

曲面薄膜结构褶皱失稳力学

徐凡, 杨易凡, 汪婷

Curvature-affected instabilities in membranes and surfaces: A review

XU Fan, YANG Yifan, and WANG Ting

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/1000-0992-20-038>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

界面张力梯度驱动对流向湍流转捩的研究

Study on bifurcation to chaos of surface tension gradient driven flow

力学进展. 2021, 51(1): 1-28

类固体非晶态材料的变形与失效

Deformation and failure of amorphous, solidlike materials

力学进展. 2021, 51(2): 406-426

热致和磁致形状记忆合金循环变形和疲劳行为研究

Study on cyclic deformation and fatigue of thermal and magnetic shape memory alloys

力学进展. 2018, 48(1): 1802

二维材料力学行为的压痕测试

Indentation tests investigation of mechanical behavior of two-dimensional materials

力学进展. 2018, 48(1): 1804

基于大偏差理论的随机动力学研究

The researches on the stochastic dynamics based on the large deviation theory

力学进展. 2020, 50(1): 202010

同伦分析方法进展综述

A brief review of the homotopy analysis method

力学进展. 2019, 49(1): 201902



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

曲面薄膜结构褶皱失稳力学

徐 凡* 杨易凡 汪 婷

复旦大学航空航天系力学与工程仿真研究所, 上海 200433

摘 要 薄膜结构褶皱失稳在微观和宏观尺度会出现相似的形貌, 在过去二十年里引发了学者们极大的研究兴趣. 而几何曲率对薄膜结构的失稳临界、形貌选择和后屈曲演化起着至关重要的作用. 本文回顾近二十年来平面和曲面薄膜结构褶皱失稳力学研究进展, 聚焦曲率影响下的薄膜拉伸和膜基结构在各种激励下的稳定性问题. 有限应变板壳理论模型和数值计算方法的发展推动了对曲率影响下薄膜结构表面形貌多重分岔转变的定量理解、预测和追踪, 不仅推进了对薄膜结构失稳机理的深入理解, 也为抑制褶皱或利用失稳实现多功能表面制造提供了理论基础, 可促进拓扑形貌相关的功能性膜结构的设计及优化.

关键词 薄膜, 曲率, 褶皱, 分岔, 大变形

中图分类号: O33, O34, O39 文献标识码: A DOI: [10.6052/1000-0992-20-038](https://doi.org/10.6052/1000-0992-20-038)

收稿日期: 2020-12-26; 录用日期: 2021-04-19; 在线出版日期: 2021-05-01

* E-mail: fanxu@fudan.edu.cn

引用方式: 徐凡, 杨易凡, 汪婷. 曲面薄膜结构褶皱失稳力学. 力学进展, 2021, 51(2): 342-363

Xu F, Yang Y F, Wang T. Curvature-affected instabilities in membranes and surfaces: A review. *Advances in Mechanics*, 2021, 51(2): 342-363

© 2021 《力学进展》版权所有

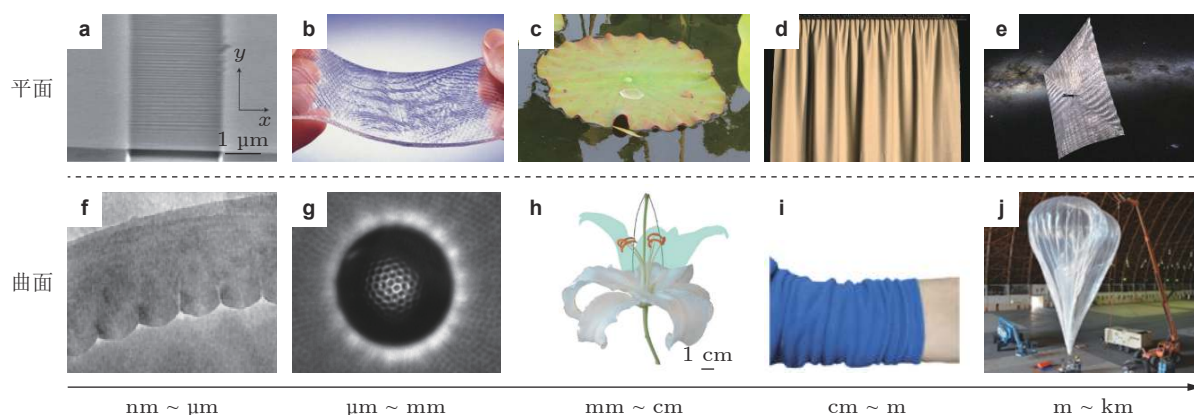


图 1

不同尺度下平面构型 (a)~(e) 与曲面构型 (f)~(j) 薄膜结构褶皱形貌对比: (a) 石墨烯 (Bao et al. 2009), (b) 凝胶薄膜, (c) 荷叶 (Xu et al. 2020a), (d) 窗帘 (Vandeparre et al. 2011), (e) 太阳光帆, (f) 弯曲碳纳米管 (Poncharal et al. 1999), (g) PDMS 微球 (Breid & Crosby 2013), (h) 百合花瓣 (Li-ang & Mahadevan 2011), (i) 袖子 (Yang et al. 2018), (j) Google 气球

1 引言

薄膜结构在自然界和现代工业中广泛存在 (见图 1). 由于其具有质轻、二维、高柔度、可伸展和高收纳比等特性被广泛应用于航空航天和建筑工程, 例如大面积太阳能电池阵、薄膜翼、充气天线、太阳帆、再入减速装置、太空舱和水立方膜结构等 (杜星文等 2006, 王长国等 2007, 胡海岩 2016, 彭福军等 2017). 然而, 薄膜由于面外抗弯刚度较低 (量级为厚度的三次方), 而面内刚度相对较高 (量级为厚度的一次方), 因此, 薄膜结构易发生面外变形、失稳和褶皱. 受限薄膜和薄壳等薄壁结构通过丧失面外稳定性 (起皱) 来降低面内的拉伸/压缩能, 通常被认为是走向灾难性破坏的途径 (Bažant 2000, Wang et al. 2016, 曹进军等 2019, Luo et al. 2020). 从另一方面看, 随着极端变形材料和柔性结构的兴起和应用 (Li et al. 2012, Reis et al. 2018, Reis 2015), 可以反过来利用这种屈曲失稳行为实现特定的功能, 例如通过可编程的起皱纹理形成伪装皮肤 (Pikul et al. 2017), 引入微结构的褶皱区域定位 (Yan et al. 2014), 利用拓扑优化的无褶皱设计 (Luo et al. 2017), 软体驱动的形貌控制 (Siéfert et al. 2019), 自主驱动的分岔引导打印 (Jiang et al. 2019), 形状可编辑的多稳态超表面 (Bende et al. 2015), 褶皱斑图地貌的动态调控 (Paulsen et al. 2016) 以及自适应气动性能控制 (Terwagne et al. 2014) 等. 可逆的失稳响应操控, 尤其是屈曲和稳定状态之间的灵活过渡, 将是相关功能性应用的关键, 可为几何拓扑相关的功能性薄膜结构的智能制造提供指导, 具有广阔的应用前景.

平面薄膜结构的褶皱失稳形貌在各个面内尺度下较为相似, 表现为无尺度效应 (见图 1(a)~图 1(e)). 然而, 初始曲率影响下薄膜结构的变形失稳形貌却较为复杂 (见图 1(f)~图 1(j)), 与平面构型下的褶皱斑图存在明显差异, 反映出曲率的作用效果. 软膜-硬基底系统中的曲率可以引导缺陷自组装, 例如裂纹扩展路径 (Mitchell et al. 2017) 和褶皱形貌 (Irvine et al. 2010, Ma et al. 2019, Jans-

sens et al. 2020). 曲率在核壳结构 (Li et al. 2011; Zhao et al. 2014; Xu & Potier-Ferry 2016; Xu et al. 2017, 2020b; Zhao et al. 2021) 和膜基系统 (Cai et al. 2011, Yang et al. 2018, Xu & Zhao 2020, Zhao et al. 2020, Ding et al. 2021) 的褶皱模式选择和形态转化中起关键作用. 自发曲率会导致薄壳旋转对称性破缺和跳跃屈曲失稳 (Zhang et al. 2018, Pezzulla et al. 2018). 另外, 曲率可延缓均匀生长系统中褶皱的形成 (Jia et al. 2018). 在发育中的哺乳动物大脑沟壑形态的异质系统中, 曲率小的区域首先发生失稳 (Budday et al. 2015). 结合曲率和剪裁设计可以实现波在折纸结构中的传播 (Rafsanjani et al. 2019). 在拉伸作用下, 曲线丝状超结构网络可以使变形模式从拉伸到弯曲转变 (Yan et al. 2020). 总之, 理解曲率对褶皱形貌演变和失稳模式成形的力学机理对于有效利用失稳实现智能表面等功能性用途至关重要.

本文针对曲面薄膜结构褶皱失稳行为, 从曲率影响下的薄膜拉伸稳定性和膜基结构表面失稳形貌选择两类问题的研究进展进行综述, 重点围绕曲率对失稳模式的影响及力学机理、模型与方法进行阐述分析, 最后对其发展趋势进行展望.

2 曲率影响下的薄膜拉伸稳定性

2.1 平面薄膜拉伸起皱临界

二十年前, Friedl 等 (2000), Cerda 等 (2002) 以及 Cerda & Mahadevan (2003) 相继揭示了单轴拉伸下平面薄膜会出现横向褶皱. 上述研究以及其他早期研究都受限于小应变 (约 1%) 起皱行为, 研究对象通常是传统硬材料, 如金属和塑料薄膜. Friedl 等 (2000) 给出了临界拉应力的表达式

$$\sigma_{xx}^{\text{cr}} = -\frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\left(\frac{n_1}{L}\right)^4 + 2\left(\frac{n_2}{W}\right)^2 \left(\frac{n_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{W}\right)^4}{C\left(\frac{n_2}{W}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{L}\right)^2} \quad (1)$$

其中 $C = \sigma_{yy}/\sigma_{xx}$ 为比例系数, σ_{yy} 为长度方向的应力, σ_{xx} 为横向应力, L 为长度, W 为宽度, h 为膜厚, E 为弹性模量, ν 为泊松比, n_1, n_2 分别是长度方向和横向的半波数. 随后, Cerda 等 (2002) 以及 Cerda & Mahadevan (2003) 通过能量极小化原理推导出褶皱波长 λ 和幅值 A 的标度律关系

$$\lambda \sim (hL)^{1/2} / \gamma^{1/4}, \quad A \sim (\nu hL)^{1/2} \gamma^{1/4} \quad (2)$$

其中 γ 为拉伸应变. 进一步地, Jacques & Potier-Ferry (2005) 基于稳定性理论, 解析获得了临界拉应力 σ_x^{cr} 和横向失稳波长 l 的表达式

$$\sigma_x^{\text{cr}} = \frac{E\pi^2}{3(1-\nu^2)C^2} \left(\frac{h}{l_c}\right)^2, \quad l = \frac{2\pi}{k} = \sqrt{2|C|l_x l_c} \quad (3)$$

其中 l_x 为长度方向屈曲长度, l_c 为特征长度, k 为横向失稳波数. 随后, Kim 等 (2016) 和 Puntel 等 (2011) 通过能量变分, 给出了临界拉伸应变的表达式

$$\varepsilon_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 h^2}{48(1-\nu^2)L^2} \left\{ 1 + \frac{L^2}{W^2} \left[(n_k + 2)^2 \left(1 + \frac{L^2 n_k^2}{W^2} \right) + n_k^2 \right] \right\} \quad (4)$$

其中 $n_k \in \mathbb{N}$.

