随机激励的耗散的 Hamilton 系统理论的研究进展*

朱位秋 黄志龙

浙江大学力学系，杭州 310027

摘 要 近几年中，利用 Hamilton 系统的可积性与共振性概念及 Poisson 括号性质等，提出了高斯白噪声激励下多自由度非线性随机系统的精确平稳解的泛函构造与求解方法，并在此基础上提出了等效非线性系统法，提出了拟 Hamilton 系统的随机平均法，并在该法基础上研究了拟 Hamilton 系统随机稳定性、随机分岔、可靠性及最优非线性随机控制，从而基本上形成了一个非线性随机动力学与控制的 Hamilton 理论框架. 本文简要介绍了这方面的进展.

关键词 Hamilton 系统，随机平均法，随机稳定性，随机分岔，最优非线性随机控制

1 引 言

随机结构动力学是研究工程结构在各种随机载荷作用下的振动、稳定性及可靠性的一门学科. 该学科自 50 年代诞生以来已得到了很大的发展，线性系统与单自由度非线性系统随机结构动力学理论已很成熟 [1,2]，但处理多自由度非线性 (特别是强非线性) 随机结构动力学系统还有很大的困难. 近几年来的研究表明，对于多自由度强非线性随机结构动力学系统，Hamilton 提法较之 Lagrange 提法有许多优点，因为 Hamilton 动力学中可积性与共振性等概念对了解各自由度之间在相空间中的全局关系很有帮助.

最早，Fuller[3] 在评述精确平稳解时将非线性随机系统表示成随机激励的耗散的 Hamilton 系统的形式. 随机激励的耗散的 Hamilton 系统是指原 Hamilton 系统基础上加上随机激励及耗散构成的系统. 80 年代末与 90 年代初，Soize[4~6] 与 Zhu 等 [7,8] 用随机激励的耗散的 Hamilton 系统的提法推广了非线性随机系统的精确平稳解. 然而，所有这些精确平稳解皆具有能量等分之性质. 90 年代中，Zhu 与 Yang[9] 运用 Hamilton 系统的可积性与共振性概念及 Poisson 括号的性质，首次得到了非能量等分的非线性随机系统的精确平稳解. 在此基础上，Zhu 等 [10,11] 提出了随机激励的耗散的不可积与可积 Hamilton 系统的等效非线性系统法. 与此同时，Zhu 等 [12,13] 运用 Hamilton 系统的可积性与共振性概念及 Khasminskii 的一个定理 [14] 提出了拟可积与拟不可积 Hamilton 系统的随机平均法. 在此基础上，Zhu 与 Huang[15~18] 研究了拟 Hamilton 系统的随机稳定性与随机 Hopf 分岔. Zhu 等 [19~23] 在拟 Hamilton 系统随机平均法与随机动

收稿日期：1999-05-31，修回日期：1999-11-08

* 国家自然科学基金 (19972059) 和浙江大学曹光彪高科技发展基金重点资助项目

态规划原理基础上提出一种新的最优非线性随机控制策略. 最近, Zhu 与 Huang 将精确平稳解推广于随机激励的耗散的部分可积 Hamilton 系统 [24] 与同时受谐和随机激励的耗散的可积 Hamilton 系统 [25], 提出了随机激励的耗散的部分可积 Hamilton 系统的等效非线性系统法 [26] 与拟部分可积 Hamilton 系统的随机平均法 [27]. 这样, 基本上形成了一个非线性随机动力学与控制的 Hamilton 理论框架, 在该理论框架内可统一处理单自由度与多自由度、线性与非线性 (特别是强非线性) 随机动力学与控制系统, 为深入研究多自由度非线性随机动力学与控制系统打下了良好的基础.

2 Hamilton 系统

一个用如下 Hamilton 方程描述的系统称为 Hamilton 系统

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

式中 q_i, p_i 分别为广义位移及广义动量, $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 是具有连续一阶偏导数的 Hamilton 函数 (对大多动力学系统, H 表示系统的总能量. 本文只考虑保守的 Hamilton 系统). Hamilton 系统有完全不可积、完全可积及部分可积三种情形.

2.1 完全可积 Hamilton 系统

一个 n 自由度 Hamilton 系统, 如果存在 n 个独立的、两两对合的运动积分 H_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 就称它为完全可积的 Hamilton 系统. 所谓两两对合, 就是任意两个 H_i 的 Poisson 括号为零, 即

$$[H_i, H_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

式中 $[\,,]$ 表示 Poisson 括号.

完全可积的 Hamilton 系统的另一个定义可表述如下: 若对 n 自由度 Hamilton 系统 (1), 存在如下的正则变换

$$I_i = I_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad \theta_i = \theta_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

使得新的 Hamilton 方程具有如下最简形式

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial}{\partial \theta_i}\widetilde{H}(\boldsymbol{I}) = 0, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial}{\partial I_i}\widetilde{H}(\boldsymbol{I}) = \omega_i(\boldsymbol{I}), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

式中 I_i, θ_i 及 ω_i 分别为作用量、角变量及频率, $\widetilde{H}(\boldsymbol{I})$ 为新的 Hamilton 函数, 它与角变量 θ_i 无关, 就称 (1) 为完全可积 Hamilton 系统. 此时, 由方程 (4) 可得 (1) 之解

$$I_i = \text{const.}, \quad \theta_i - \omega_i(\boldsymbol{I})t = \delta_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

n 自由度线性 Hamilton 系统与单自由度非线性 Hamilton 系统为完全可积 Hamilton 系统的例子. 当 ω_i 存在如下共振关系时

$$k_i^u \omega_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad u = 1, 2, \cdots, \alpha \tag{6}$$

其中 k_i^u 为整数, 此 Hamilton 系统称为共振的. 当共振关系个数 $\alpha = n - 1$ 时, 称为完全共振的; 当共振关系数 α 满足关系 $1 \le \alpha < n - 1$ 时, 称为部分共振的; 当 $\alpha = 0$ 时, 称为非共振的. 一个 n 自由度完全可积 Hamilton 系统的相迹分布在 n 维环面上, 完全共振 Hamilton 系统的相轨线在 n 维环面上是封闭的, 即运动是周期的; 非共振 Hamilton 系统的相轨线均匀地覆

盖在 n 维环面上，运动是概周期的，在 n 维环面上具有各态历经性质，即时间平均等于空间平均 [28]; 部分共振的 Hamilton 系统的相轨线则介于两者之间．引入角变量之组合

$$\psi_u = k_i^u \theta_i, \quad i = 1,2,\cdots,n, \quad u = 1,2,\cdots,\alpha \tag{7}$$

