[32~35]。

对于湍流具有分形特征，一种解释是流体中的涡管在运动中不断地拉伸和折叠，根据 Helmholtz 定理，涡管不能在流动中消失，只能自回避式地折叠。与分子随机运动一样，涡管全部填满空间的可能性为零，呈不均匀分布，从而形成分形结构。Hentschel 和 Procaccia（1982）^[23] 把湍流看成自回避折叠的涡管集合体，从理论上估算出完全发展湍流的分维在 $2.5 \leq D_3 \leq 2.75$ 的范围内。

Frisch 等人（1978）^[32] 对间歇性完全发展湍流提出了湍流分形模型—— β 模型。该模型的关键假定是：湍流的小尺度结构随着该尺度大小的减小，所占空间也变得越来越小。子涡（daughter eddy）所占的体积是母涡（mother eddy）的 β 倍 ($\beta = 2D_3 - 3$, $\beta < 1$)。根据该模型可以导出包含分维 D_3 的新的湍流尺度。Jaw 和 Chen（陈景仁，1990）^[33] 根据 Frisch 导出的关系式，提出包含分维的新湍流尺度

$$l = \left[\frac{K^{3(D_3-3)/2}}{\nu^{-3}\varepsilon^{-2+D_3}} \right]^{1/(1+D_3)} \quad (7)$$

$$t = \left[\frac{K^{-3(D_3-3)}}{\nu^{D_3-5}\varepsilon^{2D_3-4}} \right]^{1/(1+D_3)} \quad (8)$$

式中， $D_3 = 3$ 时， $l = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, $t = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ 就是经典的 Kolmogorov 尺度。利用新的湍流尺度，可望将湍流模型与分形结合起来，从而改善现有湍流模型的特性，这是湍流模型改进的一个新的方向。国外湍流模型研究的学者正积极开展这方面的工作。

继 Richardson（1922）提出完全发展湍流由不同尺度的涡构成的思想后，Kolmogorov（1941）为完全发展湍流的理论研究提出了一系列重要概念，如能谱惯性子区的存在和 $-5/3$ 次幂定律，形成了所谓 K41 理论。如前所述，这个理论的核心之一是：在惯性子区存在标度律（scaling law）。Kolmogorov 认为，这个标度律是普适性的，与大尺度脉动运动的统计特性、黏性耗散和流动环境无关。正如 Landau（1971）年指出的那样，间歇性的存在暴露了 K41 理论的缺陷。因此，Kolmogorov 和 Obukhov 等 1962 年提出了修正自相似假设的 K62 理论。

She 和 Leveque（1994）^[36] 对完全发展湍流提出层次结构模型（Hierarchical Structures Theory of Turbulence），该模型继承了 K41 理论的精髓，即惯性子区存在标度律，提出在完全发展湍流的惯性区中，无量纲层次结构量之间有严格的自相似性。层次相似性反映了最强间歇结构与较弱的脉动结构之间的层次递推关系，认为层次结构由最高激发态与层次相似参数（间歇参数）共

同决定，获得了简洁的标度指数公式^[37]。Gaudin 等人(1998)^[38]对湍流射流的实验研究发现，速度结构函数的标度指数依赖于流动区域，而且，扩展自相似(ESS)在近尾流区的剪切流中也遵循。

Cao 和 Chen (1997)^[39]基于双变量对数 Poisson 模型利用层次结构模型发展了被动标量(passive scalar)在惯性区的间隙模型，得到了与实验相符的标度结构函数的标度指数公式。但 Leveque 和 Ruiz-Chavarria 等人(1999)^[40]对将层次结构模型运用于标度(如温度)结构函数的做法提出质疑，通过对圆柱尾流中被动标量的实验测量和理论分析，得到了标量——速度混合结构函数的标度指数公式。该成果的一个引人注目之处就是，实验发现广义自相似(GESS)在大大超出惯性区的尺度范围内存在。

在湍流扩散中，Henstchel 和 Procaccia (1983)^[34]利用标度和分形概念考虑了完全发展湍流间歇性的影响，通过引入分维修正了著名的 Richardson 4/3 次方定律。1984 年，他们根据 Lovejoy 关于云的分维的测量结果，提出了新的湍流相对扩散理论^[35]。

