

# 碰撞振动及其典型现象\*

金栋平 胡海岩

南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016

**摘 要** 综述了机械系统碰撞振动的近期研究成果和碰撞振动的某些典型现象. 对碰撞振动的几何与数值分析, 以及实验研究作了评述, 内容侧重于稳定性、奇异性、擦边诱发分叉, 非线性模态等问题. 最后, 指出了今后研究中面临的一些问题.

**关键词** 碰撞振动, 擦边, 奇异性, 模态

## 1 引言

对于现代机电系统, 内部或边界上的间隙通常使系统产生碰撞振动, 即零部件间或零部件与边界间的往复碰撞. 例如: 机器人操作器与环境接触和脱离过程中总有碰撞, 这会影响操作器的正常工作, 甚至引起能量传递以及零部件的失灵<sup>[1,2]</sup>; 机械传动副因碰撞会产生高频噪音, 航天器伸展系统由于关节间隙导致传动误差而要求较高的碰撞控制策略<sup>[3]</sup>.

深入研究间隙引起的碰撞振动, 一方面是要在其设计阶段把握其动力学特性, 避免后继阶段的大挫折, 另一方面是要抑制振动. 目前各种被动、主动或半主动阻尼器的作用就是抑制系统共振. 但传统阻尼器的设计是针对线性振动, 而不是非线性的碰撞振动. 由于碰撞振动系统是复杂的非线性动力学系统, 对它的研究既有理论难度又有重要工程实际意义. 因此, 该研究近年来得到了普遍关注.

## 2 碰撞振动分析

人们对碰撞振动的研究已有近 50 年的历史. 早期研究主要针对涡轮机叶片<sup>[4]</sup>、机翼<sup>[5]</sup>和机床的碰撞阻尼, 系统模型是具有刚性约束的单自由度系统. 人们曾提出了一些理论方法<sup>[6]</sup>和碰撞模型<sup>[7]</sup>来确定碰撞恢复系数, 发展了相应的实验技术<sup>[6]</sup>和模拟计算机仿真方法<sup>[8]</sup>. 1981 年, Peterka<sup>[9]</sup>综述了这些早期研究成果, 这一时期关于碰撞振动的专著陆续出版<sup>[10~13]</sup>. 80 年代以来, 随着非线性动力系统理论、动态测试技术和计算机技术的发展, 人们对碰撞振动的研究进入了一个新的阶段<sup>[14]</sup>.

与冲击动力学中研究的碰撞相比, 本文涉及的是低速、反复碰撞, 碰撞模型要有很高精度方能正确描述长时间历程的非线性碰撞振动. 根据对碰撞模型的不同假设, 现有两种不同的分

收稿日期: 1997-11-26, 修回日期: 1998-12-28

\* 国家自然科学基金 (59572024) 和国家教委跨世纪优秀人才基金资助项目

析方法：(1) 刚性碰撞. 假设碰撞在瞬息完成，通过恢复系数描述撞击过程前后碰撞体的速度阶跃和能耗而不考虑撞击过程的细节. 基于这种模型的分析包括碰撞前和碰撞后两部分，本文称之为“间断分析”. (2) 弹性碰撞. 假设撞击过程需一定时间完成，用无质量弹簧-阻尼器描述碰撞体相互作用时的变形和能耗. 由于分析中包括了接触-变形-恢复-脱离连续变化的实际碰撞过程，本文称之为“连续分析”.

## 2.1 间断分析

间断分析模型使用恢复系数  $r \in [0, 1]$  可以直接得到碰撞前后速度之间的关系. 考虑一个间隙量为  $a$  的单自由度碰撞系统

$$\ddot{q} = f(t, q, \dot{q}, \mu) \quad (1)$$

其中  $q$  是系统位移， $f$  是周期为  $2\pi$  的可微函数， $\mu$  是系统的控制参数. 假设碰撞在瞬间完成，则碰撞前后位移与速度应满足

$$\begin{cases} q^+ = q^- \\ \dot{q}^+ = -r\dot{q}^- \end{cases} \quad q = a \quad (2)$$

我们从系统的某状态  $q(0)$ ， $\dot{q}(0)$  和激励相位  $\theta$  出发（令此时  $t = 0$ ），根据式 (2) 计算碰撞后的速度与发生碰撞的时间  $t_s$ ，碰撞后重新令起始时间  $t = 0$  和相位  $\theta_{\text{碰撞后}} = (\theta + \omega t_s)_{\text{碰撞前}}$ ，如此不断重复上述过程即知系统全部状态.