当存在 α 个共振关系时， $\psi_u = k_i^u \delta_i$. 考虑如下两个任意函数

$$G_1 = G_1(I_1,\cdots,I_n,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha) \tag{8a}$$

$$G_2 = G_2(I_1,\cdots,I_n,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha,\delta_{\alpha+1},\cdots,\delta_n) \tag{8b}$$

它们分别满足如下方程

$$[H,G_1] = [\widetilde{H},G_1] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial I_i}\frac{\partial G_1}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta_i}\frac{\partial G_1}{\partial I_i}\right] = 0 \tag{9a}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial t} + [\widetilde{H},G_2] = \frac{\partial G_2}{\partial t} + [H,G_2] = 0 \tag{9b}$$

其中 $[\widetilde{H},G_j]$ $(j=1,2)$ 为 $\widetilde{H}$ 与 G_j 以 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{\theta}$ 为变量的 Poisson 括号，而 $[H,G_j]$ $(j=1,2)$ 是 H 与 G_j 以 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 为变量的 Poisson 括号．反之可证，当 G_1 与 G_2 分别满足方程 (9a) 与 (9b) 时， G_1 与 G_2 将分别是 (8a) 与 (8b) 所列变量的任意函数．据此，可利用 (9) 式构造随机激励的与随机和谐和同时激励的耗散的完全可积 Hamilton 系统的精确平稳解 [3,25].

2.2 完全不可积情形

一个 n (≥ 2) 自由度 Hamilton 系统只有 Hamilton 函数一个独立运动积分时，称它为完全不可积的 Hamilton 系统．完全不可积 Hamilton 系统的运动十分复杂，一般情形下呈混沌性质．在统计物理中，假定系统状态在 $2n-1$ 维等能量球面上等概率分布 [29].

2.3 部分可积情形

当两两对合的独立运动积分个数大于 1 而小于自由度数 n 时，称该 Hamilton 系统为部分可积的．部分可积系统有很多可能情形，如下一类可分离的部分可积系统是一个特殊情形

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \sum_{s=1}^{r-1} H_s(p_s,q_s) + H_r(q_r,\cdots,q_n,p_r,\cdots,p_n) \tag{10}$$

此时后 $n-r+1$ 个自由度是完全不可积，前 $r-1$ 个自由度是完全可积的，且存在 $r-1$ 个作用量及角变量，也可有 α $(0 \leq \alpha < r-2)$ 个共振关系．考虑如下任意函数

$$G_3 = G_3(I_1,I_2,\cdots,I_{r-1},H_r,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha) \tag{11}$$

它将满足方程 (9a) (其中 Poisson 括号以 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 为基本变量). 方程 (9a) 是构造随机激励的耗散的部分可积 Hamilton 系统的精确平稳解的基础 [24].

3 随机激励的耗散的 Hamilton 系统的精确平稳解

n 自由度随机激励的耗散的 Hamilton 系统由如下方程描述

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} - c_{ij}\frac{\partial H'}{\partial P_j} + f_{ik}W_k(t), \quad i,j = 1,2,\cdots,n; \quad k = 1,2,\cdots,m \tag{12}$$

其中 $c_{ij}=c_{ij}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 与 $f_{ik}=f_{ik}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 分别为阻尼系数与激励幅值， $w_k(t)$ 为 Stratonovich 意义下的 Gauss 白噪声，其相关函数为

$$\mathrm{E}[w_k(t)w_l(t+\tau)]=2D_{kl}\delta(\tau),\quad k,l=1,2,\cdots,m \tag{13}$$

通过加入 Wong-Zakai 修正项， (12) 式可转换为等价的 Itô 随机微分方程. Wong-Zakai 修正项通常可分解为保守力部分和阻尼力部分，其中保守力部分与原保守力一起构成新的 Hamilton 函数 $H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$; 而阻尼力部分与原阻尼力一起构成等效阻尼力 $-m_{ij}\partial H/\partial p_j$. 这样， (12) 式变为

$$\begin{gathered}\mathrm{d}Q_i=\frac{\partial H}{\partial P_i}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}P_i=-\left[\frac{\partial H}{\partial Q_i}+m_{ij}\frac{\partial H}{\partial P_j}\right]\mathrm{d}t+f_{ik}\mathrm{d}B_k(t)\\ i,j=1,2,\cdots,n;\quad k=1,2,\cdots,\end{gathered} \tag{14}$$

式中 $B_k(t)$ 为维纳过程. 由 (14) 式可得相应的 FPK 方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}+[H,p]=\frac{\partial}{\partial p_i}\left(m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}p\right)+\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}(b_{ij}^{(i)}p) \tag{15}$$

式中， $p=p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t\mid\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{p}_0)$ 或 $p=p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ 取决于给定初始条件的形式； $b_{ij}=2(\mathbf{fDf}^{\mathrm{T}})_{ij}$, $b_{ij}=b_{ij}^{(i)}+b_{ji}^{(j)}$. FPK 方程 (15) 通常在概率流为零的边界条件与适当的初始条件及归一化条件下求解. 方程 (15) 的精确解很难求，至今只得到特殊情形一维 FPK 方程之解. 假定 $t\to\infty$ 时系统达平稳状态，此时可用平稳概率密度 $p=p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 描述该状态，且 $\partial p/\partial t=0$, 方程 (15) 化为

$$[H,p]=\frac{\partial}{\partial p_i}\left[\left(m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)p\right]+\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}(b_{ij}^{(i)}p) \tag{16}$$

式 (16) 称为简化或平稳 FPK 方程，其精确解称为方程 (12) 的精确平稳解. 解的结构与相应 Hamilton 系统的可积与共振性质密切相关. 下面给出不同情形下解的泛函形式.

3.1 完全不可积情形

当 (14) 式中 Hamilton 系统完全不可积时，系统 (12) 的精确平稳解形为 [7~9]

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(H)]\,|_{H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{17}$$

其中 C 是归一化常数， $\lambda(H)$ 是 H 的函数，它满足下面 n 个一阶线性常微分方程

$$m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}-b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}H}=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{18}$$

如果能从这组方程求得 $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}H=h(H)$, 积分后代入式 (17) 即可得到完全不可积情形的精确平稳解.