2.2 平面超弹性薄膜拉伸起皱与再稳定

随着软物质力学的发展 (冯西桥等 2017, Reis et al. 2018), 非线性弹性有限变形理论得到广泛应用. 同时, 人们开始利用软材料大变形和失稳突变等特性实现形貌调控等功能性用途. Zheng (2009) 首次发现了过度拉伸的超弹性薄膜中的再稳定 (平整化) 行为, 即随着拉伸的持续增加, 薄膜褶皱幅值先增加、后减小, 最后消失 ($\varepsilon \sim 0.3$), 如图 2 所示. 这是软薄膜大变形后出现的孤立中心分岔 (isola-center bifurcation) 行为, 源自拉伸能与弯曲能之间的非线性竞争, 需要从解析、数值和实验上对其力学机理进行深入探究. 同时, 由于薄膜拉伸产生较大的面内变形, 经典的小应变板壳模型已不再适用, 需要发展新的板壳理论和计算方法来预报超弹性薄膜拉伸起皱与再稳定现象.

Healey 等 (2013) 通过在 Föppl-von Kármán (FvK) 薄板几何方程中引入面内非线性变形梯度项, 提出了基于 Saint-Venant Kirchhoff (SVK) 本构的有限应变薄板模型. 其格林-拉格朗日应变张量表示为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u} + \nabla w \otimes \nabla w) \quad (5)$$

其中 \mathbf{u} 和 w 分别表示面内位移和面外挠度, $\nabla(\cdot)$ 表示二维面梯度, \otimes 表示张量积. 当忽略式 (5) 中的面内非线性项 $\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$, 则退化为经典的 FvK 板模型. 两种模型都采用了线性曲率. 通过能量变分, 最后可得平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \mathbf{N}] &= \mathbf{0} \\ h^2 \Delta^2 w - \nabla \cdot (\mathbf{N} \nabla w) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 \mathbf{N} 为板中面的第二 Piola-Kirchhoff (PK) 应力张量. 注意到面内平衡方程中, 不同于经典 FvK 板模型第二 PK 应力的散度为零, 此处 SVK 板模型是第一 PK 应力的散度为零. 利用欧拉-牛顿数值算法求解, 可得到挠度-应变演化分岔图 2(b). 结果表明 SVK 模型能预测起皱-消皱的孤立中心分岔行为, 而经典 FvK 板模型无法预报褶皱消失现象. 因此, 几何方程中的面内非线性项对褶皱的消失起着决定性作用. 进一步地, Li 和 Healey (2016) 探究了材料非线性行为, 即 neo-Hookean (NH) 和 Mooney-Rivlin (MR) 超弹性本构对孤立中心分岔演化的影响. 结果表明可描述材料非线性行为的 NH 和 MR 模型在预测褶皱消失的再稳定点上比线弹性本构的 SVK 模型更精确. 然而, SVK 模型仍足以捕捉到褶皱的出现和消失行为, 表明不同的超弹性材料本构模型并不会对这一孤立中心分岔行为产生质的影响, 说明该现象主要依赖于几何非线性.

Fu 等 (2019) 从三维超弹性应变能函数出发推导了多种二维薄膜超弹性本构模型, 提出了适用于多种可压缩和不可压缩超弹性本构及应变硬化材料的有限应变板模型, 采用基于连续摄动理论的数值渐近法与可处理空间微分离散的谱配点方法相耦合的数值计算框架, 准确预测了薄膜拉伸起皱-消皱的演化全景. Wang 等 (2019) 基于 Koiter 稳定性理论, 首次半解析地预测了孤立中心分岔点, 探究了泊松比对薄膜拉伸起皱与再稳定的影响, 发现较小的泊松比会导致较滞后的褶皱出现、更低的失稳振幅和较早的褶皱消失行为. 特别地, 当泊松比低于一个阈值时, 薄膜在单轴拉伸时不会出现褶皱. 另外, 当薄膜长宽比大于 4 时, 薄膜中心起皱将分裂为两端起皱.

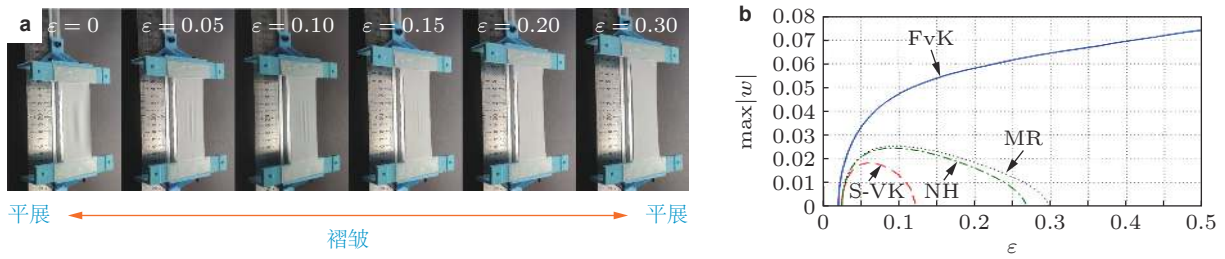


图 2

平面超弹性薄膜拉伸起皱-消皱演化. (a) 单轴拉伸实验, 对应拉伸应变分别为 $\varepsilon = 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3$; (b) 薄膜拉伸失稳分岔图 (Li & Healey 2016), 其中点划线、点线、虚线及实线分别表示 NH, MR, SVK, FvK 模型

除考虑各向同性材料薄膜外, Sipos 和 Fehér(2016), Zhu 等 (2018), Liu 等 (2019), Yang 等 (2020) 探究了各向异性材料对薄膜失稳行为的影响. Liu 等 (2019) 发现改变材料主方向和拉伸方向的夹角可对褶皱方向进行定向调控. Taylor 等 (2019) 探究了不可压纤维增强薄板在多种力学加载下的褶皱形貌. Yang 等 (2020) 通过在大应变板理论中引入各向异性超弹性本构, 建立了各向异性超弹性有限应变板模型, 发现当纤维与基质的剪切模量比高于临界值时, 褶皱消失, 即薄膜在拉伸过程中保持表面平展.

2.3 曲面薄膜稳定性与曲率消皱机制

薄膜结构通常具有曲面几何构型, 自然而然引出一些科学问题: 曲率是否影响褶皱失稳发生发展? 薄膜起皱是否依赖于初始曲率? 曲率能促进亦或是抑制薄膜起皱行为?

Wang 等 (2020) 发现曲率可以有效且精确地调控起皱与消皱行为 (见图 3). 当薄膜弯曲时 (具有初始曲率), 不同于平面薄膜拉伸出现局部起皱现象, 曲面薄膜会出现局部起皱与整体弯曲的耦合变形行为. 且存在临界曲率, 当曲率大于阈值时, 薄膜拉伸时始终保持表面光滑, 不会出现褶皱, 即曲率可抑制褶皱发生. 为定量理解其内在力学机理和影响因素, Wang 等 (2020) 基于广义曲线坐标系的微分几何, 建立了可以描述柱面的有限应变薄壳模型, 可准确预测薄膜起皱-消皱行为. 对于柱面几何, 采用弧长 s 和轴长 z 组成曲线坐标系 (s, z) , 则柱面可以参数化为 $\mathbf{X} = \left[R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}, z \right]^T$, 且其度量张量和曲率张量分别表示为

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

柱面下的格林-拉格朗日应变张量可以表示为

$$E_{\alpha\beta} = \hat{e}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (u_{\delta,\alpha} u_{\gamma,\beta} + u_{\gamma,\beta} w_{b\delta\alpha} + u_{\delta,\alpha} w_{b\gamma\beta} + w_{b\delta\alpha} w_{b\gamma\beta}) g^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta} \tag{8}$$

$$2\hat{e}_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + 2w_{b\alpha\beta} \tag{9}$$

其中 $\hat{e}_{\alpha\beta}$ 为线性应变张量, u^β 为面内位移, w 为面外挠度, 希腊字母 α, β, \dots 在 $\{1, 2\}$ 取值, 重复指标满足求和约定. 考虑 $w_{,\alpha} \sim \mathcal{O}(\varrho)$, 其中 $\varrho < 1$, 则存在以下两种情况:

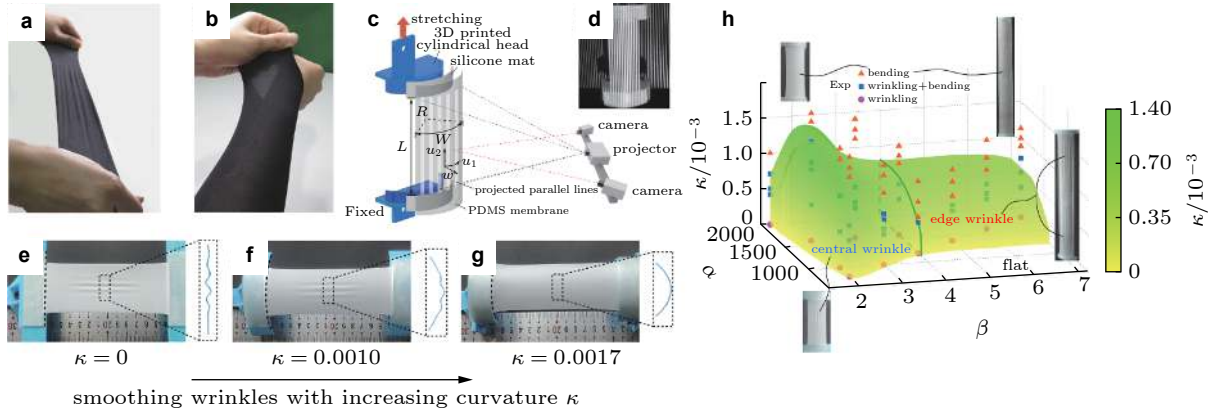


图 3

(a) (b) 平展的袖子受拉时出现横向褶皱, 穿起的袖子受拉时表面光滑. (c) (d) 曲面薄膜拉伸实验装置及光栅表面形貌测量. (e) ~ (g) 相同拉伸应变下增大曲率可抑制褶皱, 且大于临界曲率时薄膜保持光滑. (h) 曲率影响下的稳定性边界三维相图. 理论预测的稳定性界面 (整体弯曲变形与局部起褶的边界) 与实验 (散点) 一致 (Wang et al. 2020)

(1) 小曲率: $u_{\delta,\alpha} \sim \mathcal{O}(\varrho)$ 和 $b_{\gamma\beta} \sim \mathcal{O}(\varrho^2)$. 小曲率下柱面薄膜应变张量为

$$E_{\alpha\beta} = \hat{e}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}u_{\gamma,\alpha}u_{\gamma,\beta} + \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta} \quad (10)$$

当第二项面内非线性项忽略时, 模型退化为经典 Donnell-Mushtari-Vlassov (DMV) 壳模型 (Yamaki 1984).