这种分析方法认为物体碰撞后的速度取决于系统的构造和初始速度，与撞击力无关. 例如，刚硬球体间的碰撞可归入此列. 研究的主要问题是确定各种周期碰撞振动，分析其稳定性和分叉. 具体采用的研究手段有：

- (1) 解析方法—例如 Kobrinskii<sup>[11,12]</sup>和 Shaw<sup>[15~17]</sup>，
- (2) 近似方法—例如 Babitskii<sup>[18]</sup>，
- (3) 数值方法—例如 Natsiavas<sup>[19]</sup>和 Thompson<sup>[20]</sup>，
- (4) 模拟方法—例如 Peterka<sup>[8,21]</sup>，
- (5) 实验方法—例如 Tuffillaro, Albano<sup>[22]</sup>和 Kowalik<sup>[23]</sup>。

从 60 年代起，Masri 等人对多种冲击消振器的对称与非对称周期运动的存在和稳定性进行了理论与实验研究<sup>[24,25]</sup>，发现了对称与非对称周期运动的相互转化现象<sup>[26,27]</sup>. Holmes<sup>[28]</sup>首次用数学方法证实了简化的弹跳小球碰撞模型存在倍化序列与马蹄现象，揭示了碰撞中的混沌存在. 接着 Shaw 和 Holmes<sup>[15~17]</sup>又从现代动力系统观点研究了简谐激励下有约束的振子，特别是刚度无限大时的冲击振子；用中心流形定理分析了周期响应的局部分叉、通过同宿相截条件讨论了混沌运动. Moon 和 Shaw<sup>[29]</sup>设计了基础简谐激励下含单侧刚性约束的悬臂梁实验，成功地证实了刚性约束振子的混沌响应. 这些工作奠定了现代动力系统理论在碰撞振动研究中的重要地位. 此后，很多学者沿用这种基于几何观点的数值方法来研究碰撞动力学问题. 文 [30] 用 Melnikov 方法研究了倒摆与两面刚性壁碰撞的一次和二次分叉，借助稳定流形与不稳定流形在 Poincare 截面上的切点来推断系统存在任意周期的运动.

光滑动力系统的 Poincare 映射在对应周期运动的不动点处可微，用线性化映射和奇异性理论就可分别进行稳定性分析和局部分叉分析. 然而，碰撞振动系统 Poincare 截面的截取方法会使映射在某些区域产生奇异性. Whiston<sup>[31,32]</sup>在研究简谐激励下无阻尼线性冲击振子时，首先应用奇异性理论研究了擦边碰撞的 Poincare 映射不可微性，以及由此引起的全局稳定流形的碎

化问题, 说明碰撞振动的复杂运动形式与擦边现象具有内在联系. Ivanov<sup>[33]</sup>对碰撞振动系统的稳定性和分叉理论作了进一步描述, 并将 Floquet 理论拓宽到碰撞振子系统.

在低速碰撞时, 碰撞系统会发生擦边 (如图 1 所示) 引起的一类特殊分叉 —  $C$ -分叉现象, 与连续系统的分叉不同, 其 Floquet 乘子是系统参数的不连续函数, 几种典型的  $C$ -分叉运动如图 2 所示.

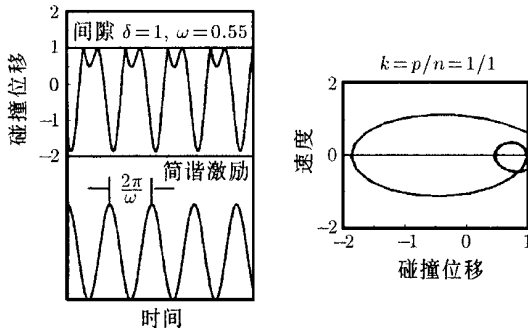


图 1 主共振的擦边现象

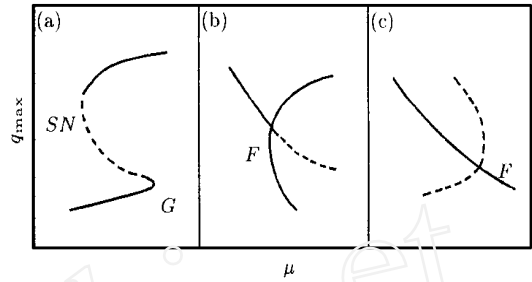


图 2 不同的  $C$ -分叉

(a)  $SN$ : 鞍结分叉,  $G$ : 擦边分叉; (b) (c) Flips  
— 稳定运动, --- 不稳定运动

Nordmark<sup>[34]</sup>根据局部奇异性分析, 提出一种近似映射描述这种分叉. Foale<sup>[35]</sup>通过数值仿真和实验研究了具有对称刚性约束振子的周期运动擦边问题, 认为擦边诱发的局部分叉可类比于光滑动力系统的局部分叉. Ivanov<sup>[36]</sup>进一步研究了如何使周期解在擦边前后保持稳定. 为了把  $C$ -分叉还原到普通型分叉, 他提出了具有粘弹性的冲击振子模型<sup>[33,37]</sup>. Ivanov<sup>[38]</sup>使用一般接触力模型从理论上对碰撞的二次分叉进行了分析. Peterka<sup>[39]</sup>通过理论分析、模拟仿真和数值手段研究了具有粘滞阻尼的碰撞振子中擦边分叉、倍周期分叉、鞍结分叉之间的转迁现象.

谢建华<sup>[40,41]</sup>研究了弹簧-质量系统撞击无限大板的 Hopf 分叉和余维 2 分叉问题以及振动锤的全局性问题. Dimentberg<sup>[42]</sup>则研究了白噪声和非白噪声随机激励下的碰撞振动系统.