3.2 完全可积而非共振情形

当相应的 Hamilton 系统为完全可积且非共振时，系统 (12) 的精确平稳解形为 [9]

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(I_1,\cdots,I_n)]\,|_{I_i=I_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{19}$$

其中 $\lambda(I_1,\cdots,I_n)$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解

$$m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}-b_{ij}^{(i)}\frac{\partial I_l}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial I_l}=0,\quad i,j,l=1,2,\cdots,n \tag{20}$$

如果能从式 (20) 中解出 $\frac{\partial\lambda}{\partial I_l}$, 且满足相容性条件 $\frac{\partial^2\lambda}{\partial I_k\partial I_i}=\frac{\partial^2\lambda}{\partial I_i\partial I_k}$, 则 λ 可由下列线积分得到

$$\lambda(I_1,\cdots,I_n)=\lambda_0+\int_0^{(I_1,\cdots,I_n)}\partial\lambda/\partial I_l\mathrm{d}I_l \tag{21}$$

式 (21) 代入式 (19) 即得完全可积非共振情形 (12) 之精确平稳解. 当完全可积 Hamilton 系统的 n 个独立运动积分用 H_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 给出时，可用 H_i 代 I_i 得类似于 (19) 之解.

3.3 完全可积且共振情形

当相应的 Hamilton 系统完全可积且存在 α 个共振关系时，系统 (12) 的精确平稳解形为 [9]

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(I_1,\cdots,I_n,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha)]\,|_{I_i=I_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\psi_u=\psi_u(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{22}$$

其中 $\lambda(I_1,\cdots,I_n,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha)$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解

$$\begin{gathered}m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}-b_{ij}^{(i)}\left(\frac{\partial I_l}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial I_l}+\frac{\partial\psi_u}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_u}\right)=0\\ i,j,l=1,2,\cdots,n;\quad u=1,2,\cdots,\alpha\end{gathered} \tag{23}$$

ψ_u 表示共振时各振子的相位差, λ 是 ψ_u 以 2π 为周期的周期函数, 可将 $\lambda(I_1,\cdots,I_n,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha)$, m_{ij}, $b_{ij}^{(i)}$ 展开成 $\psi_1,\cdots,\psi_\alpha$ 的 α 重傅氏级数, 代入式 (23) 求得 λ 展式的系数, 组合得到 $\lambda(I_1,\cdots,I_n,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha)$, 再代入式 (22) 即得该情形系统 (12) 的精确平稳解.

3.4 部分可积非共振情形

当相应的 Hamilton 系统部分可积而非共振, 具有形为式 (10) 的 Hamilton 函数时，系统 (12) 的精确平稳解形为 [24]

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(I_1,\cdots,I_{r-1},H_r)]\,|_{I_i=I_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),H_r=H_r(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{24}$$

其中 $\lambda(I_1,\cdots,I_{r-1},H_r)$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解

$$\begin{gathered}m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}-b_{ij}^{(i)}\left(\frac{\partial I_s}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial I_s}+\frac{\partial H_r}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial H_r}\right)=0\\ i,j=1,2,\cdots,n;\quad s=1,\cdots,r-1\end{gathered} \tag{25}$$

如果 $\frac{\partial\lambda}{\partial I_s}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial H_r}$ 确实能从 (25) 式解出，且满足相容性条件，则 $\lambda(I_1,\cdots,I_{r-1},H_r)$ 可由下列线积分得到

$$\lambda(I_1,\cdots,I_{r-1},H_r)=\lambda_0+\int_0^{(I_1,\cdots,I_{r-1},H_r)}(\partial\lambda/\partial I_s\mathrm{d}I_s+\partial\lambda/\partial H_r\mathrm{d}H_r) \tag{26}$$

3.5 部分可积且共振情形

当相应的 Hamilton 系统部分可积，具有形为式 (10) 的 Hamilton 函数，且存在 α $(<r-2)$ 个共振关系时，系统 (12) 的精确平稳解形为 [24]

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(I_1,\cdots,I_{r-1},H_r,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha)]\Big|_{I_i=I_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),H_r=H_r(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\psi_u=\psi_u(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{27}$$

其中 $\lambda(I_1,\cdots,I_{r-1},H_r,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha)$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解

$$\begin{gathered}m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}-b_{ij}^{(i)}\left(\frac{\partial I_s}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial I_s}+\frac{\partial H_r}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial H_r}+\frac{\partial\psi_u}{\partial p_j}\frac{\partial\lambda}{\partial\psi_u}\right)=0\\ i,j=1,2,\cdots,n;\quad s=1,\cdots,r-1;\quad u=1,2,\cdots,\alpha\end{gathered} \tag{28}$$

λ 是 ψ_u 以 2π 为周期的周期函数，可将 $\lambda(I_1,\cdots,I_n,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha)$, m_{ij}, $b_{ij}^{(i)}$ 展开为 $\psi_1,\cdots,\psi_\alpha$ 的 α 重傅氏级数，代入式 (28) 求得 $\lambda(I_1,\cdots,I_{r-1},H_r,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha)$，再代入式 (27) 即得部分可积且共振情形系统 (12) 的精确平稳解.

应指出，与所有古典精确平稳解一样，解 (17) 具有能量等分之性质，各自由度之间的能量之比是固定的，随机激励与阻尼只控制该系统总能量的概率分布，所有其他情形之解，包括 (19), (22), (24), (27)，均不具有能量等分之性质，除系统的总能量外，各自由度能量之比也可由随机激励与阻尼的大小及分布来调控．这种非能量等分的精确平稳解乃由我们首先得到.

对受随机激励的耗散的陀螺系统，Soize[6] 将陀螺力看成广义外力，同时未考虑到 Hamilton 系统的可积性对精确平稳解的效应，得到陀螺力对精确平稳解无影响的结论． Ying 与 Zhu[30] 将陀螺力看成 Hamilton 系统的一个部分，同时考虑到含陀螺项之 Hamilton 系统的可积性与共振性，得出结论是，Soize 的结论只有当 Hamilton 系统为不可积时才正确；当 Hamilton 系统可积时，陀螺力将影响系统的平稳概率分布，但它对系统总能量的均值无影响.

构造上述各种情形的精确平稳解的方法可推广于更一般的系统或更一般的激励．例如文 [9] 指出，解 (17), (19) 及 (22) 可推广于 (14) 中 $\partial H/\partial P_i$ 与 $\partial H/\partial Q_i$ 项同乘以任意函数 $D(\boldsymbol{Q})$ 之情形．只要在解 (17), (19) 或 (22) 式的右边除以 $D(\boldsymbol{Q})$ 即可．文 [25] 指出，用类似的方法可构造同时受高斯白噪声与谐和激励的耗散的完全可积 Hamilton 系统的共振与非共振情形的精确平稳解．此时，精确平稳概率密度是时间的周期函数.