(2) 有限曲率: $u_{\delta,\alpha} \sim \mathcal{O}(\varrho)$ 和 $b_{\gamma\beta} \sim \mathcal{O}(\varrho)$. 有限曲率下柱面薄膜应变张量为

$$E_{\alpha\beta} = \hat{e}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(u_{\gamma,\alpha}u_{\gamma,\beta} + u_{\gamma,\beta}wb_{\gamma\alpha} + u_{\gamma,\alpha}wb_{\gamma\beta} + wb_{\gamma\alpha}wb_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta} \quad (11)$$

线性化的弯曲应变张量可表示为

$$K_{\alpha\beta}^L = \left(\frac{\varepsilon_{12n}}{\tilde{\varepsilon}_{12n}} - 1 \right) b_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon_{12n}}{\tilde{\varepsilon}_{12n}} \left(B_{\alpha,\beta} + u_{\gamma,\alpha}b_{\beta}^{\gamma} + wb_{\gamma\alpha}b_{\beta}^{\gamma} \right) \quad (12)$$

其中 $\varepsilon_{12n}, \tilde{\varepsilon}_{12n}$ 分别为参考和当前构型下基矢量的混合积. 假设短波失稳下发生适当的面外转动 (法矢量转动较小), 则弯曲应变张量的非线性项可以忽略, 且近似有 $B_{\alpha} = -w_{,\alpha}$, 同时变形状态下度量张量近似为 1. 相应地, 存在两种情况:

(1) 小曲率: $u_{\delta,\alpha} \sim \mathcal{O}(\varrho)$ 和 $b_{\gamma\beta} \sim \mathcal{O}(\varrho^2)$. 小曲率下柱面弯曲张量表示为

$$K_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (13)$$

即为经典的 DMV 壳曲率假设 (Yamaki 1984).

(2) 有限曲率: $u_{\delta,\alpha} \sim \mathcal{O}(\varrho)$ 和 $b_{\gamma\beta} \sim \mathcal{O}(\varrho)$. 有限曲率下柱面弯曲张量为

$$K_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(u_{\gamma,\alpha}b_{\beta}^{\gamma} + u_{\gamma,\beta}b_{\alpha}^{\gamma} \right) + wb_{\gamma\alpha}b_{\beta}^{\gamma} \quad (14)$$

基于欧拉-拉格朗日方程, 最后可得有限曲率柱面薄膜的平衡微分方程组

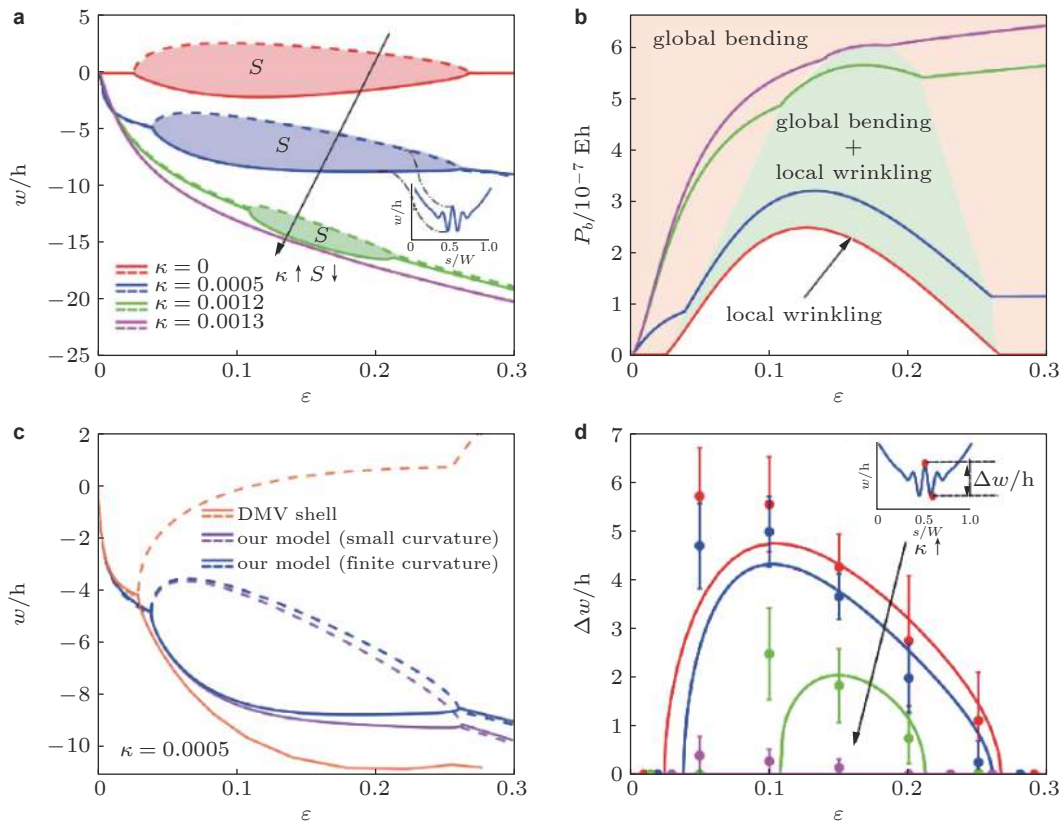


图 4

(a) 应变-挠度分岔曲线, 当曲率 $\kappa \geq \kappa_{\text{cr}} \sim 0.0013$ 时, 只出现整体弯曲(无褶). (b) 弯曲能-应变演化曲线, 绿色区域表示整体弯曲与局部起褶的耦合行为, 橙色区域表示只发生整体弯曲变形(无褶). (c) 经典 DMV 壳模型无法预报褶皱消失现象. (d) 理论计算演化与实验对比 (Wang et al. 2020)

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot [(I_s + \nabla u + w\mathbf{b}) \mathbf{N}(\mathbf{E}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{K})] &= \mathbf{0} \\ -\nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{K}) - \nabla \cdot [\mathbf{N}(\mathbf{E}) \cdot \nabla w] + \mathbf{M}(\mathbf{K}) : (\mathbf{b}^T \mathbf{b}) + \\ \mathbf{N}(\mathbf{E}) : \left[\mathbf{b} + \frac{1}{2} (\nabla u^T \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \cdot \nabla u) + w \mathbf{b}^T \mathbf{b} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中薄膜力 \mathbf{N} 与弯矩 \mathbf{M} 分别表示为

$$\mathbf{N}(\mathbf{E}) := \frac{\partial [h\Psi_m(\mathbf{E})]}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{K}) := \frac{\partial \Phi_b(\mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}} \quad (16)$$

其中 Ψ_m 和 Φ_b 分别为薄膜能密度和弯曲能密度.

通过数值渐近法和谱配点法可定量求解方程 (15) 并预测追踪非线性失稳形貌演化全景 (见图 4). 对于平面薄膜 (曲率 $\kappa = 0$), 在拉伸应变约 2.5% 时褶皱出现, 随着拉伸应变增加, 褶皱幅值先增大后减小, 最后消失, 整个路径即为孤立中心分岔演化. 对于曲面薄膜, 在拉伸过程中出现整体弯曲与局部起褶耦合的失稳行为, 且褶皱幅值随着曲率的增大而减小. 当曲率高于临界值时, 薄膜不会出现褶皱, 只发生整体弯曲变形. 这可以从弯曲能和薄膜能的非线性竞争来理解 (见图 4(b)).

平面薄膜在拉伸过程中, 褶皱出现前其弯曲能保持为零; 褶皱出现后, 随着继续拉伸, 弯曲能先增加后减小; 当褶皱消失后, 弯曲能再次变为零. 对于曲面薄膜, 在拉伸过程中, 弯曲能一直处于主导, 始终增加, 且当初始曲率大于临界阈值时, 弯曲能不发生突变. 注意到经典 DMV 壳模型无法预报褶皱消失的再稳定点, 而 Wang 等 (2020) 提出的有限应变壳模型可准确预测曲面薄膜拉伸起皱-消皱行为. 理解曲率对软薄膜稳定性形貌演变对于有效利用褶皱作为形貌设计至关重要, 也为薄膜结构平整化 (消皱) 提供了新的思路.

3 曲率影响下膜基结构表面失稳行为

3.1 平面膜基结构

把薄膜铺在基底上, 则形成膜基结构. 软物质表面失稳现象, 即膜基结构表面起皱行为在自然界中普遍存在, 例如皮肤皱纹 (Efimenko et al. 2005)、大脑沟回 (Tallinen et al. 2016)、风干水果 (Li et al. 2011) 和花叶形貌 (Xu et al. 2020a) 等; 现代工业中, 膜基结构失稳行为在表面自清洁、防污损 (Pocivavsek et al. 2018)、形貌伪装 (Pikul et al. 2017) 和微纳米斑图成形 (Bowden et al. 1998) 等领域具有广泛应用. 然而, 如何定量预测并连续追踪后屈曲非线性失稳模态中的多重分岔转变仍是一项挑战.

由于薄膜褶皱波长 λ 通常远大于膜厚, 薄膜面内应变一般可用 FvK 薄板几何方程描述 (Chen & Hutchinson 2004, Huang et al. 2005)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha}w_{,\beta}) \quad (17)$$

单轴压缩下, 膜基系统通常会在临界阈值处屈曲产生正弦形褶皱 (Allen 1969; Biot 1963; Xu et al. 2014, 2015; Xu and Potier-Ferry 2016), 此时薄膜力可表示为 (Genzer & Groenewold 2006, Chung et al. 2011)

$$N = E_f \left[\left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{Wh_f^3}{3(1-\nu_f^2)} + \frac{\lambda E_s W}{4\pi(1-\nu_s^2)E_f} \right] \quad (18)$$

其中 E 为杨氏模量, ν 为泊松比, h_f 为薄膜厚度, W 为宽度, 下标 f 和 s 分别表示薄膜和基底. 应力极小化满足条件 $dN/d\lambda = 0$, 可得到临界失稳波长 λ_c .

$$\lambda_c = 2\pi h_f \left(\frac{\bar{E}_f}{3\bar{E}_s} \right)^{1/3} \quad (19)$$

其中 $\bar{E} = E/(1-\nu^2)$. 式 (19) 表明褶皱的临界波长由模量比和膜厚决定. 相应的褶皱幅值 A 和临界应变 ε_c 分别为

$$\left. \begin{aligned} A &= h_f \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1} \\ \varepsilon_c &= \frac{1}{4} \left(\frac{3\bar{E}_s}{\bar{E}_f} \right)^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

可以看到, 临界应变 ε_c 仅取决于模量比. 从能量角度看, 软基底上薄膜起皱是在薄膜弯曲能、拉

伸能和基底的变形能之间寻求平衡的过程 (Khang et al. 2006, Huang et al. 2005, Song et al. 2009, Fu et al. 2018). 当达到临界压缩应变时, 薄膜会发生屈曲从而降低系统的总势能. 考虑已经起皱的薄膜受到额外施加的应变 ($\varepsilon_{\text{applied}}$), Jiang 等 (2007) 发展了一种有限变形框架下的模型用于预测褶皱波长和幅值

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\lambda_c (1 + \varepsilon_{\text{applied}})}{(1 + \varepsilon_{\text{pre}}) (1 + \varepsilon_{\text{applied}} + \zeta)^{1/3}} \\ A &= h_f \frac{\sqrt{(\varepsilon_{\text{pre}} - \varepsilon_{\text{applied}}) / \varepsilon_c - 1}}{\sqrt{1 + \varepsilon_{\text{pre}}(1 + \varepsilon_{\text{applied}} + \zeta)^{1/3}}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中 ε_{pre} 为基底的预应变, $\zeta = 5(\varepsilon_{\text{pre}} - \varepsilon_{\text{applied}})(1 + \varepsilon_{\text{pre}})/32$. 式 (21) 提供了在额外施加应变下褶皱波长和幅值的预测.