在碰撞动力学理论体系不断充实的同时, van der Spek<sup>[43]</sup>尝试用光滑动力系统的数值方法来解决具有非连续性的碰撞问题, 应用各种胞映射方法研究了一零刚度滑动振子的吸引子和吸引域, 指出: 在非连续动力系统中胞映射方法同样有效.

上述研究中模型仅有一个自由度, 在实际应用上多自由度系统显然更有价值. Sung<sup>[44]</sup>用数值方法研究了基础受简谐力激励的两自由度冲击振动系统, 证实了其经倍周期瀑布通向混沌. 舒仲周<sup>[45~47]</sup>等通过对双质体或多质体系统隔振与稳定性研究, 推广了自治动力学系统的拓扑理论, 提出了振动和稳定性的统一分析方法. 最近, 曹登庆等<sup>[48]</sup>研究了多自由度质量-弹簧系统的周期运动及鲁棒稳定性.

具有摩擦的碰撞系统也受到了重视<sup>[49~51]</sup>. Li<sup>[52]</sup>通过解析和数值结合研究了具有干摩擦转盘系统的碰撞现象, 计算了其 Lyapunov 指数. 值得一提的是 Meijaard<sup>[53]</sup>把经典 Hopf 分叉理论拓展到了碰撞系统. Cusumano<sup>[54]</sup>介绍了 10 自由度碰撞振子的数值仿真研究, 系统由弹簧-阻尼器彼此相连组成, 根据碰撞 Poincare 映射获得了分叉结果.

在连续体方面, Yigit<sup>[55]</sup>使用动量平衡方法, 通过数值与实验研究了旋转梁对刚性柱面的撞击动力学响应.

在空间机器人系统中, 支撑在柔性展开结构上的刚性操作手由于关节回转、以及它与支持

结构之间的动力耦合，在它与周围环境产生冲击接触时会发生未知的运动，Yoshida 等<sup>[56]</sup>对这类刚柔结合的空间操作系统的碰撞问题作了分析。

## 2.2 连续分析

含弹性部件或弹性约束的碰撞系统需要考虑撞击时间以及波的传播问题。本文侧重于关心碰撞接触力连续但非光滑，可用无质量弹簧-阻尼器描述的碰撞系统。关于以塑性铰和有限元等模型描述的撞击系统可参见 Nikravesh<sup>[57]</sup>，Dias<sup>[58]</sup>和 Haug<sup>[59]</sup>的论文，涉及波的碰撞问题参见文 [60, 61]。

在碰撞接触期间，基于这种模型的系统运动方程可以表示为

$$\ddot{q} = f(t, q, \dot{q}, \mu) + R(q, \dot{q}) \quad (3)$$

其中  $R(q, \dot{q})$  为接触面之间的应力与应变函数，它可以借助 Kelvin-Voigt 模型、Maxwell 模型或 Hertz 定理来描述。例如当研究低速碰撞而不涉及接触面的永久变形时，可以采用的一种 Hertz 接触力模型为

$$R(q, \dot{q}) = K(q - a)^n + D\dot{q} \quad (4)$$

式中 Hertz 弹性系数与位移函数分别为

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{4}{3(h_i + h_j)} \left[ \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \right]^{1/2} \\ D &= \mu(q - a)^n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

这里，材料参数为  $h_i = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}$ ,  $i = i, j$ ;  $E_i, \nu_i$ ， $R_i$  为接触面材料的杨氏模量、泊松比和撞击处局部表面曲率半径，滞后阻尼因子  $\mu$  可以根据碰撞过程的能耗确定（如图 3 所示）。

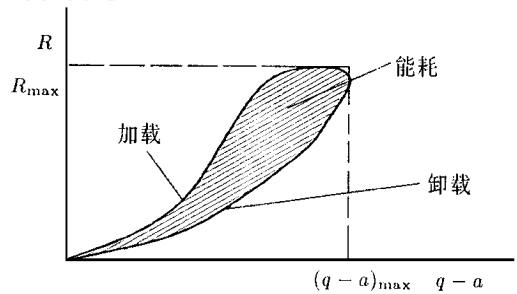


图 3 具有滞后阻尼的 Hertz 接触力与变量的关系

Dubowsky<sup>[62]</sup>曾使用线性粘滞阻尼器与 Hertz 弹簧来模拟碰撞接触过程，缺陷是：开始碰撞时阻尼力非零，碰撞恢复期合力为负。在某些情况下（如高速碰撞时），线性粘滞阻尼器模型失效，为此 Lee<sup>[63]</sup>提出非线性阻尼模型。文 [64] 在柔性悬转梁碰撞分析中说明，使用非线性阻尼模型获得了与实验一致的结果。Yigit<sup>[65]</sup>基于同样的碰撞模型研究了在刚-柔结合的操作器中柔性对碰撞动力学的作用，进一步表明该模型具有其实用价值。这种基于 Hertz 定律和阻尼函数来描述的碰撞过程在碰撞振动的连续分析中得到普遍应用<sup>[66]</sup>。此外，在工程中常使用线性化的撞击力模型。Kahraman<sup>[67]</sup>线性化碰撞接触力，通过数值方法研究了齿轮传动系统的频响特性和非线性动力学现象。最近，Lankarani<sup>[68]</sup>根据局部变形和接触力连续假设，提出了低速与导致局部塑性的高速碰撞的接触力模型，并将之用于多体系统的碰撞分析。