4 等效非线性系统法

由上节可知，只有当随机系统的随机激励与耗散之间分别满足式 (18), (20), (23), (25), (28) 这些很严格的条件时才能得到精确平稳解，许多物理与工程系统可能不满足这些条件．然而，对一给定在高斯白噪声激励下的非线性随机系统，有可能找到与之等效的非线性随机系统，该系统具有精确平稳解，且与原系统的性态在某种统计意义上很接近，这就是等效非线性系统法的基本思想．等效非线性系统与原系统具有相同的 Hamilton 系统与随机激励，仅阻尼系数不同．因此，求等效非线性系统就是确定等效系统的阻尼系数．为使等效系统具有精确平稳解，这些阻尼系数必须满足一定的条件，这些条件与 Hamilton 系统的可积性及共振性有关，因此要对完全不可积、完全可积非共振、完全可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五种情形分别求其等效系统．迄今，已建立了这五种情形的等效非线性系统法 [10,11,26]．关于等效阻尼系数的求取，提出了三种准则： (1) 阻尼力之差的均方值最小； (2) 独立运动积分的时间变化率相等； (3) 耗散能量之差的均方值最小．下面以完全不可积 Hamilton 系统为例简要说明等效非线性系统法的实施过程．设 n 自由度随机激励的耗散的完全不可积的 Hamilton 系统由下列 Itô 方程描述

$$\mathrm{d}Q_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}P_i = -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + m'_{ij}\frac{\partial H}{\partial P_j}\right)\mathrm{d}t + f_{ik}\mathrm{d}B_k(t)$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n; \quad k = 1,2,\cdots,m \tag{29}$$

目标是寻求保持 Hamilton 函数及随机激励不变但具有新阻尼系数 m_{ij} 的等效非线性系统，使该等效系统存在形如式 (17) 的精确平稳解，其中 $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}H = h(H)$. 原系统 (29) 与等效系统的阻尼力之差为

$$\varepsilon_i = \left(m'_{ij} - hb_{ij}^{(i)}\right)\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n \tag{30}$$

利用阻尼力之差的均方值最小的准则经适当推导得 [11]

$$h(H)=\frac{\int_{\Omega}\left[\left(m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}\right)\left(b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right]\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n}{\int_{\Omega}\left[\left(b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\left(b_{ij}^{(i)}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right]\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n} \tag{31}$$

式中

$$\Omega=\{(q_1,\cdots,q_n;p_2,\cdots,p_n)\mid H(q_1,\cdots,q_n,0,p_2,\cdots,p_n)\le H\}$$

利用不同的准则得到的等效非线性系统是不同的，但差别不大. 用类似的步骤也可得到完全可积与部分可积的 Hamilton 系统的等效非线性系统. 详细步骤及应用例子见文献 [10, 26].

5 拟 Hamilton 系统的随机平均法

随机平均法是非线性随机动力学中一种十分有效的近似方法. 随机平均方程较原运动方程大大简化，往往维数少得多，而且平均系统的响应为近似的扩散 Markov 过程，可用 FPK 方程方法求解. 非线性随机动力学中许多关于响应、随机稳定性、随机分岔、首次穿越及疲劳可靠性的结果都是应用随机平均法得到的 [1,2,31~33]. 原有的标准随机平均法只适用于拟线性随机系统，能量包线随机平均法只适用于单自由度强非线性随机系统，而我们发展的拟 Hamilton 系统随机平均法则可应用于单、多自由度拟线性及强非线性随机系统.

当方程 (14) 中耗散与随机激励幅值小时，即

$$f_{ik}=\varepsilon^{1/2}\overline{f}_{ik},\quad m_{ij}=\varepsilon\overline{m}_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n;\quad k=1,2,\cdots,m \tag{32}$$

其中 ε 是正小参数，$\overline{f}_{ik},\overline{m}_{ij}$ 为有限量，称方程 (14) 描述的系统为拟 Hamilton 系统. 基于 Khasminskii 定理 [14]，可建立拟 Hamilton 系统的随机平均法. 平均方程的维数等于相应 Hamilton 系统的独立运动积分个数与共振关系个数之和. 平均方程与原方程的一个差别是，前者属平稳势，而后者属广义平稳势 [1,2].

5.1 完全不可积情形

由于相应的 Hamilton 系统完全不可积, 只有 Hamilton 函数 H 是独立运动积分, 拟 Hamilton 系统中只有 H 一个慢变过程，基于 Khasminskii 定理 [14]，当 $\varepsilon\to 0$ 时，在时间区间 $0\le t\le T$ $(T\sim 0(\varepsilon^{-1}))$ 上 H 弱收敛于一维扩散过程，该扩散过程的转移概率密度 $p(H,t\mid H_0,t_0)$，满足如下 FPK 方程 [13]

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial H}[a(H)p]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial H^2}[b(H)p] \tag{33}$$

其中漂移与扩散系数为

$$\begin{aligned}
&a(H)=\frac{1}{T(H)V_{\Omega_1}}\int_{\Omega}\left[\left(-m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}+D_{kl}f_{ik}f_{jl}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial p_j}\right)\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right]\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n\\
&b(H)=\frac{1}{T(H)V_{\Omega_1}}\int_{\Omega}\left(2D_{kl}f_{ik}f_{jl}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n\\
&T(H)=\frac{1}{V_{\Omega_1}}\int_{\Omega}\left(1\Big/\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n\\
&V_{\Omega_1}=\int_{\Omega_1}\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_n,\quad i,j=1,2,\cdots,n;\quad k,l=1,2,\cdots,m\\
&\Omega=\{(q_1,\cdots,q_n,p_2,\cdots,p_n)\mid H(q_1,\cdots,q_n,0,p_2,\cdots,p_n)\le H\}\\
&\Omega_1=\{(q_2,\cdots,q_n,p_2,\cdots,p_n)\mid H(0,q_2,\cdots,q_n,0,p_2,\cdots,p_n)\le H\}
\end{aligned} \tag{34}$$

注意，在求 a,b 时，应用了系统响应在 $2n-1$ 维等能量球面上等概率分布的假定 [29]. 在边界上概率流为零的边界条件下，可得平均方程 (33) 的精确平稳解 $p(H)$, 由此可得广义位移及广义动量表示的平稳概率密度