5 湍流分形研究的展望

湍流由不同尺度的涡构成，促使分形理论应用于湍流研究，完全发展湍流在惯性子区的标度律的存在使人们确信湍流中存在着与分维相关的“根本性”的规律，从而引出了一系列新的湍流模型，成为湍流研究的热点。另一方面，湍流的分维测量和新的湍流理论(数值的和实验室的)，丰富了我们对湍流的认识，得到了一些带有“根本性”规律的实验证据和理论模型。比如：不仅是完全发展湍流存在标度律，在某些剪切流中也可能存在标度律；不仅是湍流的标量场、耗散场存在标度律，而且在速度结构函数、标量—速度混合结构函数甚至标量结构函数中也蕴藏着标度律；不仅是惯性子区，甚至在更宽的尺度范围内都发现存在标度律的证据。更多的标度律的实验证据和新的湍流理论的发展，将使我们了解更多的“湍流之谜”，前景是令人鼓舞的。

现在我们已经知道，利用分形理论可以揭示出湍流瞬时图像的内部规律性，分维反映了湍流内部的标度不变性。但是，要区分两个具有相同分维的不同湍流图像，仅用分维显然是不行的。要进一步研究湍流在不同层次的生长特征，需要开展湍流多重分形(multifractal)研究，这方面已有一些成果。本文不作进一步介绍，有兴趣者可参见有关文献[25, 32, 41]。另一方面，近年来，国外一些学者正积极利用子波变换研究湍流问题^[42~45]，成为湍流研究的热点之一。例如：结合 PLIF 技术获得的圆形湍流射流图像，Everson, Sirovich 和 Sreenivasan (1990)^[45]进行子波分析，揭示了射流的局域结构。

分形理论并不能解决湍流问题。通过湍流分维测量，给湍流工作者指出了需要进一步回答的问题：为什么湍流具有分形特征？标量场到底有没有标度自相似性？标量耗散场的标度区间为什么那么宽？如何从动力学角度加以分析和解释？Frederiksen 等人的工作主要是针对圆形湍流射流，其他流动形式的情况如何？等等。这些问题还需要结合湍流测量给予系统的研究和回答。另一方面，湍流在不同层次的生长特征可以与湍流计算结合起来。如果把湍流在不同尺度的分形特征进一步搞清楚，可以将包含不同分维值的湍流尺度运用于湍流模型中去，可望改善湍流模型的通用性和模拟精度，这是研究湍流模型的一个值得重视的方向。

在湍流测量方面，也还有需要改进和研究的问题，如：(1) 提高测量系统的空间分辨率。这主要包括两个方面：一是提高像素分辨率，以便能探测更小的尺度空间；二是改进片光系统，减小片光厚度，从而尽量减少“叠加效应”的影响；(2) 提高测量系统的时间分辨率，即提高瞬时图像的抓拍速度，尽量跟上湍流各种时间尺度。在分形理论方面，也还有很多问题需要深化，如分形理论中有很多不同的定义，从而有不同的分维值，这些分维定义之间的关系如何，在湍流研究中采用那种定义的分维等等，都需要进一步研究。