关于连续系统，van Campen<sup>[69]</sup>使用胞映射方法研究了经有限元离散、具有非线性支撑的两端固支梁的碰撞振动。van de Vorst<sup>[70]</sup>分析了周期激励下梁的碰撞周期运动及其稳定性。Yigit<sup>[71]</sup>基于线性弹-塑性接触定律获得了横向碰撞的组合梁的稳态响应。金栋平等<sup>[72]</sup>以多项式逼近 Hertz 理论描述的接触力使得碰撞振动得以近似解析分析。Cusumano<sup>[73]</sup>研究了自由端受到激励的悬臂柔性梁碰撞振动的空间内聚现象，通过计算机数据采集系统获得以激励频率为参数的分叉图，说明 99% 以上的响应是由一阶特征正交模态捕获的。

关于存在随机因素的碰撞振动系统, Jing<sup>[74,75]</sup>精确求解了具有间隙的单自由度碰撞振动系统随机响应的闭合解. 他使用 Hertz 理论描述接触, 激励为具有零均值的高斯过程, 发现当间隙是对应于线性系统均方响应的两倍时, 可以忽视接触现象. Lin<sup>[76]</sup>分析了基础存在随机性的碰撞系统. Bernard<sup>[77]</sup>研究了多自由度受白噪声激励下结构的随机响应.

注意到弹性约束系统的向量场具有分段光滑特性. 胡海岩<sup>[78,79]</sup>分析了非光滑性对 Poincare 映射可微性的影响, 指出: 当周期运动接近鞍结及其退化分叉或以很低速度穿过两线性区的切换面时, 会发生类似于刚性约束系统周期轨道的擦边分叉现象, 系统的动力学行为显著有别于具有光滑向量场的系统.

在模态动力学方面, Zuo<sup>[80]</sup>首先探讨了分段线性系统的模态运动, 针对内含间隙的回转系统, 使用 Floquet 理论和 Poincare 映射来研究非光滑系统的非线性模态的稳定性和分叉问题. 在此基础上 Chen<sup>[81]</sup>利用动力系统不变流形的概念提出了构造分段线性系统非线性模态的一般过程, 其研究表明, 模态、模态动力学和幅-频关系都具有分段型式.

间断分析与连续分析的碰撞模型各异, 因此将不同程度地影响物理系统的非线性动力学状态, Foale<sup>[82]</sup>应用理论和数值方法, 通过对比两种模型引起的分叉行为对此作了阐述.

### 3 数值方法

数值方法在碰撞振动研究中起着重要作用, 其关键问题是要能高效、高精度的计算碰撞过程. 对于一次低速碰撞动力学, 研究深度和软件规模已比较接近工程实际. 1971 年, 美国军方支持开发了计算机软件 CRASH 来模拟飞行器坠毁的碰撞动力学, 此后不断得到改版. Kimsey<sup>[83]</sup>讨论了碰撞动力学的并行算法和数据结构. Liao<sup>[84]</sup>应用局部混合的三维有限元方法分析了受到横向冲击的叠层板的动力学响应, 使用 Hertz 接触定律描述接触力, 用 Newmark 直接积分有限元方程, 在每一开始时步用 Newton-Raphson 方法求解碰撞时的接触力.

对于往复碰撞振动, 研究尚限于一些简单模型. Hu<sup>[85]</sup>指出打靶法不适于刚性约束系统, 提出对系统瞬态运动曲线拟合求取周期碰撞振动. Wang 等<sup>[86]</sup>采用分段解析解与打靶法相结合提高计算弹性约束系统周期振动的精度和效率. Johnson<sup>[87]</sup>进行了单自由度冲击振动系统的计算机分析. Tsai<sup>[88]</sup>研究了具有间隙、受到支撑激励的悬臂梁的非线性响应, 提出了两种方法即力积分和模态传递方法来计算系统的动态响应. Padmanabhan<sup>[89]</sup>通过参数延续技术研究了含间隙系统的非线性动力学问题.

在  $n$  个激励周期中, 若两物体碰撞  $p$  次, 则称其碰撞振动形式为  $k = p/n$  型碰撞. Jin 等<sup>[90]</sup>对两部件碰撞系统进行了数值研究, 表明系统存在丰富的碰撞行为 (如图 4 所示).