对于膜基结构受双轴压缩的情况, 临界应变 ε_c 和应力 σ_c 与单轴压缩的理论解仅存在系数上的差异, 分别表示为 (Audoly & Boudaoud 2008, Chen & Hutchinson 2004)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_c &= \frac{1}{4(1 + \nu_f)} \left(\frac{3\bar{E}_s}{\bar{E}_f} \right)^{2/3} \\ \sigma_c &= \frac{\bar{E}_f}{4} \left(\frac{3\bar{E}_s}{\bar{E}_f} \right)^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Zhao 等 (2015) 探究了受限各向同性生长 (膨胀) 条件下, 横向尺寸对柔性基底上薄膜起皱的影响, 得到临界生长应变 ε_g 为

$$\varepsilon_g = \frac{1}{4(1 + \nu_f)} \left(\frac{3\bar{E}_s}{\bar{E}_f} \right)^{2/3} + \frac{3}{8} \frac{\lambda_c}{2a} \quad (23)$$

其中方形薄膜的宽度为 $2a$. 式 (23) 表明除弹模比外, 方形膜基结构起皱的临界生长应变也依赖于临界波长和薄膜宽度.

对于模量比 $E_f/E_s \sim 5 - 1000$ 范围内的膜基结构, 在临界失稳后进一步加载, 会出现倍周期模态 (周期性的成对褶皱) 的二次分岔失稳, 更进一步加载会导致四倍周期模态 (Brau et al. 2011, Cao & Hutchinson 2012). 当系统存在结构缺陷、预拉伸或液体基底时, 还可能出现其他模态, 如三倍周期 (Budday et al. 2015a, 2015b)、凸脊 (Auguste et al. 2018, Cao & Hutchinson 2012)、多级褶皱 (Cheng & Xu 2021) 和自接触折痕 (Pocivavsek et al. 2008, Sultan & Boudaoud 2008, Sun et al. 2012) 等复杂形貌 (见图 5).

近年来随着膜基结构表面自组装技术的飞速发展, 各种薄膜材料包括无机物 (Chen et al. 2017)、金属 (Bowden et al. 1998)、聚合物 (Rodríguez-Hernández 2015) 和新型碳材料 (Hu et al. 2019) 被用于制造微/纳米结构. 驱动薄膜自组装的机械力可由化学反应 (例如表面聚合和氧化) (Rodríguez-Hernández 2015) 或物理刺激 (例如热应变、预应变释放和光致变形) (Ohzono & Monobe 2012, Fu et al. 2018, Zhao et al. 2019, Zhao et al. 2021). 总之, 软基底上薄膜的起皱形貌、模态和特征尺度受多参数 (例如薄膜和基底模量比、失配应变和应力分布等) 影响 (倪勇等 2018). 早期的工作大多聚焦于平面初始构型下的膜基结构, 近年来越来越多的学者开始关注曲

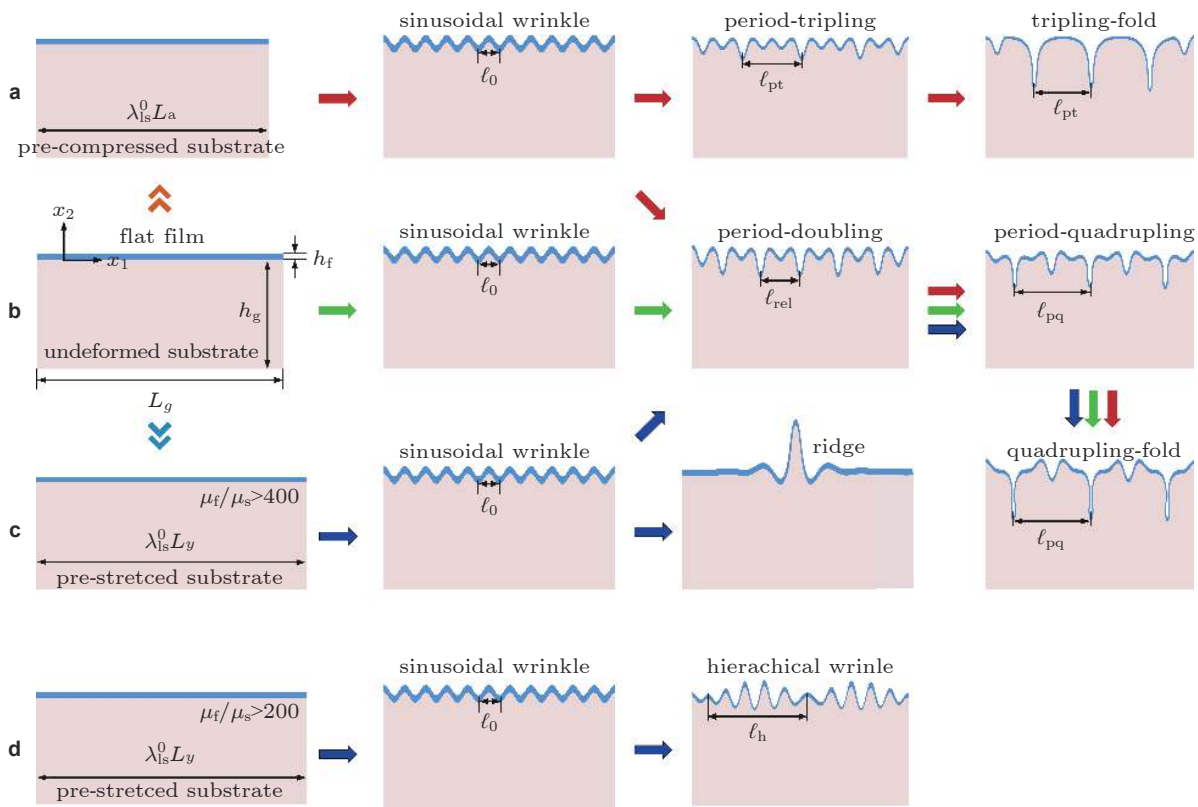


图 5

膜基结构失稳模态演化示意图: (a) 基底预压缩: 平整→褶皱→三倍周期→折痕, (b) 直接压缩: 平整→褶皱→倍周期→四倍周期→折痕, (c) 基底预拉伸 (高模量比): 平整→褶皱→凸脊, (d) 基底预拉伸 (低模量比): 平整→褶皱→多级褶皱 (Cheng & Xu 2021)

率对表面褶皱形貌的影响.

3.2 柱面膜基结构

本节讨论在各种载荷下 (例如轴向压缩、热膨胀/收缩和体积增长) 的柱面核壳结构表面起皱行为. 柱面和锥面都是具有零高斯曲率的可展曲面, 几何上属同一类曲面构型. 对于半径为 R , 外层厚度为 h_f ($h_f/R \ll 1$) 的柱面核壳结构, 经典 DMV 框架下 (Yamaki 1984) 的应变张量和曲率张量为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 - \frac{w}{R}, \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \\ k_{xx} &= -w_{,xx}, \quad k_{yy} = -w_{,yy}, \quad k_{xy} = -2w_{,xy} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

与平面膜基系统相比, DMV 浅壳模型中环向应变多了曲率的贡献, 即 w/R . 显然, 当柱面退化为平面时 ($R \rightarrow \infty$), 有 $w/R \rightarrow 0$, 几何方程与平面系统一致. 柔性核心刚度 K_s 取决于基底的弹模和屈曲半波长 ℓ_x (Allen 1969, Biot 1963)

$$K_s = \frac{2E_s\pi}{(3-\nu_s)(1+\nu_s)} \frac{1}{\ell_x} \quad (25)$$

当柱面核壳结构受到轴向压缩时,由于曲率与核心的共同作用,薄壳可能先屈曲成轴对称的正弦形模态(见图6(a)),继续加载下转变成非轴对称的钻石形模态(见图6(b)).为表征柱面核壳结构的模态转化规律,Xu & Potier-Ferry (2016)通过分析基底与薄膜变形能量级,得到一个无量纲参数

$$C_s = \frac{E_s}{E_f} \left(\frac{R}{h_f} \right)^{3/2} \quad (26)$$

其表征了核壳弹模比 E_s/E_f 和无量纲曲率半径 R/h_f .当 $C_s \geq 0.9$,屈曲模态是轴对称的(见图6(a)),且超临界分岔后的解是稳定的;当 $C_s \leq 0.7$,柱面核壳结构发生亚临界二次分岔失稳成钻石形模态(见图6(b)).此外,对于极软的核心,其后屈曲行为接近于空心柱壳,具有极强的缺陷敏感性.上述两种失稳形貌是轴压下柱面核壳结构的普遍形式,除了在模态过渡区中($0.7 < C_s < 0.9$)可能会出现两种模态共存的情况.实际上,在不同几何构型和载荷条件下,会得到不同的失稳形貌和分岔模式(见图6(c)).由于参数 C_s 是从基于DMV薄壳方程组和线弹性核心的量纲分析中得到的普适无量纲参数,可适用于多种失稳模态的核壳系统分析,此点在下文球面核壳结构中会得到体现.

外层壳和核心之间的失配应变可由外部激励引起的非均匀膨胀/收缩产生,如热收缩(Tan et al. 2019, Yuan et al. 2019),溶剂引起的膨胀(Li et al. 2015, Yin et al. 2014)和体积增长(Ben Amar & Jia 2013).Chen & Yin (2010)在圆柱核壳结构中引入平面应变假设,得到前屈曲中薄膜压应力为

$$\sigma_0 = \frac{E_s E_f (2R^2 + 2Rh_f + h_f^2) \Delta\varepsilon}{2E_s (1-\nu_f^2) R^2 + [E_s (1+\nu_f) + E_f (1+\nu_s) (1-2\nu_s)] (2Rh_f + h_f^2)} \quad (27)$$

式(27)表明, σ_0 受基底曲率半径 R 、失配应变 $\Delta\varepsilon$ 和弹模比的影响.从简化的环形平面应变膜基模型中可以得到临界波数 n_c 、临界波长 λ_c 、临界应力 σ_c 、临界应变 ε_c 和起皱幅值 A (Chen & Yin 2010)

$$\left. \begin{aligned} n_c &= \left(\frac{12\tilde{E}_s R^3}{\tilde{E}_f h_f^3} \right)^{1/4}, \lambda_c = 2\pi h_f \left(\frac{\tilde{E}_f R}{12\tilde{E}_s h_f} \right)^{1/4}, \sigma_c = \sqrt{\frac{\tilde{E}_f \tilde{E}_s h_f}{3R}} \\ \varepsilon_c &= \sqrt{\frac{\tilde{E}_s h_f}{3\tilde{E}_f R}}, A = h_f \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1 \right)} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

其中 $\tilde{E}_s = E_s / (1 - 2\nu_s) (1 + \nu_s)$.从式(28)中可见,无量纲曲率 h_f/R 对起皱行为有着重要影响.随着曲率的增大,临界应变随之增大,说明曲率推迟了系统的表面起皱.