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\left.\frac{p(H)}{T(H)V_{\Omega_1}}\right|_{H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{35}$$

5.2 完全可积非共振情形

当相应的 Hamilton 系统完全可积但非共振时，拟 Hamilton 系统中 n 个作用量 I_i 是慢变过程而角变量是快变过程，根据 Khasminskii 定理 [14], 当 $\varepsilon\to 0$ 时，在时间区间 $0\le t\le T$ $(T\sim 0(\varepsilon^{-1}))$ 内 I_i 弱收敛于 n 维扩散 Markov 过程，其转移概率密度 $p(\boldsymbol{I},t\mid \boldsymbol{I}_0,t_0)$ 满足如下平均 FPK 方程 [12]

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial I_r}[a_r(\boldsymbol{I})p]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial I_r\partial I_s}[b_{rs}(\boldsymbol{I})p],\quad r,s=1,\cdots,n \tag{36}$$

其中漂移系数与扩散系数为

$$\begin{aligned}
&a_r(\boldsymbol{I})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\left(-m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial I_r}{\partial p_i}+D_{kl}f_{ik}f_{jl}\frac{\partial^2 I_r}{\partial p_i\partial p_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\\
&b_{rs}(\boldsymbol{I})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}2D_{kl}f_{ik}f_{jl}\frac{\partial I_r}{\partial p_i}\frac{\partial I_s}{\partial p_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\\
&\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{37}$$

在边界上概率流为零的边界条件下，方程 (36) 可按 3.2 中描述的方法求得精确平稳解 $p(\boldsymbol{I})$, 然后通过坐标变换可转换为以广义位移及广义动量表示的平稳概率密度. 受宽带随机激励情形的随机平均方程的推导见 [18].

5.3 完全可积且共振情形

当相应的 Hamilton 系统完全可积且存在 α 个共振关系时，拟 Hamilton 系统中 I_r $(r=1,2,\cdots,n)$ 及 ψ_u $(u=1,2,\cdots,\alpha)$ 是慢变过程而其余变量为快变过程，根据 Khasminskii 定理 [14], 当 $\varepsilon\to 0$ 时，在时间区间 $0\le t\le T$ $(T\sim O(\varepsilon^{-1}))$ 内 I_r, ψ_u 弱收敛于 $n+\alpha$ 维扩散 Markov 过程，其转移概率密度 $p(\boldsymbol{I},\psi,t\mid \boldsymbol{I}_0,\psi_0)$ 满足下列平均 FPK 方程 [12]

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial I_r}(a_rp)-\frac{\partial}{\partial\psi_u}(a_up)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial I_r\partial I_s}(b_{rs}p)+\frac{\partial^2}{\partial I_r\partial\psi_u}(b_{ru}p)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\psi_u\partial\psi_v}(b_{uv}p) \tag{38}$$

其中漂移系数与扩散系数见文 [12].

在边界上概率流为零的边界条件下，可按 3.3 节中描述的方法由得方程 (38) 的精确平稳解 $p(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\Psi})$. 然后转换为由广义位移及广义动量表示的平稳概率密度. 关于同时受随机与谐和激励且存在内外共振的多自由度拟线性系统的平均方程的精确平稳解见 [34].

5.4 部分可积非共振情形

当相应的 Hamilton 系统部分可积, 有形如式 (10) 的 Hamilton 结构, 且非共振时, 拟 Hamilton 系统中 $I_1,\cdots,I_{r-1}$, H_r 是慢变过程, 而其余变量为快变过程, 根据 Khasminskii 定理 [14], 当 $\varepsilon\to 0$ 时，在时间区间 $0\le t\le T$ $(T\sim O(\varepsilon^{-1}))$ 内 $I_1,\cdots,I_{r-1}$, H_r 弱收敛于 r 维扩散 Markov 过程，该扩散过程的转移概率密度 $p(\boldsymbol{I},H_r,t\mid \boldsymbol{I}_0,H_{r0})$ 满足的 FPK 方程 [27]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t}=&-\frac{\partial}{\partial I_s}[a_sp]-\frac{\partial}{\partial H_r}[a_rp]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial I_sI_{s'}}[b_{ss'}p]+\frac{\partial^2}{\partial I_s\partial H_r}[b_{sr}p]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial H_r^2}[b_{rr}p]\\
&s,s'=1,\cdots,r-1
\end{aligned} \tag{39}$$

其中漂移系数与扩散系数见文 [27].

在边界上概率流为零的边界条件下，可按 3.4 中描述的方法求得 (39) 的精确平稳解 $p(\boldsymbol{I},H_r)$，然后通过变换可得以广义位移与广义动量表示的平稳概率密度.

5.5 部分可积且共振情形

设相应的 Hamilton 系统部分可积，具有形如式 (10) 的 Hamilton 结构，且存在 α 个共振关系，拟 Hamilton 系统中 $I_1,\cdots,I_{r-1},H_r,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha$ 是慢变过程，其余是快变过程，当 $\varepsilon\to 0$ 时，在时间区间 $0\le t\le T(T\sim O(\varepsilon^{-1}))$ 内，$I_1,\cdots,I_{r-1},H_r,\psi_1,\cdots,\psi_\alpha$ 弱收敛于 $r+\alpha$ 维扩散 Markov 过程，该 $r+\alpha$ 维扩散过程的转移概率密度 $p(\boldsymbol{I},H_r,\psi,t\mid \boldsymbol{I}_0,H_{r_0},\psi_0)$ 满足如下 FPK 方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}=&-\frac{\partial}{\partial I_s}(a_s p)-\frac{\partial}{\partial H_r}(a_r p)-\frac{\partial}{\partial \psi_u}(a_u p)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial I_s\partial I_{s'}}(b_{ss'}p)+\frac{\partial^2}{\partial I_s\partial H_r}(b_{sr}p)+\\&\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial H_r^2}(b_{rr}p)+\frac{\partial^2}{\partial I_s\partial\psi_u}(b_{su}p)+\frac{\partial^2}{\partial H_r\partial\psi_u}(b_{ru}p)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\psi_u\partial\psi_v}(b_{uv}p)\\&s,s'=1,\cdots,r-1;\quad u,v=1,\cdots,\alpha\end{aligned}\tag{40}$$

其中漂移系数与扩散系数见文 [27].