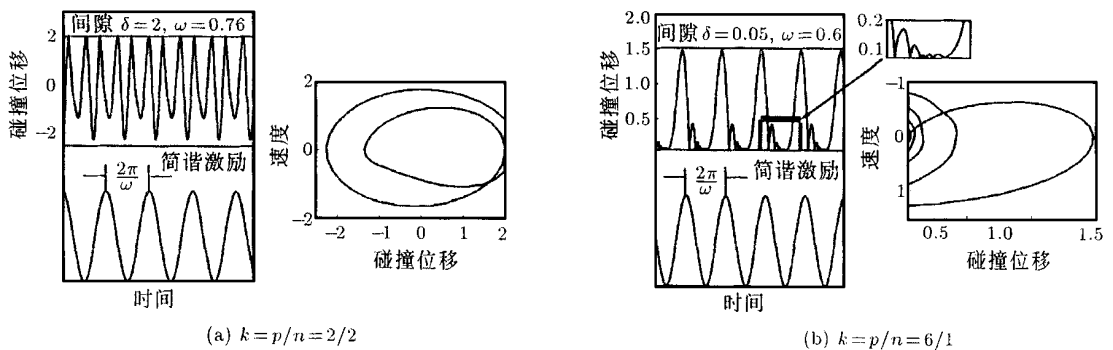


图 4  $k = p/n$  型碰撞现象

## 4 实验研究

Daugela<sup>[91]</sup>应用多层压电传感-激振器测量了局部接触区的机械阻抗,得到动力学响应与接触阻抗成正比例。Antunes<sup>[92]</sup>报告了热交换器导管在气弹不稳定性作用下往复碰撞的实验结果,表明系统存在多种与理论分析一致的稳态运动。朱文骅等<sup>[93]</sup>在刚性约束单悬臂梁的弯曲振动实验中,观测到周期倍化和奇怪吸引子。Lin<sup>[94]</sup>对分段线性的单和两自由度碰撞机械系统,实验研究了激励参数对混沌运动的影响。Gonsalves<sup>[95]</sup>将内含间隙具有弹性支撑的转子简化为两自由度碰撞系统,在较大参数空间里考察了系统状态的分叉现象。Bishop<sup>[96]</sup>借助恢复系数的低维数学模型来模拟梁与限制器的碰撞,着重研究了低速碰撞下系统响应的局部和全局结构。

在应用方面,Pfeiffer<sup>[97]</sup>测试了机器人操作臂与环境的碰撞响应。日本铁路技术研究所(RTRI)选用特征频率作为判断桥基完好性的一个指标,提出了碰撞振动测试方法<sup>[98]</sup>。日本铁路公司据此获得了大量数据,通过回归分析建立了关于结构性能的一个判据。Nelson<sup>[99]</sup>叙述了用无损碰撞振动技术确定现代复合材料弹性常数的综合方法。

## 5 结束语

笔者认为,今后的碰撞振动研究将面临下述问题:

(1) 碰撞振动理论研究:这涉及许多非光滑、非连续的碰撞动力学问题,包括非光滑映射的奇异性理论、非光滑或间断向量场的范式理论、分段系统的模态理论等新问题。

(2) 计算和数值仿真:突出的障碍在于系统维数。例如,对碰撞系统临界情况的数值仿真精度要求很高,而接缝法这类半解析半数值的高精度方法难以推广到多自由度系统。研究全局动力学的胞映射方法也受到系统维数的限制。而含有数百个间隙的航天结构则需要工程化的近似计算方法。

(3) 实验研究:一方面,随着机电产品微型化、工况复杂化,碰撞力的测量和建模难度大大提高。放大比例的模型实验能否真实反映实际系统动力学成为问题。另一方面,巨型空间结构包含上百个间隙,其非线性振动实验的工作量和难度都远远超出现有实验条件。

(4) 动力学控制:碰撞振动的分段特性导致了一些控制策略的分段,影响了其鲁棒性。基于神经网络的系统建模与控制则有望提供一类光滑控制策略逼近,改善控制效果。这对于控制混沌同样具有意义。此外,利用碰撞振动特性,有可能发展新的振动半主动控制技术<sup>[100]</sup>。

(5) 柔性部件间的碰撞振动问题:目前只能基于部件的低阶模态近似将系统降维后分析,且多限于弱非线性。忽略的高阶模态对碰撞、特别是弱碰撞和擦边分叉的影响尚待分析和评价。

(6) 含随机因素的碰撞振动系统:已有研究多针对单自由度、受弹性约束的碰撞振动系统,多自由度弹性或刚性约束的随机系统碰撞振动问题尚未见研究。

## 参 考 文 献

- 1 胡建元,黄心汉,陈锦江. 机器人的力控制和顺应控制研究进展. 机器人, 1992, 14 (2): 52 ~ 57
- 2 Stepanenko Y, Sankar T S. Vibro-impact analysis of control systems with mechanical clearance and its application to robotics actuators. *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, 1986, 108 (1): 9 ~ 16
- 3 Moon F C, Li G X. Experimental study of chaotic vibrations in a pin-jointed space truss structure. *AIAA Journal*, 1990, 28 (5): 915 ~ 921
- 4 Paget A. Vibration of steam-turbine buckets and damping by impact. *Engineering*, 1937, 19 (111)
- 5 Lieber P, Jensen D. An acceleration damper: development, design and some applications. *Transactions of ASME*, 1945, 67: 523 ~ 530
- 6 Kobrinskii A E. Mechanism with Elastic Couplings. Moscow: Nauka, 1964