利用智能材料对多物理场激励产生的变形响应可用于形貌斑图的灵活设计与调控.Zhao等(2021)将液晶分子取向产生的各向异性自发应变引入经典DMV薄壳理论中,发现当指向矢在圆柱面内排布时,失稳形貌受核壳刚度比和曲率影响,可出现轴对称、油条状或钻石模态;当指向矢在圆柱面外分布时,薄膜中的各向异性自发应变会导致斜条纹、平行珠链或钻石模态(见图7).通过改变液晶高聚物网络(LCN)薄膜中液晶初始指向矢方向,可实现表面褶皱斑图的灵活设计.

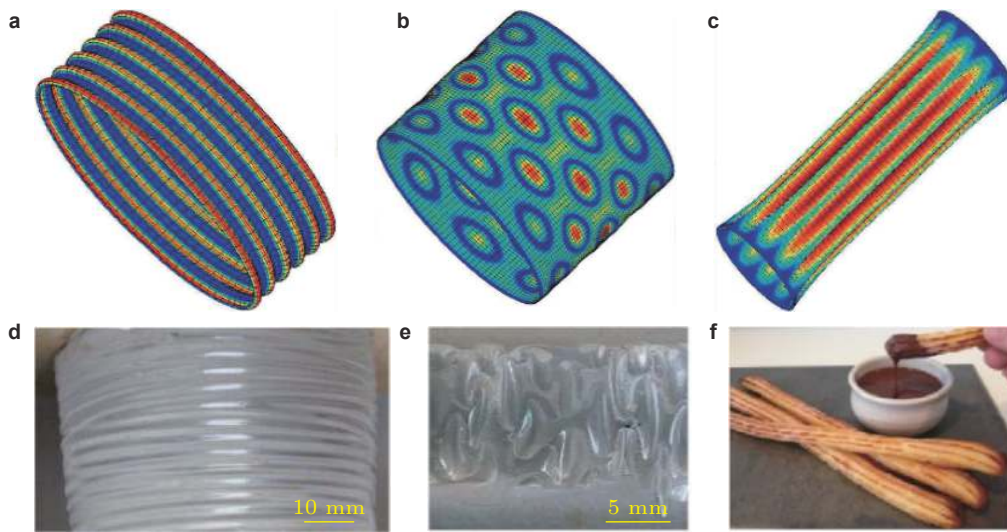


图 6

三种典型柱面核壳结构失稳形貌: (a) 轴压下轴对称正弦形模态; (b) 轴压下非轴对称钻石形模态; (c) 热载荷下油条状失稳模态 (Xu et al. 2017); (d)(e) 为实验 (Zhao et al. 2014) 分别对应 (a)(b) 模态; (f) 西班牙油条

另一种典型情况是软壳在柱面核心上轴向受压无粘连滑移 (见图 8(a)). 平面几何构型下在桌面上挤压一张纸的现象较为简单, 纸张整体屈曲成单一凸脊 (见图 8(b) ~ 图 8(d)). Yang 等 (2018) 发现柱面基底上软壳在轴向压缩下, 由于曲率的影响, 会首先屈曲成正弦形褶皱 (见图 8(f)), 实验与理论计算表明临界失稳应变与无核心圆柱壳轴向受压一致 (van der Heijden, 2009)

$$\varepsilon_c = \frac{1}{c} \frac{h_f}{R}, \quad \lambda_c = \pi \sqrt{\frac{2Rh_f}{c}} \quad (29)$$

其中 $c = \sqrt{3(1-\nu_f^2)}$. 式 (29) 表明当曲率半径 $R \rightarrow \infty$ 时 (柱面退化为平面), 临界褶皱失稳应变 $\varepsilon_c \rightarrow 0$, 波长 $\lambda_c \rightarrow \infty$, 这就解释了平面构型下无法观察到周期性褶皱的原因. 随着压应变增大, 周期性褶皱二次分岔失稳成单一凸脊模态. 受曲率影响, 凸脊的高度存在极限, 并不会像平面情形下 (见图 8(b) (c)) 半波的高度接近于整个薄片长度的一半. 在到达挠度极限后, 凸脊由于对称性破缺倒向一边而发生偏转. 从图 8 可见, 初始曲率决定了系统的失稳模态及形貌演化过程, 即光滑 (smooth) \rightarrow 褶皱 (wrinkle) \rightarrow 凸脊 (ridge) \rightarrow 松垂 (sagging) 的多重分岔失稳行为, 是一种涉及多种模态连续转变的强非线性问题.

3.3 球面膜基结构

球面膜基是另一种常见的曲面复合结构, 具有正高斯曲率. 许多果实和蔬菜可看作具有核壳结构的球体或类球体, 其生长过程中呈现出多样的褶皱斑图形貌, 例如甜瓜、脱水花粉粒和青豆等 (Yin et al. 2009, Yang et al. 2016, Li et al. 2011). Yin 等 (2009) 基于弹性薄壳理论和有限元, 模拟分析了各种球形核壳结构的表面不稳定性和失稳模态. 他们发现球面核壳结构的失稳模态主

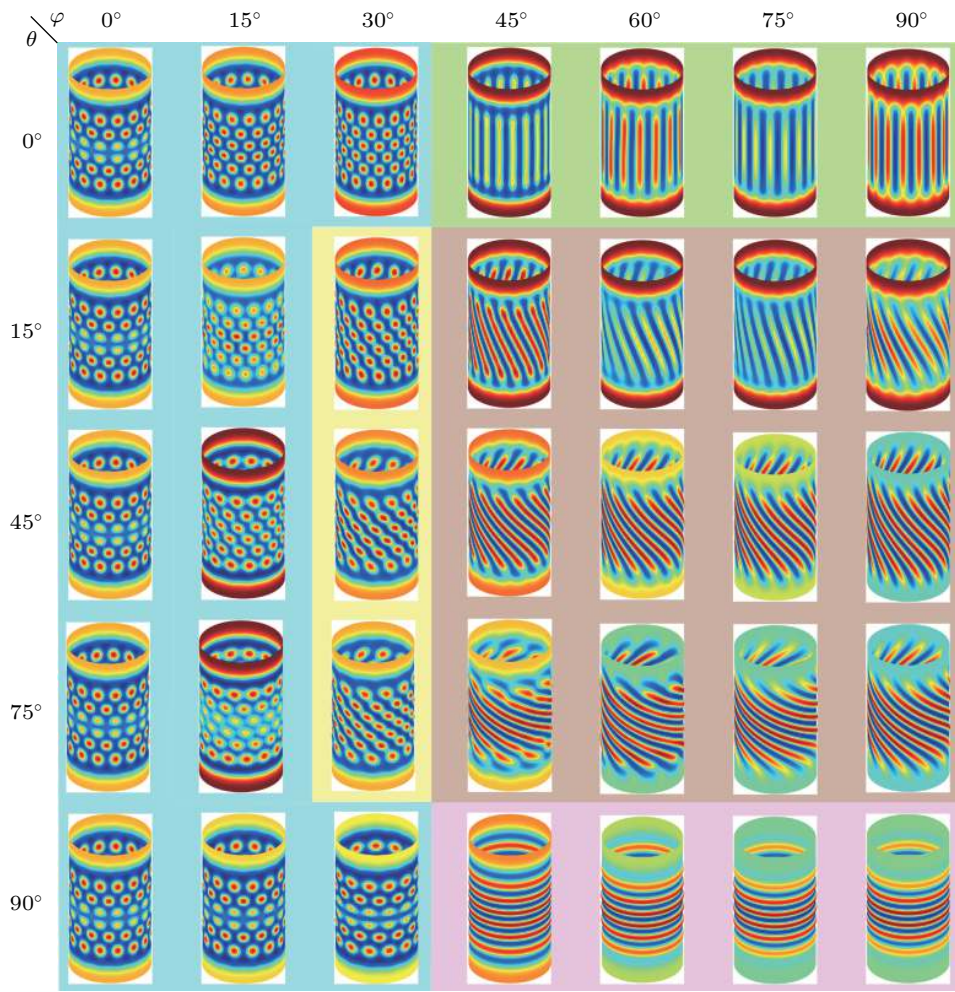


图 7

液晶高聚物网络 (LCN) 柱面核壳结构表面失稳形貌相图. 液晶分子指向矢取向显著影响褶皱失稳形貌选择 (Zhao et al. 2021)

要取决于有效尺寸/厚度比、赤道/极半径比和核壳弹性模量比.

考虑半径为 R 的球形基底, 覆盖一个厚度为 h_f 的硬壳, 浅曲率球壳应变可表示为 (Xu et al. 2020b, Xu & Zhao 2020)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 - \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 - \frac{w}{R}, \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \\ k_{xx} &= -w_{,xx}, \quad k_{yy} = -w_{,yy}, \quad k_{xy} = -2w_{,xy} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

和柱面情况相比, 可以发现只在另一方向多了曲率影响, 即 w/R . Li 等 (2011) 通过临界稳定性分析和有限元模拟, 研究了 neo-Hookean 球面核壳结构因核心收缩引起的起皱和后屈曲模态. 当收缩达到临界值时, 球壳首先出现巴基球失稳形貌, 然后逐步演化为迷宫模态. 豌豆失水萎缩实验进一步验证了这一形貌的演化过程 (见图 9(a)). 基于 Koiter 弹性壳理论, Stoop 等 (2015) 发展了一种广义 Swift-Hohenberg 模型, 用于描述膜基结构褶皱形貌和模态选择. López-Jiménez 等

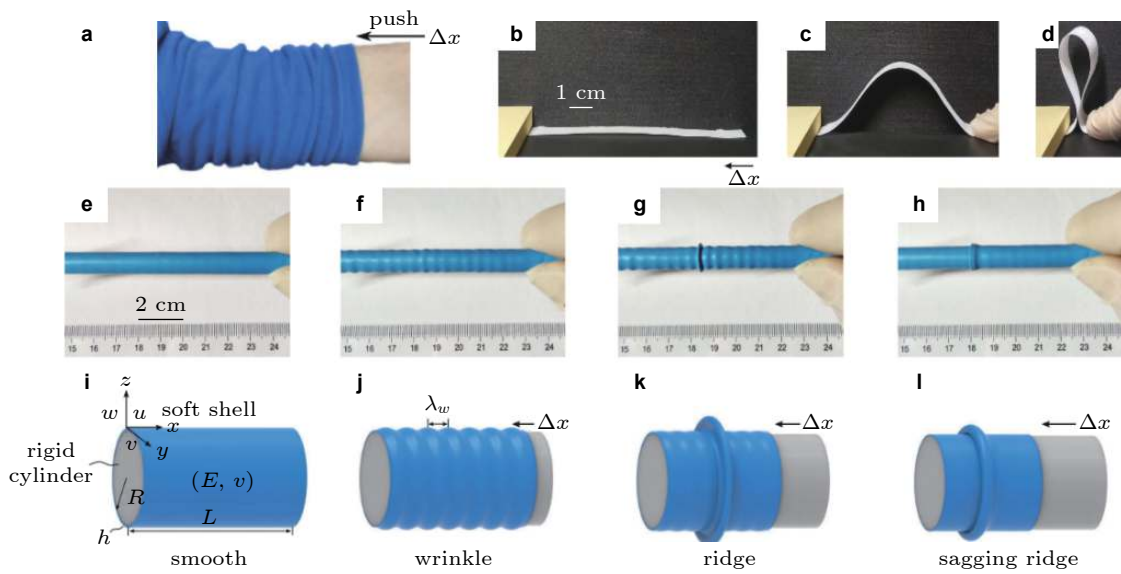


图 8

软壳在圆柱面上滑动受压失稳模态. (a) 擻起的袖子上的褶皱. (b)~(d) 单轴压缩桌面上的一张平坦的纸, 纸面隆起形成单一凸脊. (e) 柱面乳胶气球厚度 $h_f = 0.2 \text{ mm}$, 嵌套在半径 $R = 3 \text{ mm}$ 的亚克力圆柱上. 随着右侧压缩的增加, 出现四种不同的状态: (e) 初始光滑构型; (f) 正弦形褶皱; (g) 凸脊; (h) 松垂形凸脊. (i)~(l) 分别对应于 (e)~(h) 的特征示意图 (Yang et al. 2018)