参 考 文 献

- 1 Mandelbrot B B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman, 1982
- 2 黄真理. 平面激光诱导荧光(PLIF)技术及其测量射流浓度场的研究. [博士论文]. 北京: 清华大学水电系, 1993
- 3 Turcotte D L. Fractals in fluid mechanics. *Ann Rev Fluid Mech*, 1988, 20: 5~16
- 4 高安秀树. 分数维. 沈步明, 常子文译. 北京: 地震出版社, 1989
- 5 Lovejoy S. Area-Perimeter relation for rain and cloud areas. *Science*, 1982, 216(9): 185~187
- 6 Feder J. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988
- 7 Falconer K J. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 8 Falconer K J. 分形几何——数学基础及其应用. 沈阳: 东北大学出版社, 1991
- 9 杨国伟. 用 $P(\varepsilon) = P_0 \varepsilon^{1-D}$ 计算实际分形体维数的不确定性. *科学通报*, 1992, 10: 953~956
- 10 黄真理, 李玉梁, 余常昭. PLIF技术测量浓度场及其二维数字校正. *力学学报*, 1994, 26(5): 616~624
- 11 黄真理, 李玉梁, 余常昭, 宋传琳. LIF技术测量浓度场的影响因素分析. *实验力学*, 1994, 9(3): 232~240
- 12 Takeno T, Murayama M, Tanida Y. Fractal analysis of turbulent premixed flame surface. *Experiments in Fluids*, 1990, 10: 61~70
- 13 Prasad R R, Sreenivasan K R. The measurement and interpretation of fractal dimensions of the scalar interface in turbulent flows. *Phys Fluids A*, 1990, 2(5): 792~807
- 14 Sreenivasan K R, Meneveau C. The fractal facets of turbulence. *J Fluid Mech*, 1986, 173: 357~386
- 15 Prasad R R, Sreenivasan K R. Quantitative three-dimensional imaging and the structure of passive scalar fields in fully turbulent flows. *J Fluid Mech*, 1990, 216: 1~34
- 16 黄真理, 李玉梁, 余常昭. 湍流射流的分维测量. *科学通报*, 1994, 39(6): 567~570
- 17 黄真理, 李玉梁, 余常昭. 圆形湍流射流的分维测量和分析. *自然科学进展——国家重点实验室通讯*, 1995, 5(2): 191~195
- 18 Hinze J O. 湍流(下). 周光炯, 魏中磊译. 北京: 科学出版社, 1987. 220
- 19 Hinze J O. 湍流(上). 黄永念, 颜大椿译. 北京: 科学出版社, 1987. 247
- 20 Lane-Serff G F. Investigation of fractal structure of jets and plumes. *J Fluid Mech*, 1993, 249: 521~534
- 21 Frederiksen R D, Dahm W J A, Dowling D R. Experimental assessment of fractal scale-similarity in turbulent flows. Part 1: One-dimensional intersections. *J Fluid Mech*, 1996, 327: 35~72
- 22 Constantin P, Procaccia I, Sreenivasan K R. Fractal geometry of isoscalar surfaces in turbulence: theory and experiment. *Phys Rev Lett*, 1991, 67: 1739~1742
- 23 Hentschel H G E, Procaccia I. Intermittency exponent in fractally homogeneous turbulent. *Phys Rev Lett*, 1982, 49(16): 1158~1161
- 24 Frederiksen R D, Dahm W J A, Dowling D R. Experimental assessment of fractal scale-similarity in turbulent flows. Part 2: Higher-dimensional intersections, non-fractal inclusions. *J Fluid Mech*, 1997, 338: 89~126
- 25 Frederiksen R D, Dahm W J A, Dowling D R. Experimental assessment of fractal scale-similarity in turbulent flows. Part 3: Multifractal scaling. *J Fluid Mech*, 1997, 338: 127~155
- 26 Frederiksen R D, Dahm W J A, Dowling D R. Experimental assessment of fractal scale-similarity in turbulent flows. Part 4: Effects of Reynolds and Schmidt numbers. *J Fluid Mech*, 1998, 377: 169~187
- 27 谢和平, 张永平. 自仿射分形几何. *自然杂志*, 1989, 12(9): 650~674
- 28 Campbell D K. 非线性科学——从范例到实用(I). *力学进展*, 1989, 19(2): 232~244
- 29 Campbell D K. 非线性科学——从范例到实用(II). *力学进展*, 1989, 19(3): 376~392
- 30 Campbell D K. 非线性科学——从范例到实用(III). *力学进展*, 1989, 19(4): 520~530
- 31 Cao N, Chen S, She Z S. Scaling and relative scalings in the Navier-Stokes turbulence. *Phys Rev Lett*, 1996, 76(20): 3711~3714
- 32 Paladin G, Vulpiani A. Anomalous scaling law in multifractal objects. *Physics Reports*, 1987, 156(4): 147~225
- 33 Chen C J, Jaw S Y. 湍流模化的现状及发展趋势. *力学进展*, 1992, 22(3): 381~394
- 34 Hentschel H G E, Procaccia I. Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion. *Physical Review A*, 1983, 27(2): 1266~1269
- 35 Hentschel H G E, Procaccia I. Relative diffusion in turbulent media: the fractal dimension of clouds. *Physical Review A*, 1984, 29(3): 1461~1470
- 36 She Z S, Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys Rev Lett*, 1994, 72(3): 336~339
- 37 余振东, 苏卫东. 湍流中的层次结构和标度律. *力学进展*, 1999, 29(3): 289~303
- 38 Gaudin E et al. Spatial properties of velocity structure functions in turbulent wake flows. *Phys Rev E*, 1998, 57(1): R9~R12
- 39 Cao N, Chen S. An intermittency model for passive-scalar turbulence. *Phys Fluids*, 1997, 9(5): 1203~1205
- 40 Leveque E et al. Scaling laws for the turbulent mixing of a passive scalar in the wake of a cylinder. *Phys Fluids*, 1999, 11(7): 1869~1879
- 41 Sreenivasan K R. Fractals and multifractals in fluid turbulence. *Annu Rev Fluid Mech*, 1991, 23: 539~600
- 42 Farge M. 子波变换及其对湍流的应用(I). *力学进展*, 1992, 22(3): 367~380
- 43 Farge M. 子波变换及其对湍流的应用(II). *力学进展*, 1992, 22(4): 503~526
- 44 Farge M et al. Wavelet and turbulence. *Proc of the IEEE*, 1996, 84: 639~668
- 45 Everson R, Sirovich L, Sreenivasan K R. Wavelet analysis of the turbulent jet. *Phys Lett A*, 1990, 145(6): 314~322