- 7 Hunt K H, Crossley F R E. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42 (2) : 440 ~ 445
- 8 Peterka F. Simulation of vibroimpact systems motion by analogue computer. *Automatizace*, 1965, 9: 235 ~ 237
- 9 Peterka F. Introduction to Vibration of Mechanical Systems with Internal Impacts. Prague: Academia, 1981
- 10 Goldsmith W. Impacts. London: Edward Arnold, 1960
- 11 Kobrinskii A E, Kobrinskii A A. Vibroimpact Systems. Moscow: Nauka, 1973
- 12 Kobrinskii A A, Kobrinskii A E. Two-dimensional Vibroimpact Systems. Moscow: Nauka, 1981
- 13 Brash R M. Mechanical Impact Dynamics. New York: John Wiley & Sons, 1991
- 14 胡海岩. 分段光滑机械系统动力学的进展. *振动工程学报*, 1995, 8 (4) : 331 ~ 341
- 15 Shaw S W, Holmes P J. A periodically forced piecewise linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1983, 90 (1) : 129 ~ 155
- 16 Shaw S W. Dynamics of harmonically excited systems having rigid amplitude constraints. Part I Subharmonic motions and local bifurcations. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, 52 (2) : 453 ~ 458
- 17 Shaw S W. Dynamics of harmonically excited systems having rigid amplitude constraints. Part II Chaotic motions and global bifurcations. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, 52 (2) : 459 ~ 464
- 18 Babitskii V I. Theory of Vibroimpacts Systems. Moscow: Nauka, 1978
- 19 Natsiavas S. Stability and bifurcation analysis for oscillator with motion limiting constraints. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 141 (1) : 97 ~ 102
- 20 Thompson J M T. Complex dynamics of compliant off-shore structures. *Proc Roy Soc London A*, 1983, 387: 407 ~ 427
- 21 Peterka F. Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 154 (1) : 95 ~ 115
- 22 Tuffillaro N B, Albano A M. Chaotic dynamics of a bouncing ball. *American Journal of Physics*, 1985, 54 (10) : 939 ~ 944
- 23 Kowalik Z J, Franaszek M, Pieranski P. Self-reanimating chaos in the bouncing-ball system. *Physical Review A*, 1988, 37 (10) : 4016 ~ 4022
- 24 Masri S F. Analytical and experimental studies of impact damper. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, 45: 1111 ~ 1117
- 25 Masri S F. Steady-state response of a multidegree system with an impact damper. *Journal of Applied Mechanics*, 1973, 30 (3) : 127 ~ 132
- 26 Masri S F and Caughey T K. On the stability of the impact damper. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, 23 (3) : 586 ~ 592
- 27 Masri S F. General motion of impact damper. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, 47: 229 ~ 237
- 28 Holmes P J. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, 84 (2) : 173 ~ 189
- 29 Moon F C, Shaw S W. Chaotic vibrations of a beam with nonlinear boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1983, 18 (6) : 465 ~ 477
- 30 Shaw S W, Rand R H. The transition to chaos in a simple mechanical system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1989, 24 (1) : 41 ~ 56
- 31 Whiston G S. Global dynamics of vibroimpacting linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, 118 (3) : 395 ~ 429
- 32 Whiston G S. Singularities in vibroimpact dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 152 (3) : 427 ~ 460
- 33 Ivanov A P. Impact oscillations: linear theory of stability and bifurcations. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 178 (3) : 361 ~ 378
- 34 Nordmark A B. Nonperiodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 145 (2) : 279 ~ 297
- 35 Foale S, Bishop S R. Bifurcations in impact oscillators: theory and experiments. In: Thompson J M T, Bishop S R, eds. Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics. London: John Wiley & Sons, 1994
- 36 Ivanov A P. Stabilization of an impact oscillator near grazing incidence owing to resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 162 (3) : 562 ~ 565
- 37 A . . . . .  $\partial$  . . . . .  $u$  . . . . .  $u$  ,  
1994, 58 (3) : 63 ~ 70