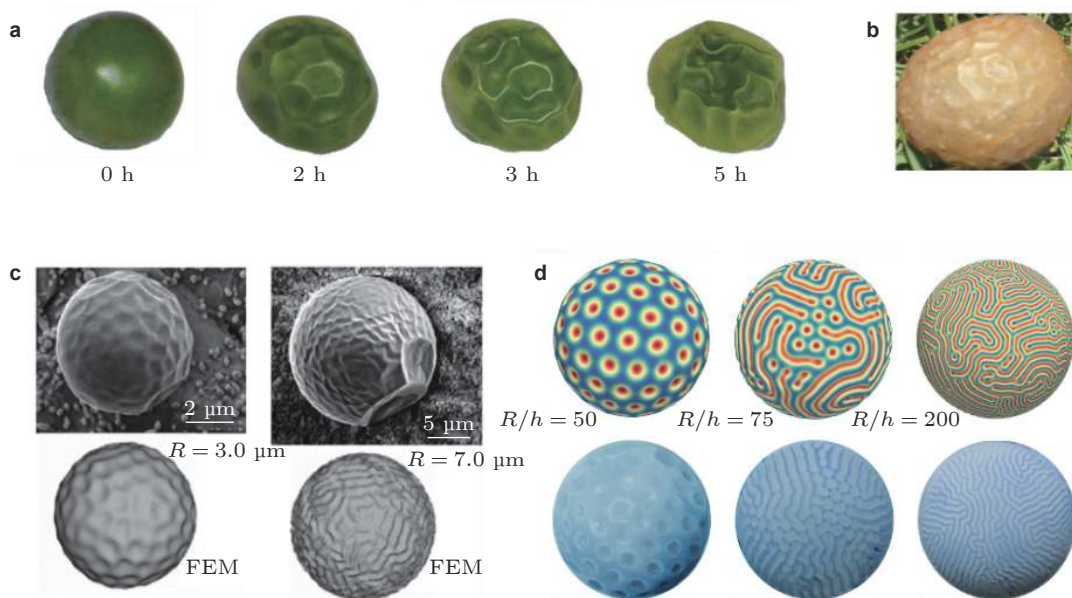


图 9

球面核壳结构表面失稳是一种复杂的跨尺度力学行为: (a) (b) 植物果实失水皱缩形貌 (Li et al. 2011, Xu & Potier-Ferry 2017); (c) Ag核/SiO₂壳微球结构表面失稳形貌 (Cao et al. 2008); (d) 不同径厚比下球面核壳结构的失稳模态 (Stoop et al. 2015)

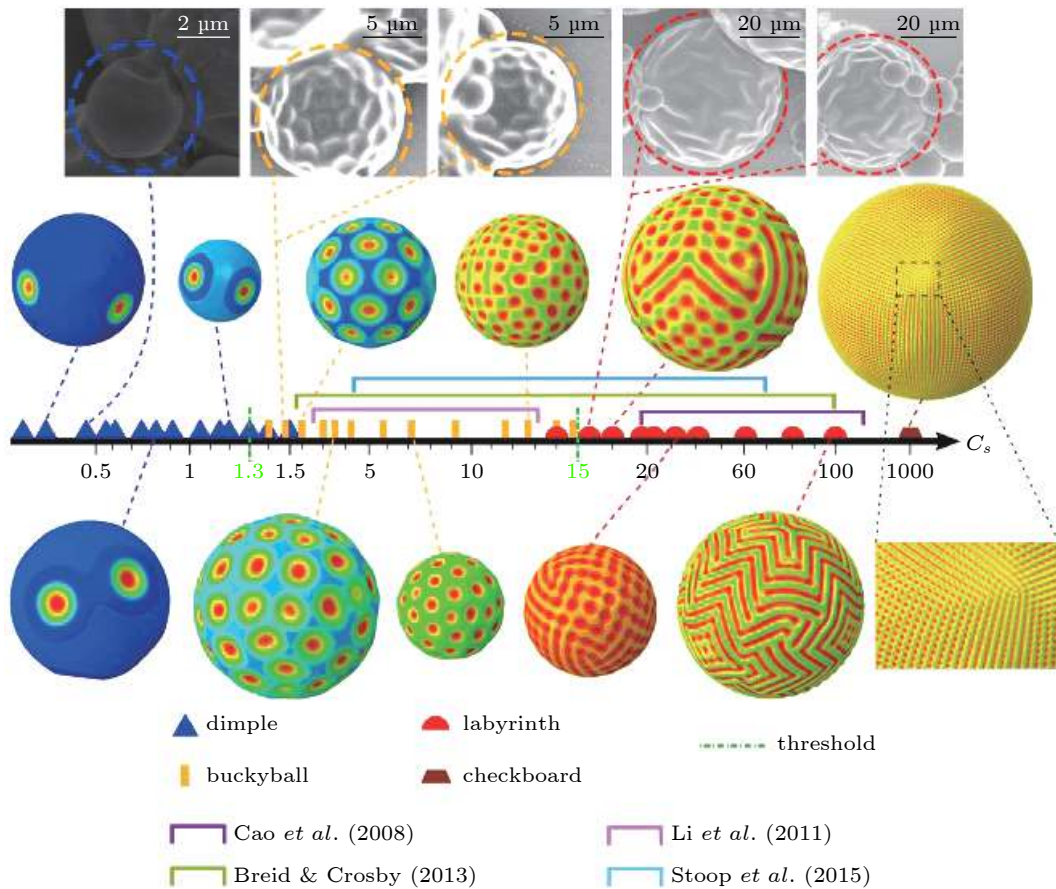


图 10

核壳结构起皱模态相图. 无量纲参数 C_s 决定了局部凹陷、巴基球、迷宫和棋盘之间的模态选择. 局部凹陷到巴基球的相变边界为 $C_s \approx 1.3$, 巴基球到迷宫的相变边界为 $C_s \approx 15$ (Xu et al. 2020b)

(2016) 基于广义 Swift-Hohenberg 理论研究了曲率和拓扑结构对曲面核壳结构表面晶体压痕斑图的影响. 结果表明单个缺陷的位置和缺陷链的方向依赖于局部高斯曲率和梯度, 进一步说明曲率对膜基结构表面形貌演化有着重要影响. Zhao 等 (2020) 进一步研究了曲率各向异性和曲率梯度对曲面膜基系统起皱的影响, 给出了描述各向异性曲率的模态选择相图. 他们发现, 当曲率张量为各向异性且褶皱垂直于主曲率时, 曲面膜基系统的初始不稳定模态是正弦形. 随着残余应力的增大, 正弦褶皱可演变为六边形, 并经历双稳态混合模态进一步转化为迷宫形貌.

Xu 等 (2020b) 从实验和理论上发现, 在核心收缩或表层膨胀时, 球面核壳结构的模态选择主要取决于单一的无量纲参数 C_s (见图 10). 当 $C_s < 1.3$ 时, 核壳结构通常经历亚临界分岔失稳成局部凹陷形貌; 当 $1.3 < C_s < 15$ 时, 系统会失稳成周期性的巴基球模态; 当 $C_s > 15$ 时, 则产生无序的迷宫斑图. 当 $C_s \sim 1000$, 核壳结构近似于双轴压缩下的平面膜基系统, 失稳成棋盘状斑图. 基于单一参数 C_s 的全域模态相图与氧化聚二甲基硅氧烷 (PDMS) 微球的实验观察结果一致. 研究结果不仅对球面核壳结构失稳形貌选择提供了公式化解释, 也为定量利用曲率和弹模调控表面斑图

成形及灵活设计提供了理论依据。

4 结论

薄膜起皱现象由于其丰富的表面形貌和复杂的非线性力学行为, 过去二十年里引起了广泛的研究兴趣。早期的工作聚焦于平面薄膜结构小变形起皱行为的临界分析, 近年的工作开始探究曲率对薄膜结构大变形失稳行为的影响, 促进了有限应变壳理论的发展。研究发现增大初始曲率可抑制褶皱产生, 为薄膜结构平整化提供了新思路。膜基双层结构中, 曲率不仅会改变薄膜起皱的临界载荷, 也会显著影响空间褶皱的模式选择和非线性演变, 具体可归纳为以下几点: (1) 失稳的临界应变一般随曲率的增加而增加, 即曲率会延迟褶皱失稳; (2) 曲率是调控表面失稳形貌的重要参数。曲面核壳结构比平面膜基结构通常具有更大的变形, 更容易产生对称性破缺, 使其在不同几何曲率构型下产生更丰富多变的褶皱斑图; (3) 曲面基底可以是实心的, 也可以是空心的, 可具有各种各样跨尺度的几何构型。虽然文献中已经实现了大量等曲率表面失稳形貌演化的模拟, 但对于非均匀曲率表面上更为复杂的起皱形貌的精确预测, 仍需要普适的理论模型和高效的计算方法。理解曲率影响下薄膜结构的非线性失稳机理和形貌演化规律, 对于利用失稳实现多功能表面制造具有应用潜力, 可促进拓扑形貌相关的功能性薄膜结构的设计及优化。

致谢 国家自然科学基金 (11872150, 11602058, 11772094); 上海市青年科技启明星计划 (19QA1400500) 资助项目。

参考文献

- 曹进军, 张卉婷, 张亮, 彭福军, 恽卫东. 2019. 对角受拉方膜褶皱变形幅值的理论预测及实验验证. *力学学报*, **51**: 1403-1410 (Cao J J, Zhang H T, Zhang L, Peng F J, Yun W D. 2019. Theoretical prediction and experimental verification of wrinkle amplitude in a square membrane subjected to diagonal tension. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **51**: 1403-1410).
- 冯西桥, 曹艳平, 李博. 2017. 软材料表面失稳力学. 北京: 科学出版社 (Feng X Q, Cao Y P, Li B. 2017. *Surface Wrinkling Mechanics of Soft Materials*. Beijing: Science Press).
- 倪勇, 刘佩琳, 马龙, 李世琛, 何陵辉. 2018. 基底上薄膜结构的非线性屈曲力学进展. *固体力学学报*, **39**: 113-138 (Ni Y, Liu P L, Ma L, Li S C, He L H. 2018. Nonlinear buckling mechanics of film-substrate systems: Recent progress. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, **39**: 113-138).
- 胡海岩. 2016. 太阳帆航天器的关键技术. *深空探测学报*, **3**: 334-344 (Hu H Y. 2016. Key technologies of solar sail spacecraft. *Journal of Deep Space Exploration*, **3**: 334-344).
- 彭福军, 谢超, 张良俊. 2017. 面向空间应用的薄膜可展开结构研究进展及技术挑战. *载人航天*, **23**: 427-439 (Peng F J, Xie C, Zhang L J. 2017. Advancement and technical challenges of deployable membrane structure in space application. *Manned Spaceflight*, **23**: 427-439).
- 杜星文, 王长国, 万志敏. 2006. 空间薄膜结构的褶皱研究进展. *力学进展*, **36**: 187-199 (Du X W, Wang C G, Wan Z M. 2006. Advances of the study on wrinkles of space membrane structures. *Advances in Mechanics*, **36**: 187-199).
- 王长国, 杜星文, 万志敏. 2007. 空间薄膜结构褶皱的数值模拟最新研究进展. *力学进展*, **37**: 389-397 (Wang C G, Du X W, Wan Z M. 2007. Advances in the numerical investigations on wrinkles in space membrane structures. *Advances in Mechanics*, **37**: 389-397).