FRACTAL NATURE IN TURBULENCE

Huang Zhenli

Executive Office of the State Council Three Gorge Project Construction Committee, Beijing 100044, China

Abstract The recent progresses in the measurement of fractal dimension of turbulent flows and its applications were reviewed in this paper, including the traditional evidences, measurement methods, the findings on fractal dimension of turbulent flows. The author discussed in detail various measurement methods and its application restrictions, the findings on fractal measurement by several researchers especially K.R. Sreenivasan and offered the author's newest measurement findings. The related research fields such as the relation between the Navier-Stokes equations and fractal, fractal theoretical models of turbulence and scaling laws in turbulence, are also discussed. Finally the further studies of fractal theory in turbulence are suggested.

Keywords turbulence, fractal, fractal dimension, Navier-Stokes equation, scaling law, fractal theoretical model

~~~~~

(上接第 622 页)

的，作者较为详细的阐述了“好”的算法模型应该具备的性质：（1）与观测数据良好吻合；（2）与已知系统特性一致；（3）较为简单；（4）能够有助于预测和理解系统的动力学行为。在结论中，作者预言，基于观测数据且不需要通常映射或微分方程表达式的动力学系统算法建模是动态分析成熟的关键和必经之路。正如几何方法的引入一样，算法重构将使可研究的问题大为增加。

相空间重构等数据处理方法是非线性力学的重要成果之一，有着普遍意义和广泛应用。由于系统是个有机整体，系统的状态变量之间存在着千丝万缕的联系。某个变量的时间序列虽然不可能包含原系统的全部信息，但它本质上具有系统整体的特性，包含系统其它变量的信息。算法建模即是通过一系列具体算法将隐含在部分变量时间序列中的原系统整体信息提取出来。它基于一个前提，时间序列是由基本上为确定性的系统产生，该系统的稳态运动由相空间中吸引子描述。许多实验系统，真实相空间的维数很高，甚至是无穷的。但系统稳态运动对应的吸引子的维数未必很高。基于实验数据进行重构得到的相空间并非是原系统相空间，而是原系统吸引子嵌入的相空间，其维数往往大大低于原系统真实相空间的维数。

限于该文的性质，Rapp 等的文章没有讨论时间延迟的选择、嵌入维数的确定等技术性问题，也没有包含最新的研究成果，但该文对算法建模的基本思想有非常清晰的阐述，并且从动力学模式演化的历史角度分析了算法建模的必要性和重要意义。算法建模的发展顺应并推进了动力学系统理论应用范围日益扩大的趋势，使得动力学分析能对“探索复杂性”这一当代科学的重要主题作出贡献。