- 38 Ivanov A P. Bifurcation in impact systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1996, 7 (10) : 1615 ~ 1634
- 39 Peterka F. Bifurcation and transition phenomena in an impact oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1996, 7 (10) : 1635 ~ 1647
- 40 Xie Jianhua. Codimension two bifurcations and the Hopf bifurcations of an impacting vibrating system. *Applied Mathematics and Mechanics* (English Edition), 1996, 17 (1) : 65 ~ 75
- 41 谢建华. 振动锤的数学模型与全局分叉. *力学学报*, 1997, 29 (4) : 456 ~ 463
- 42 Dimentberg M. Pseudolinear vibroimpact systems: non-white random excitation. *Nonlinear Dynamics*, 1996, 9 (2) : 327 ~ 332
- 43 van der Spek J A W, et al. Application of cell mapping methods to a discontinuous dynamic system. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 6 (1) : 285 ~ 299
- 44 Sung C K, Yu W S. Dynamics of a harmonically excited impact damper: bifurcations and chaotic motion. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158 (2) : 317 ~ 329
- 45 Shu Zhongzhou. Motion types and chaos of multi-body systems vibrating with impacts. *Acta Mechanica Sinica* (English Series), 1991, 7 (4) : 369 ~ 375
- 46 舒仲周. 有碰撞存在的多体振动系统的周期运动和稳定条件. *振动工程学报*, 1990, 3 (3) : 42 ~ 51
- 47 舒仲周, 圣小珍. 双质体碰撞振动的自动隔振和完全稳定. *机械工程学报*, 1990, 26 (3) : 50 ~ 57
- 48 曹登庆, 舒仲周. 存在间隙的多自由度系统的周期运动及 Robust 稳定性. *力学学报*, 1997, 29 (1) : 74 ~ 83
- 49 Glocker C H, Pfeiffer F. Multiple impacts with friction in rigid multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 7 (4) : 471 ~ 497
- 50 Blazejczyk Okolewska B, Kapitaniak T. Dynamics of impact oscillator with dry friction. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1996, 7 (9) : 1455 ~ 1459
- 51 Han I, Gilmore B J. Multi-body impact motion with friction; analysis, simulation, and experimental validation. *Journal of Mechanical Design*, 1993, 115 (3) : 412 ~ 422
- 52 Li G X, Paidoussis M P. Impact phenomena of rotor-casing dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 5 (1) : 53 ~ 70
- 53 Meijaard J P. A mechanism for the onset of chaos in mechanical systems with motion-limiting stops. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1996, 7 (10) : 1649 ~ 1658
- 54 Cusumano J P, Bai B Y. Period-infinity periodic motions, chaos, and spatial coherence in a 10 degree of freedom impact oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1993, 3 (5) : 515 ~ 535
- 55 Yigit A S, Scott R A, Ulsoy A G. Dynamics of a radially rotating beam with impact, part 1: theoretical and computational model; part 2: experimental and simulation results. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1990, 112 (1) : 65 ~ 77
- 56 Yoshida K, Mavroidis C, Dubowsky S. Impact dynamics of space manipulators mounted on a flexible structure. In: International Conference on Dynamics and Control of Structures in Space, SPACE 1996. Computational Mechanics Inc, Billerica, 1996. 117 ~ 132
- 57 Nikravesh P E, Chung I S. Structural collapse and vehicular crash simulation using hinge technique. *Journal of Structural Mechanics*, 1984, 12 (3) : 371 ~ 400
- 58 Dias J P, Pereira M S. Dynamics of flexible mechanical systems with contact-impact and plastic deformations. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 8 (4) : 491 ~ 512
- 59 Haug E, Ulrich D. The PAM-CRASH code as an efficient tool for crashworthiness simulation and design. In: Heller M, ed. Proceedings of the 2nd European Crash/ Trucks Simulation Symposium. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 74 ~ 87
- 60 Gau W H, Shabana A A. Effect of finite rotation on the propagation of elastic waves in constrained mechanical systems. *Journal of Mechanical Design*, 1992, 114 (1) : 384 ~ 393
- 61 邢誉峰, 诸德超. 用模式识别法识别结构弹性碰撞载荷的可行性. *力学学报*, 1995, 27 (5) : 560 ~ 566
- 62 Dubowsky S, Gardner T N. Dynamic interactions of link elasticity and clearance connections in planar mechanical systems. *Journal of Engineering for Industry*, 1975, 97B (2) : 652 ~ 661
- 63 Lee T W, Wang A C. On the dynamics of intermittent-motion mechanisms, part 1: Dynamic model and response. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1983, 105 (3) : 534 ~ 540
- 64 Yigit A S, Ulsoy A G, Scott R A. Spring-dashpot models for the dynamics of a radially rotating beam with impact. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142 (3) : 515 ~ 525
- 65 Yigit A S. The effect of flexibility on the impact response of a two-link rigid-flexible manipulator. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 177 (3) : 349 ~ 361
- 66 Marghitu D B, Hurmuzlu Y. Nonlinear dynamics of an elastic rod with frictional impact. *Nonlinear Dynamics*, 1996, 10 (2) : 187 ~ 201