- Allen H G. 1969. Analysis and Design of Structural Sandwich Panels. New York: Pergamon Press.
- Audoly B, Boudaoud A. 2008. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—Part I: formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **56**: 2401-2421.
- Auguste A, Yang J, Jin L, Chen D, Suo Z, Hayward R C. 2018. Formation of high aspect ratio wrinkles and ridges on elastic bilayers with small thickness contrast. *Soft Matter*, **14**: 8545-8551.
- Bao W, Miao F, Chen Z, Zhang H, Jang W, Dames C, Lau C N. 2009. Controlled ripple texturing of suspended graphene and ultrathin graphite membranes. *Nature Nanotechnology*, **4**: 562-566.
- Bažant Z P. 2000. Structural stability. *International Journal of Solids and Structures*, **37**: 55-67.
- Ben Amar M, Jia F. 2013. Anisotropic growth shapes intestinal tissues during embryogenesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **110**: 10525-10530.
- Bende N P, Evans A A, Innes-Gold S, Marin L A, Cohen I, Hayward R C, Santangelo C D. 2015. Geometrically controlled snapping transitions in shells with curved creases. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **112**: 11175-11180.
- Biot M A. 1963. Surface instability of rubber in compression. *Applied Scientific Research*, **12**: 168-182.
- Bowden N, Brittain S, Evans A G, Hutchinson J W, Whitesides G W. 1998. Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric polymer. *Nature*, **393**: 146-149.
- Brau F, Vandeparre H, Sabbah A, Poulard C, Boudaoud A, Damman P. 2011. Multiple-lengthscale elastic instability mimics parametric resonance of nonlinear oscillators. *Nature Physics*, **7**: 56-60.
- Breid D, Crosby A J. 2013. Curvature-controlled wrinkle morphologies. *Soft Matter*, **9**: 3624-3630.
- Budday S, Andres S, Steinmann P, Kuhl E. 2015b. Primary and secondary instabilities in soft bilayered systems. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **15**: 281-282.
- Budday S, Kuhl E, Hutchinson J W. 2015a. Period-doubling and period-tripling in growing bilayered systems. *Philosophical Magazine*, **95**: 3208-3224.
- Budday S, Steinmann P, Goriely A, Kuhl E. 2015. Size and curvature regulate pattern selection in the mammalian brain. *Extreme Mechanics Letter*, **4**: 193-198.
- Cai S, Breid D, Crosby A J, Suo Z, Hutchinson J W. 2011. Periodic patterns and energy states of buckled films on compliant substrates. *Journal of the Mechanics Physics of Solids*, **59**: 1094-1114.
- Cao G, Chen X, Li C, Ji A, Cao Z. 2008. Self-assembled triangular and labyrinth buckling patterns of thin films on spherical substrates. *Physical Review Letters*, **100**: 036102-1-036102-4.
- Cao Y, Hutchinson J W. 2012. Wrinkling phenomena in neo-Hookean film/substrate bilayers. *Journal of Applied Mechanics*, **79**: 031019-1-031019-9.
- Cerda E, Mahadevan L. 2003. Geometry and physics of wrinkling. *Physical Review Letters*, **90**: 074302-1-074302-4.
- Cerda E, Ravi-Chandar K, Mahadevan L. 2002. Wrinkling of an elastic sheet under tension. *Nature*, **419**: 579-580.
- Chen P Y, Liu M, Wang Z, Hurt R H, Wong I Y. 2017. From flatland to space land: higher dimensional patterning with two-dimensional materials. *Advanced Materials*, **29**: 1605096-1-1605096-31.
- Chen X, Hutchinson J W. 2004. Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates. *Journal of Applied Mechanics*, **71**: 597-603.
- Chen X, Yin J. 2010. Buckling patterns of thin films on curved compliant substrates with applications to morphogenesis and three-dimensional micro-fabrication. *Soft Matter*, **6**: 5667-5680.
- Cheng Z, Xu F. 2021. Intricate evolutions of multiple-period post-buckling patterns in bilayers, *Science China: Physics, Mechanics & Astronomy*, **64**: 214611-1-214611-10.
- Chung J Y, Nolte A J, Stafford C M. 2011. Surface wrinkling: A versatile platform for measuring thin-film properties. *Advanced Materials*, **23**: 349-368.
- Ding M, Xu F, Wang T, Fu C. 2021. Nanosleeves: Morphology transitions of infilled carbon nanotubes. *Journal of the*

- Mechanics and Physics of Solids*, **152**: 104398-1-104398-19.
- Efimenko K, Rackaitis M, Manias E, Vaziri A, Mahadevan L, Genzer J. 2005. Nested self-similar wrinkling patterns in skins. *Nature Materials*, **4**: 293-297.
- Friedl N, Rammerstorfer F G, Fischer F D. 2000. Buckling of stretched strips. *Computers and Structures*, **78**: 185-190.
- Fu C, Wang T, Xu F, Huo Y, Potier-Ferry M. 2019. A modeling and resolution framework for wrinkling in hyperelastic sheets at finite membrane strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **124**: 446-470.
- Fu C, Xu F, Huo Y. 2018. Photo-controlled patterned wrinkling of liquid crystalline polymer films on compliant substrates. *International Journal of Solids and Structures*, **132-133**: 264-277.
- Genzer J, Groenewold J. 2006. Soft matter with hard skin: from skin wrinkles to templating and material characterization. *Soft Matter*, **2**: 310-323.
- Healey T J, Li Q, Cheng R B. 2013. Wrinkling behavior of highly stretched rectangular elastic films via parametric global bifurcation. *Journal of Nonlinear Science*, **23**: 777-805.
- Hu X, Dou Y, Li J, Liu Z. 2019. Buckled structures: fabrication and applications in wearable electronics. *Small*, **15**: 1804805-1-1804805-26.
- Huang Z Y, Hong W, Suo Z. 2005. Nonlinear analyses of wrinkles in a film bonded to a compliant substrate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **53**: 2101-2118.
- Irvine W T M, Vitelli V, Chaikin P M. 2010. Pleats in crystals on curved surfaces. *Nature*, **468**: 947-951.
- Janssens S D, Sutisna B, Giussani A, Vázquez-Cortés D, Fried E. 2020. Boundary curvature effect on the wrinkling of thin suspended films. *Applied Physics Letters*, **116**: 193702-1-193702-5.
- Jacques N, Potier-Ferry M. 2005. On mode localization in tensile plate buckling. *Comptes Rendus Mecanique*, **333**: 804-809.
- Jia F, Pearce S P, Goriely A. 2018. Curvature delays growth-induced wrinkling. *Physical Review E*, **98**: 033003-1-033003-11.
- Jiang H, Khang D Y, Song J, Sun Y, Huang Y, Rogers J A. 2007. Finite deformation mechanics in buckled thin films on compliant supports. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **104**: 15607-15612.
- Jiang Y, Korpas L M, Raney J R. 2019. Bifurcation-based embodied logic and autonomous actuation. *Nature Communications*, **10**: 128-1-128-10.
- Khang D Y, Jiang H, Huang Y, Rogers J A. 2006. A stretchable form of single-crystal silicon for high-performance electronics on rubber substrates. *Science*, **311**: 208-212.
- Kim T Y, Puntel E, Fried E. 2016. Numerical study of the wrinkling of a stretched thin sheet. *International Journal of Solids and Structures*, **49**: 771-782.
- Li B, Cao Y P, Feng X Q, Gao H. 2012. Mechanics of morphological instabilities and surface wrinkling in soft materials: A review. *Soft Matter*, **8**: 5728-5745.
- Li B, Jia F, Cao Y P, Feng X Q, Gao H. 2011. Surface wrinkling patterns on a core-shell soft sphere. *Physical Review Letters*, **106**: 234301-1-234301-4.
- Li Q, Han X, Hou J, Yin J, Jiang S, Lu C. 2015. Patterning poly (dimethylsiloxane) microspheres via combination of oxygen plasma exposure and solvent treatment. *Journal of Physical Chemistry B*, **119**: 13450-13461.
- Li Q, Healey T J. 2016. Stability boundaries for wrinkling in highly stretched elastic sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **97**: 260-274.
- Liang H, Mahadevan L. 2011. From the Cover: Growth, geometry, and mechanics of a blooming lily. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **108**: 5516-5521.
- Liu F, Xu F, Fu C. 2019. Orientable wrinkles in stretched orthotropic films. *Extreme Mechanics Letters*, **33**: 100579-1-100579-9.
- López Jiménez F, Stoop N, Lagrange R, Dunkel J, Reis P M. 2016. Curvature-controlled defect localization in elastic surface crystals. *Physical Review Letter*, **116**: 104301-1-104301-5.