在边界上概率流为零的边界条件下，可按 3.5 节中描述的方法求得式 (40) 的精确平稳解 $p(\boldsymbol{I},H_r,\boldsymbol{\psi})$，然后转换为以广义位移与广义动量表示的平稳概率密度.

这样，我们已建立起一整套拟 Hamilton 系统的随机平均法，值得注意的是，这套随机平均法与第 3 节中描述的精确平稳解理论上完全一致．当拟 Hamilton 系统具有精确平稳解时，平均方程之解与精确平稳解完全一样．单自由度强非线性系统的能量包线随机平均法可由拟完全不可积 Hamilton 系统随机平均法退化得到；多自由度拟线性系统的标准随机平均法可由拟完全可积 Hamilton 系统随机平均法简化得到．因此我们得到的这套随机平均法是能量包线随机平均法与标准随机平均法对多自由度强非线性随机系统的自然推广.

6 随机稳定性与分岔

随机稳定性有多种定义，主要有几乎肯定稳定性、概率稳定性及 p 阶矩稳定性．迄今为止主要研究的是线性或线性化随机系统的稳定性，大多数成果属于一个自由度或二维线性随机系统．利用拟 Hamilton 系统的随机平均法，可研究多自由度非线性随机系统的随机稳定性及分岔．在研究线性或线性化随机系统时，用欧几里德模是很自然的，但在研究拟 Hamilton 系统的稳定性时，用 Hamilton 函数的平方根定义新的模

$$Y=H^{1/2}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\tag{41}$$

既具有明确的物理意义，也便于应用．对线性系统，该定义与欧几里德模定义本质上是一致的．但对于非线性系统，Hamilton 函数不再是广义位移及动量的二次型，因此该定义与欧几里德模定义有本质的区别 [18].

6.1 拟可积非共振 Hamilton 系统的随机稳定性

研究几乎肯定稳定性有随机 Lyapunov 函数法与最大 Lyapunov 指数法 [1,2]，前者一般给出充分条件，而后者给出充分必要条件．Khasminskii[35] 提出了一种计算线性 Itô 随机微分方程组的最大 Lyapunov 指数的步骤．我们将它推广于拟可积非共振 Hamilton 系统．假定 Hamilton

函数为 n 个独立运动积分之和，平均漂移和扩散系数对独立运动积分是齐一次的，且扩散矩阵非奇异，即

$$
\begin{aligned}
&H = H_1 + \cdots + H_n \\
&\mathrm{d}H_i = m_i(\boldsymbol{H})\mathrm{d}t + \sigma_{il}(\boldsymbol{H})\mathrm{d}B_l(t) \\
&m_i(k\boldsymbol{H}) = km_i(\boldsymbol{H}); \quad \sigma_{il}(k\boldsymbol{H}) = k\sigma_{il}(\boldsymbol{H}) \\
&(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{H})\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{H})\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq C|\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{a}|^2 \\
&i = 1, \cdots, n; \quad l = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned} \tag{42}
$$

引入新变量 ρ 与 α_i

$$
\begin{aligned}
&\rho = \log Y = \frac{1}{2}\log H \\
&\alpha_i = H_i/H, \quad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{43}
$$

利用 Itô 微分规则可得 ρ 的 Itô 随机微分方程为

$$
\mathrm{d}\rho = Q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})\mathrm{d}t + \Sigma\mathrm{d}B(t) \tag{44}
$$

其中 $Q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})$ 与 Σ 可由 (42) 式的漂移和扩散系数 m_i, σ_{il} 运用 Itô 微分规则导出. 定义 Lyapunov 指数为 Hamilton 函数平方根的渐近指数增长率，利用 (44) 式得

$$
\lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\log H = \int_\Omega Q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\cdots\mathrm{d}\alpha_{n-1} \tag{45}
$$

其中 $p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 在域 $\{\Omega \mid \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \leq 1\}$ 上的平稳概率密度. 文 [18, 15] 分别给出了求拟可积非共振 Hamilton 系统与拟线性陀螺系统的最大 Lyapunov 指数的步骤及应用例子. 由最大 Lyapunov 指数为零可确定随机稳定性的边界与分岔条件. 当系统退化为线性系统时，文 [18] 与文 [36] 给出相同结果.

6.2 拟不可积 Hamilton 系统的随机稳定性与分岔

对 Itô 方程描述的一维扩散过程，平凡解渐近概率稳定性可由该过程在两端边界处的性质决定，若平凡解为越出或吸引自然边界，另一边界为进入或排斥自然边界，则平凡解渐近概率稳定. 对拟不可积 Hamilton 系统，用随机平均法可得到关于 Hamilton 函数的一维 Itô 随机微分方程，再按变换 (41) 运用 Itô 微分公式可得关于模 Y 的 Itô 随机微分方程

$$
\mathrm{d}Y = U(Y)\mathrm{d}t + V(Y)\mathrm{d}B(t) \tag{46}
$$

其中 $U(Y)$ 与 $V(Y)$ 分别为漂移与扩散系数. 对实际问题，它一般是复杂的多重积分，要得到 $U(Y)$ 与 $V(Y)$ 的精确解析表达式非常困难. 但只要有边界处 (通常为 $Y = 0$ 与 $Y = \infty$) $U(Y)$ 与 $V(Y)$ 的渐近表达式，就可确定边界的性质，进而判别平凡解的渐近概率稳定性. 对参激拟不可积 Hamilton 系统，一维扩散过程 $Y(t)$ 在边界上往往是奇异的，需用扩散指数、漂移指数及特征值按文 [2] 中所给的表确定边界的种类. 确定拟不可积 Hamilton 系统渐近概率稳定性的具体步骤及例子见文 [17].

研究随机分岔主要有两种方法，一是求最大 Lyapunov 指数，二是求平稳概率密度并作极值分析. 迄今已研究的基本上是一个自由度或二维随机系统的随机 Pitchfork 分岔或 Hopf 分岔 [1]，其中真正具挑战性的是随机 Hopf 分岔的研究 [37].

对拟不可积 Hamilton 系统，利用随机平均法，可得一维扩散过程 $Y(t)$ 的 Itô 随机微分方程 (46), 根据 $Y = 0, \infty$ 上 $Y(t)$ 的极限性质，可得出关于原系统的平凡解的渐近概率稳定性的条件，其稳定与不稳定的分界点即为第一次分岔的条件.