- 67 Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 144 (3): 469 ~ 506
- 68 Lankarani H M, Nikravesh P E. Continuous contact force modes for impact analysis in multibody systems. *Non-linear Dynamics*, 1994, 5 (2): 193 ~ 207
- 69 van Campen D H et al. Dynamics of a multi-DOF beam system with discontinuous support. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 8 (4): 453 ~ 466
- 70 van de Vorst E L B, van Campen D H, de Kraker A, Fey R H B. Periodic solutions of a multi-DOF beam system with impact. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 192 (5): 913 ~ 925
- 71 Yigit A S, Christoforou A P. Impact dynamics of composite beams. *Composite Structures*, 1995, 32 (1): 187 ~ 195
- 72 金栋平, 胡海岩. 基于 Hertz 接触模型的柔性梁碰撞振动分析. *振动工程学报*, 1998, 11 (1): 46 ~ 51
- 73 Cusumano J P, Sharkady M T, Kimble B W. Spatial coherence measurements of a chaotic flexible beam impact oscillator. In: *Aerospace Structures: Nonlinear Dynamics and System Response*, ASME, Aerospace Division. New York: ASME, 1993. 13 ~ 22
- 74 Jing H S, Sheu K C. Exact stationary solutions of the random response of a single-degree-of-freedom Vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 141 (3): 363 ~ 373
- 75 Jing H S, Young M H. Random response of a single-degree-of-freedom vibro-impact system with clearance. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1990, 19 (6): 789 ~ 798
- 76 Lin S Q, Bapat C N. Estimation of clearances and impact forces using vibroimpact response: random excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 163 (3): 407 ~ 421
- 77 Bernard P, Taazount M. Random dynamics of structures with gaps: simulation and spectral linearization. *Non-linear Dynamics*, 1994, 5 (3): 313 ~ 335
- 78 胡海岩. 分段线性系统动力学的非光滑分析. *力学学报*, 1996, 28 (4): 483 ~ 488
- 79 Hu H Y. Detection of grazing orbits and incident bifurcations of a forced continuous, piecewise-linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 187 (3): 485 ~ 493
- 80 Zuo L, Curnier A. Nonlinear real and complex modes of continuous linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 174 (3): 289 ~ 313
- 81 Chen Shyh-Leh, Shaw S W. Normal modes for piecewise linear vibratory systems. *Nonlinear Dynamics*, 1996, 10 (2): 135 ~ 164
- 82 Foale S, Bishop S R. Bifurcation in impact oscillations. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 6: 285 ~ 299
- 83 Kimsey K D, Olson M A. Parallel computation of impact dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 119 (1): 113 ~ 121
- 84 Liao C L, Tsai J S. Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact using a partial mixed 3D finite element. *Computers and Structures*, 1994, 53 (1): 53 ~ 61
- 85 Hu H Y. Numerical scheme of locating the periodic response of non-smooth non-autonomous systems of high dimension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 123 (1): 53 ~ 62
- 86 Wang Fuxin, Hu Haiyan. Calculating accurate periodic solution of piecewise-linear systems. *Transaction of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 1996, 13 (2): 142 ~ 146
- 87 Johnson R I. Computer analysis of impact-induced vibration in single degree of freedom systems. In: *International Conference on Structures Under Shock and Impact*, Computational Mechanics Inc. Udine, Italy: Billerica, 1996. 267 ~ 274
- 88 Tsai Hsiang-Chuan, Wu Ming-Kuen. Methods to compute dynamic response of a cantilever with a stop to limit motion. *Computers and Structures*, 1996, 58 (5): 859 ~ 867
- 89 Padmanabhan C, Singh R. Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 184 (1): 35 ~ 58
- 90 Jin Dongping, Hu Haiyan. Periodic impacting motions and their stability of a dual component system. *Acta Mechanica Sinica (English Series)*, 1997, 13 (4): 366 ~ 376
- 91 Daugela A, Fujii H, Kulvietis G, Uematsu H. Measurement of the contact impedance of polymers using a multi-layered piezo vibroimpactor. In: *Proceedings of the International Symposium on Micro Machine and Human Science*, IEEE. Nagoya, Jpn: Piscataway, 1994. 161 ~ 165
- 92 Antunes J, Axisa F, Vento M A. Experiments on vibro-impact dynamics under fluidelastic instability. *Flow-Induced Vibration 1990* American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division. New York: ASME 1990. 189: 127 ~ 138
- 93 朱文骅, 许跃敏, 叶贵如. 非线性边界约束下梁的弯曲振动. *固体力学学报*, 1990, 11 (2): 181 ~ 189
- 94 Lin R M, Ewins D J. Chaotic vibration of mechanical systems with backlash. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1993, 7 (3): 257 ~ 272

- 95 Gonsalves D H, Neilson R D, Barr A D S. A study of the response of a discontinuously nonlinear rotor system. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 7 (4): 451 ~ 470
- 96 Bishop S R, Thompson M G, Foale S. Prediction of period-1 impacts in a driven beam. *Proc Roy Soc London A*, 1996, 452: 2579 ~ 2592
- 97 Pfeiffer F. Friction and impact induced vibrations in machines. In: *Nonlinear Dynamics and Controls*, Proceedings of ASME Annual Meeting, 1996, DE-91. 33 ~ 39
- 98 Nishimura A. Examination of bridge substructure for integrity. *Japanese Railway Engineering*, 1990, 114 (1): 13 ~ 17
- 99 Nelson M F, Wolf J A J. Nondestructive technique for determining the elastic constants of advanced composites. In: *Vibro-Acoustic Characterization of Materials and Structures* American Society of Mechanical Engineers, Noise Control and Acoustics Division. New York: ASME, 1992. 14: 227 ~ 233
- 100 Hu Haiyan. Semi-active vibration control based upon a vibration absorber with adjustable clearance. *Transaction of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 1996, 13 (2): 135 ~ 141

## VIBRO-IMPACTS AND THEIR TYPICAL BEHAVIORS OF MECHANICAL SYSTEMS

Jin Dongping      Hu Haiyan

Institute of Vibration Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

**Abstract** This paper surveys the recent advances in the field of vibro-impacts of mechanical systems and presents some of their typical behaviors. The review is made on the geometrical and numerical analyses and the experimental studies of the vibro-impacting systems, with the emphasis laid on the stability, singularity, grazing bifurcations and nonlinear modes. Finally, some open problems for further study are addressed.

**Key words** vibro-impact, grazing, singularity, mode