- Luo Y, Xing J, Kang Z, Zhan J, Li M. 2020. Uncertainty of membrane wrinkling behaviors considering initial thickness imperfections. *International Journal of Solids and Structures*, **191-192**: 264-277.
- Luo Y, Xing J, Niu Y, Li M, Kang Z. 2017. Wrinkle-free design of thin membrane structures using stress-based topology optimization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **102**: 277-293.
- Ma L, Liu X, Soh A K, He L, Wu C, Ni Y. 2019. Growth of curved crystals: competition between topological defect nucleation and boundary branching. *Soft Matter*, **15**: 4391-4400.
- Mitchell N P, Koning V, Vitelli V, Irvine W T M. 2017. Fracture in sheets draped on curved surfaces. *Nature Materials*, **16**: 89-93.
- Ohzono T, Monobe H. 2012. Microwrinkles: shape-tunability and applications. *Journal of Colloid and Interface Science*, **368**: 1-8.
- Paulsen J D, Hohlfeld E, King H, Huang J, Qiu Z, Russell T P, Menon N, Vella D, Davidovitch B. 2016. Curvature-induced stiffness and the spatial variation of wavelength in wrinkled sheets. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **113**: 1144-1149.
- Pezzulla M, Stoop N, Steranka M P, Bade A J, Holmes D P. 2018. Curvature-induced instabilities of shells. *Physical Review Letters*, **120**: 048002-1-048002-5.
- Pikul J H, Li S, Bai H, Hanlon R T, Cohen I, Shepherd R F. 2017. Stretchable surfaces with programmable 3D texture morphing for synthetic camouflaging skins. *Science*, **358**: 210-214.
- Pocivavsek L, Dellsy R, Kern A, Johnson S, Lin B, Lee K Y C, Cerda E. 2008. Stress and fold localization in thin elastic membranes. *Science*, **320**: 912-916.
- Pocivavsek L, Pugar J, O'Dea R, Ye S H, Wagner W, Tzeng E, Velankar S, Cerda E. 2018. Topography-driven surface renewal. *Nature Physics*, **14**: 948-953.
- Poncharal P, Wang Z L, Ugarte D, de Heer W A. 1999. Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes. *Science*, **283**: 1513-1516.
- Puntel E, Deseri L, Fried E. 2011. Wrinkling of a stretched thin sheet. *Journal of Elasticity*, **105**: 137-170.
- Rafsanjani A, Jin L, Deng B, Bertoldi K. 2019. Propagation of pop ups in kirigami shells. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **116**: 8200-8205.
- Reis P M, Brau F, Damman P. 2018. The mechanics of slender structures. *Nature Physics*, **14**: 1150-1151.
- Reis P M. 2015. A perspective on the revival of structural (in) stability with novel opportunities for function: From buckliphobia to buckliphilia. *Journal of Applied Mechanics*, **82**: 111001-1-111001-4.
- Rodríguez-Hernández J. 2015. Wrinkled interfaces: taking advantage of surface instabilities to pattern polymer surfaces. *Progress in Polymer Science*, **42**: 1-41.
- Siefert E, Reyssat E, Bico J, Roman B. 2019. Bio-inspired pneumatic shape-morphing elastomers. *Nature Materials*, **18**: 24-28.
- Sipos A A, Fehér E. 2016. Disappearance of stretch-induced wrinkles of thin sheets: a study of orthotropic film. *International Journal of Solids and Structures*, **97-98**: 275-283.
- Song J, Jiang H, Huang Y, Rogers J A. 2009. Mechanics of stretchable inorganic electronic materials. *Journal of Vacuum Science & Technology A*, **27**: 1107-1125.
- Stoop N, Lagrange R, Terwagne D, Reis P M, Dunkel J. 2015. Curvature-induced symmetry breaking determines elastic surface patterns. *Nature Materials*, **14**: 337-342.
- Sultan E, Boudaoud A. 2008. The buckling of a swollen thin gel layer bound to a compliant substrate. *Journal of Applied Mechanics*, **75**: 051002-1-051002-5.
- Sun J Y, Xia S, Moon M W, Oh K H, Kim K S. 2012. Folding wrinkles of a thin stiff layer on a soft substrate. *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*, **468**: 932-953.
- Tallinen T, Chung J Y, Rousseau F, Girard N, Lefèvre J, Mahadevan L. 2016. On the growth and form of cortical

- convolutions. *Nature Physics*, **12**: 588-593.
- Tan Y, Yan J, Chu Z. 2019. Thermal-shrinking-induced ringpatterned boron nitride wrinkles on carbon fibers. *Carbon*, **152**: 532-536.
- Taylor, M, Shirani, M, Dabiri, Y, Guccione, J M, Steigmann, D J. 2019. Finite elastic wrinkling deformations of incompressible fiber-reinforced plates. *International Journal of Engineering Science*, **144**: 103138-1-103138-21.
- Terwagne D, Brojan M, Reis P M. 2014. Smart morphable surfaces for aerodynamic drag control. *Advanced Materials*, **26**: 6608-6611.
- Vandeparre H, Piñeirua M, Brau F, Roman B, Bico J, Gay C, Bao W, Lau C N, Reis P M, Damman P. 2011. Wrinkling hierarchy in constrained thin sheets from suspended graphene to curtains. *Physical Review Letters*, **106**: 224301-1-224301-4.
- van der Heijden A M A. 2009. W.T. Koiter's Elastic Stability of Solids and Structures. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wang C G, Liu Y P, Lan L, Li L, Tan H F. 2016. Post-wrinkling analysis of a torsionally sheared annular thin film by using a compound series method. *International Journal of Mechanical Sciences*, **110**: 22-33.
- Wang T, Fu C, Xu F, Huo Y, Potier-Ferry M. 2019. On the wrinkling and restabilization of highly stretched sheets. *International Journal of Engineering Science*, **136**: 1-16.
- Wang T, Yang Y, Fu C, Liu F, Wang K, Xu F. 2020. Wrinkling and smoothing of a soft shell. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **134**: 103738-1-103738-20.
- Xu F, Abdelmoula R, Potier-Ferry M. 2017. On the buckling and post-buckling of core-shell cylinders under thermal loading. *International Journal of Solids and Structures*, **126-127**: 17-36.
- Xu F, Koustawa Y, Potier-Ferry M, Belouettar S. 2015. Instabilities in thin films on hyperelastic substrates by 3D finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, **69-70**: 71-85.
- Xu F, Potier-Ferry M. 2017. Quantitative predictions of diverse wrinkling patterns in film/substrate systems. *Scientific Reports*, **7**: 18081-1-18081-10.
- Xu F, Potier-Ferry M, Belouettar S, Cong Y. 2014. 3D finite element modeling for instabilities in thin films on soft substrates. *International Journal of Solids and Structures*, **51**: 3619-3632.
- Xu F, Potier-Ferry M. 2016. On axisymmetric/diamond-like mode transitions in axially compressed core-shell cylinders. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **94**: 68-87.
- Xu F, Fu C, Yang Y. 2020a. Water affects morphogenesis of growing aquatic plant leaves. *Physical Review Letters*, **124**: 038003-1-038003-6.
- Xu F, Zhao S, Lu C, Potier-Ferry M. 2020b. Pattern selection in core-shell spheres. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **137**: 103892-1-103892-14.
- Xu F, Zhao S. 2020. Thermal wrinkling of liquid crystal polymer shell/core spheres. *Extreme Mechanics Letters*, **40**: 100860-1-100860-11.
- Yamaki N. 1984. Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells. North Holland, Amsterdam.
- Yan D, Chang J, Zhang H, Liu J, Song H, Xue Z, Zhang F, Zhang Y. 2020. Soft three-dimensional network materials with rational bio-mimetic designs. *Nature Communications*, **11**: 1180-1-1180-11.
- Yan D, Zhang K, Peng F, Hu G. 2014. Tailoring the wrinkle pattern of a microstructured membrane. *Applied Physics Letters*, **105**: 071905-1-071905-4.
- Yang X, Zhao Y, Xie J, Han X, Wang J, Zong C, Ji H, Zhao J, Jiang S, Cao Y, Lu C. 2016. Bioinspired fabrication of free-standing conducting films with hierarchical surface wrinkling patterns. *ACS Nano*, **10**: 3801-3808.
- Yang Y, Dai H H, Xu F, Potier-Ferry M. 2018. Pattern transitions in a soft cylindrical shell. *Physical Review Letters*, **120**: 215503-1-215503-5.

- Yang Y, Fu C, Xu F. 2020. A finite strain model predicts oblique wrinkles in stretched anisotropic films. *International Journal of Engineering Science*, **155**: 103354-1-103354-14.
- Yin J, Chen X, Sheinman I. 2009. Anisotropic buckling patterns in spheroidal film/substrate systems and their implications in some natural and biological systems. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **57**: 1470-1484.
- Yin J, Han X, Cao Y, Lu C. 2014. Surface wrinkling on polydimethylsiloxane microspheres via wet surface chemical oxidation. *Scientific Reports*, **4**: 5710-1-5710-8.
- Yuan H, Wu K, Zhang J, Wang Y, Liu G, Sun J. 2019. Curvature-controlled wrinkling surfaces for friction. *Advanced Materials*, **31**: 1900933-1-1900933-6.
- Zhang C, Hao Y K, Li B, Feng X Q, Gao H. 2018. Wrinkling patterns in soft shells. *Soft Matter*, **14**: 1681-1688.
- Zhao S, Xu F, Fu C, Huo Y. 2019. Controllable wrinkling patterns on liquid crystal polymer film/substrate systems by laser illumination. *Extreme Mechanics Letters*, **30**: 100502-1-100502-12.
- Zhao S, Xu F, Fu C, Huo Y. 2021. Oblique wrinkling patterns on liquid crystal polymer core-shell cylinders under thermal load. *International Journal of Solids and Structures*, **208-209**: 181-193.
- Zhao Y, Cao Y, Feng X Q, Ma K. 2014. Axial compression-induced wrinkles on a core-shell soft cylinder: Theoretical analysis, simulations and experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **73**: 212-227.
- Zhao Y, Han X, Li G, Lu C, Cao Y, Feng X Q, Gao H. 2015. Effect of lateral dimension on the surface wrinkling of a thin film on compliant substrate induced by differential growth/swelling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **83**: 129-145.
- Zhao Y, Zhu H, Jiang C, Cao Y, Feng X Q. 2020. Wrinkling pattern evolution on curved surfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **135**: 103798-1-103798-15.
- Zheng L. 2009. Wrinkling of dielectric elastomer membranes. [PhD Thesis] Pasadena, USA: California Institute of Technology.
- Zhu J, Zhang X, Wierzbicki T. 2018. Stretch-induced wrinkling of highly orthotropic thin film. *International Journal of Solids and Structures*, **139-140**: 238-249.

(责任编辑: 胡更开)

Curvature-affected instabilities in membranes and surfaces: A review

XU Fan* YANG Yifan WANG Ting

Institute of Mechanics and Computational Engineering, Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University, Shanghai 200433, China

Abstract Instability of soft materials and membrane structures usually shows similar wrinkling patterns across length scales, which has aroused considerable interest in the past twenty years. Curvature and mechanics are intimately connected in thin-film structures, and curvature plays a key role in the critical threshold, mode selection, and post-buckling evolution. Here, we review the advancement of instability mechanics of thin-film structures in the past two decades, from planar to curved geometry, focusing on the curvature-affected instability of stretched membranes and film-substrate systems under various stimuli. Development of the theoretical models and numerical methods of finite strain plate/shell advances fundamental understanding, quantitative prediction, and tracking of multiple bifurcation transitions in morphology and shape of thin-film structures. It not only promotes the in-depth insight into instability mechanism but also guides wrinkle-resistant control and the effective design of morphology-related multifunctional surfaces and membrane structures via harnessing instability.

Keywords thin films, curvature, wrinkling, bifurcation, large deformation



徐凡, 复旦大学教授、博导. 中国力学学会青年工作委员会委员、中国力学学会软物质力学、微纳米力学工作组组员、上海市力学学会常务理事. 主要从事软物质与柔性结构力学、薄膜力学和智能材料力学研究. 工作以第一/通讯作者发表于《PRL》(封面)《JMPS》《Nature Biomed. Eng.》《Adv. Funct. Mater.》《IJSS》《IJES》《CMAME》《EML》《Sci. China Phys. Mech. Astron.》等国内外学术期刊, 成果被《Nature》《Nature Phys.》和《Nature Comput. Sci.》《Nature Biomed. Eng.》等专题评论报道.

Received: 26 December 2020; accepted: 19 April 2021; online: 1 May 2021

* E-mail: fanxu@fudan.edu.cn

© 2021 *Advances in Mechanics*.