设 $H=\infty$ 为进入边界或排斥自然边界，而由平均 FPK 方程 (33) 确定的扩散过程 $H(t)$ 在边界 $H=0$ 处的扩散值 α_l，漂移指数 β_l 及特征值 c_l 满足条件

$$\beta_l-\alpha_l=-1 \tag{47}$$

则平稳概率密度 $p(H)$ 在 $H=0$ 边界附近有如下渐近表达式

$$\begin{aligned}&p(H)=O(H^{\mu}),\quad H\to 0\\&\mu=c_l-\alpha_l\end{aligned} \tag{48}$$

当 $\mu<-1$ 时，$p(H)=\delta(0)$，系统渐近概率稳定；当 $-1<\mu<0$ 时，系统为概率不稳定，$p(H)$ 为非 δ 函数，并在 $H=0$ 处有峰值；当 $\mu>0$ 时，系统为概率不稳定，$p(H)$ 为有限，并在 $H=0$ 与 $H=\infty$ 之间有一个峰值．因此，$\mu=-1$ 对应于第一次分岔，而 $\mu=0$ 对应于第二次分岔，当 μ 从负变正时，系统响应由原点附近的扩散分岔为极限环的扩散，即发生随机 Hopf 分岔．文 [16] 给出拟不可积 Hamilton 系统产生随机 Hopf 分岔的条件与实际例子．

7 拟不可积 Hamilton 系统的首次穿越时间

随机结构动力学系统的损坏与该系统的特性、激励的大小、安全区的构造及系统的初始条件有关，是一个复杂的随机现象，主要的损坏模式为首次穿越损坏与疲劳损坏．首次穿越问题是最简单的损坏模式，但相应的可靠性问题仍十分困难，至今已获得解析形式解的只是当所研究的随机现象为一维扩散过程的情形 [1,2]．由于随机平均法可使系统降维，使该问题的难度大大降低，许多作者曾用随机平均法研究过受随机参激或外激的单自由度线性或非线性系统的首次穿越问题 [1,3]．由于拟不可积 Hamilton 系统的随机平均法可将多自由度拟不可积 Hamilton 系统降为一维 Itô 随机方程，因此，可由此导出相应条件可靠性函数满足的一维后向 Kolmogorov 方程与首次穿越时间的矩所满足的广义 Pontryagin 方程

$$\frac{\partial R}{\partial t}=m(H_0)\frac{\partial R}{\partial H_0}+\frac{1}{2}\sigma^2(H_0)\frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2} \tag{49}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2(H_0)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}H_0^2}\mu_{n+1}+m(H_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H_0}\mu_{n+1}=-(n+1)\mu_n \tag{50}$$

其中 $R=R(t\mid H_0)$ 为条件可靠性函数，H_0 为初值，T 为首次穿越时间，H_c 为临界值，对应于安全区边界，$(0,H_c)$ 为设定的安全域，$\mu_n(H_0,H_c)=E[T^n]$ $(\mu_0=1)$ 为首次穿越时间的 n 阶矩．在适当的边界条件下求解 (49) 式 (还需初始条件) 与 (50) 式可得条件可靠性函数 (由此可导出首次穿越时间的概率密度) 与首次穿越时间的 n 阶条件矩．当原系统有随机参激时，边界 $H_0=0$ 常常是奇异的，应作特别研究．在工程中最感兴趣的是 μ_1，即平均穿越时间．一般情况下方程 (49) 需数值求解，例如，可用 Crank-Nicolson 型隐式差分格式求解，它具有算法稳定、节省机时的优点．关于拟不可积 Hamilton 系统的首次穿越时间问题的边界条件、详细求解过程及应用例子见文 [38].

8 拟 Hamilton 系统的最优非线性随机控制

随机结构动力学系统的主动控制是一个重要而困难的课题，目前文献中关于随机振动的许多控制策略本质上是确定性的．近来，基于拟 Hamilton 系统随机平均法与随机动态规划原理，

我们提出了一种最优非线性随机控制策略．考虑如下 n 自由度受控拟 Hamilton 系统

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\
\dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} - C_{ij}\frac{\partial H'}{\partial P_j} + u_i + f_{ik}\xi_k(t) \\
i,j &= 1,2,\cdots,n; \quad k = 1,2,\cdots,m
\end{aligned} \tag{51}$$

式中 $u_i = u_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 为反馈控制力，其余同式 (12)，将 u_i 分解为保守部分 $u_i^{(1)}$ 与耗散部分 $u_i^{(2)}$，将 $u_i^{(1)}$ 与 $-\partial H'/\partial Q_i$ 合并形成一个新的 Hamilton 系统．选取 $u_i^{(1)}$ 使新的 Hamilton 系统具有所要求的可积性与共振性，从而使响应在系统内尽可能按所要求的分布．然后对 (51) 式应用拟 Hamilton 系统的随机平均法 ($u_i^{(2)}$ 项保留不平均)．平均后的响应为受控的扩散过程，其维数取决于新 Hamilton 系统的可积性与共振性．给定一性能指标，可建立一个 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程，求解此方程可确定最优控制力 $u_i^{(2)}$，然后用随机平均法可预测未控与已控系统的响应，对随机激励的 Duffing 振子、迟滞系统及二自由度非线性阻尼系统作了许多数值计算，结果表明上述控制策略十分有效，控制器效率也很高 [19~23]．该策略已推广于部分可观的受控线性随机系统．在该策略与 6 节中随机稳定性分析方法基础上还提出了拟 Hamilton 系统反馈稳定化的方法．

9 结 语

以上是我们在发展随机激励的耗散的 Hamilton 系统理论方面已取得成果的一个小结．这些成果已基本上构成了非线性随机动力学与控制的 Hamilton 理论框架．这个理论框架为处理多自由度强非线性随机动力学与控制系统提供了一条十分有效的途径．为使这个理论框架发展成完整的非线性随机动力学与控制的 Hamilton 理论体系，尚有许多工作要做．例如，至今主要考虑高斯白噪声激励，尚需建立宽带随机激励及同时有随机与谐和激励情形拟 Hamilton 系统的随机平均法；又如，要研究如何将该理论应用于实际工程问题；再如，随机扰动对混沌的影响国内外虽已有些研究，尚有待于进一步深入研究．这些都将是我们今后努力的方向．

参 考 文 献

1 朱位秋．随机振动．北京：科学出版社，1992

2 Lin Y K, Cai G Q. Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and applications, New York: McGraw-Hill, 1995

3 Fuller A T. Analysis of nonlinear stochastic systems by means of the Fokker-Planck equations. *Int J Control,* 1969, 9: 603~655

4 Soize C. Steady-state solution of Fokker-Planck equation in high dimension. *Probabilistic Engineering Mechanics,* 1988, 3: 196~206

5 Soize C. Exact stationary response of multi-dimensional nonlinear Hamiltonian dynamical systems under parametric and external stochastic excitations. *Journal of Sound and Vibration,* 1991, 149: 1~24

6 Soize C. The Fokker-Planck equation for stochastic dynamical systems and its explicit steady state solutions. Singapore: World Scientific, 1994

7 Zhu W Q, Cai G Q, Lin Y K. On exact stationary solutions of stochastically perturbed Hamiltonian systems. *Probabilistic Engineering Mechanics,* 1990, 5: 84~87

8 Zhu W Q, Cai G Q, Lin Y K. Stochastically excited Hamiltonian systems. In: Bellomo N, Casitati F eds. Nonlinear Stochastic Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 543~552

9 Zhu W Q, Yang Y Q. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics,* 1996, 63: 493~500

10 Zhu W Q, Lei Y. Equivalent nonlinear system method for stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64: 209~216

11 Zhu W Q, Song T T, Lei Y. Equivalent nonlinear system method for stochastically excited Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1994, 61: 618~632

12 Zhu W Q, Huang Z L, Yang Y Q. Stochastic averaging of quasi-integrable-Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64: 975~984

13 Zhu W Q, Yang Y Q. Stochastic averaging of quasi-nonintegrable-Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64: 157~164

14 Khasminskii R Z. Averaging principle for stochastic differential Itô equations. *Kibernetia*, 1968, 4: 260~279 (in Russian)

15 Huang Z L, Zhu W Q. Lyapunov exponent and almost sure asymptotic stability of quasi-linear gyroscopic systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2000, 35: 645~655

16 Zhu W Q, Huang Z L. Stochastic Hopf bifurcation of quasi-nonintegrable-Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, 1999, 34: 437~447

17 Zhu W Q, Huang Z L. Stochastic stability of quasi-nonintegrable-Hamiltonian systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 218(5): 769~789

18 Zhu W Q, Huang Z L. Lyapunov exponent and stochastic stability of quasi-integrable-Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1999, 66: 211~217

19 Zhu W Q, Ying Z G. Optimal nonlinear feedback control of quasi-Hamiltonian systems. *Science in China* (Series A), 1999, 42(11): 1213~1219

20 Zhu W Q, Ying Z G, Ni Y Q, Ko J M. Optimal energy dissipation control of hysteretic systems. Proc of International Workshop on Seismic Isolation, Energy Dissipation and Control of Structures, 1999. 267~274

21 Zhu W Q, Ying Z G, Ni Q, Ko J M. Optimal nonlinear stochastic control of hysteretic system. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 2000, 126(10): 1027~1032

22 Zhu W Q, Ying Z G, Soong T T. Optimal nonlinear feedback control of structures under random loading. In: Spencer Jr B F, Johnson E A eds. Stochastic Structural Dynamics. Rotterdom: Balkema, 1998. 141~148

23 Zhu W Q, Ying Z G, Soong T T. An optimal nonlinear feedback contral strategy for randomly excited structural systems. to appear in *Nonlinear Dynamics*

24 Zhu W Q, Huang Z L. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2001, 36(1): 39~48

25 Huang Z L, Zhu W Q. Exact stationary solutions of stochastically and harmonically excited integrable Hamiltonian systems. in *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 230(3): 709~720

26 Zhu W Q, Huang Z L, Suzuki Y. Equivalent nonlinear system method for stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems. to appear in *Int J Non-Linear Mech*

27 Zhu W Q, Huang Z L, Suzuki Y. Stochastic averaging and Lyapunov exponent of quasi-partially-integrable-Hamiltonian systems. to appear in *Int J Non-linear Mech*

28 Tabor M. Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics. New York: John Wiley and Sons, 1989

29 Binney J J, et al. The Theory of Critical Phenomena——An Introduction to the Renormalization group. Oxford: Clarendon, 1992

30 Ying Z G, Zhu W Q. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated gyroscopic systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2000, 35: 837~848

31 Roberts J B, Spanos P D. Stochastic averaging: an approximate method for solving random vibration problems. *Int J Non-Linear Mech*, 1986, 21: 111~134

32 Zhu W Q. Stochastic averaging methods in random vibration. *ASME Applied Mechanics Reviews*, 1988, 41(5): 189~199

33 Zhu W Q. Recent developments and applications of the stochastic averaging methods in random vibration. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, 49(10) part 2: s72~s80

34 Huang Z L, Zhu W Q. Exact stationary solutions of averaged equations of stochastically and harmonically excited MDOF quasi-linear systems with internal and/or external resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 204(2): 249~258

35 Khasminskii R Z. Sufficient and necessary conditions of almost sure asymptotic stability of a linear stochastic system. *Theory of Probability and Applications*, 1967, 11: 390~405

36 Ariaratnam S T, Xie W C. Lyapunov exponents and stochastic stability of coupled Linear systems under real noise excitation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1992, 59: 664~673

37 Arnold L, Sri Namachchivaya N, Schenk-Hoppe K R. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: a case study. *Int J Bifurcation and Chaos,* 1996, 6(11): 1947~1975
38 Gan C B, Zhu W Q. First passage failure of quasi-non-integrable-Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech,* 2001, 36(2): 209~222

ADVANCES IN THEORY OF STOCHASTICALLY EXCITED AND DISSIPATED HAMILTONIAN SYSTEMS

Zhu Weiqiu Huang Zhilong
Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

Abstract In recent years, the functional form and solution method of the exact stationary solution for multi-degree-of-freedom nonlinear stochastic oscillatory systems under Gaussian white noise excitation were proposed by the present authors using the concepts of integrability and resonance and the property of Poisson bracket in Hamiltonian dynamics. Based on the exact stationary solution, an equivalent nonlinear system method was developed for similar systems. The stochastic averaging method for quasi-Hamiltonian systems was also proposed. The stochastic stability, stochastic bifurcation, reliability and optimal stochastic control of quasi-Hamiltonian systems were studied based on the stochastic averaging method. Thus, a Hamiltonian framework of nonlinear stochastic dynamics and control has been basically formulated. In the present paper, the advances in the theory of stochastically excited and dissipated Hamiltonian systems is reviewed.

Keywords hamiltonian system, stochastic averaging method, stochastic stability, stochastic bifurcation, optimal nonlinear feedback control