第 29 卷　第 2 期
1999 年 5 月 25 日
力　学　进　展
ADVANCES IN MECHANICS
Vol. 29　No. 2
May 25, 1999

柔性多体系统动力学的若干热点问题 *

于　清　洪嘉振
上海交通大学工程力学系，上海　200030

摘　要　全面综述了柔性多体系统动力学近年来的研究成果. 对建模方法、模态选取及模态综合、动力刚化及柔性多体系统动力学中微分 - 代数方程的数值方法等研究热点进行了详细的阐述，并简要展望了柔性多体系统动力学今后的发展趋势.

关键词　柔性多体系统动力学，建模方法，模态，模态综合，动力刚化，微分-代数方程，数值方法

1　前　言

柔性多体系统动力学研究由刚体和柔性体组成的复杂机械系统在经历大范围空间运动时的动力学行为，是多刚体系统动力学的自然延伸和发展. 它主要研究柔性体的变形与其大范围空间运动之间的相互作用或相互耦合，以及这种耦合所导致的动力学效应. 柔性体的变形运动与柔性体大范围空间运动的同时出现及其相互耦合是柔性多体系统动力学的本质特征，这个特征使其动力学模型不仅区别于多刚体系统动力学，也区别于结构动力学，是两者的结合与推广. 柔性多体系统动力学是与经典动力学、结构动力学、控制理论及计算机技术紧密相联的一门新兴交叉学科，在航空航天、机器人、高速机构及车辆等各个领域有着广泛的应用，成为目前理论和应用力学最活跃的分支之一.

虽然柔性多体系统动力学的模型可分别退化为多刚体系统动力学模型和结构动力学模型，但并非二者的简单结合. 柔性体大范围空间运动与其弹性变形之间耦合的机理仍需深入研究，且这种耦合给动力学建模及数值计算带来了许多困难，使柔性多体系统与上述两种系统有本质不同的动力学特性. 如何更为准确、高效地建立柔性多体系统的动力学模型，如何对柔性体进行模态选取与模态综合，如何处理柔性体经历大范围空间运动时的动力刚化问题，以及针对柔性多体系统动力学数学模型的数值方法的研究是柔性多体系统动力学的研究热点. 本文主要针对上述问题进行详细深入的评述，以期较为全面地反映近年来国内外柔性多体系统动力学的研究现状.

2　柔性多体系统动力学的建模方法

柔性多体系统动力学的建模方法同多刚体系统动力学相似，也可分为绝对坐标和相对坐标

收稿日期：1997-09-21，修回日期：1998-02-24
*国家自然科学基金和教育部高等学校博士点专项科研基金资助项目

两种方法，所不同的是在每种方法中均引入了有限元节点坐标或模态坐标以表示柔性体的变形. A. A. Shabana 等[1]用绝对坐标法建立了柔性多体系统的动力学模型，该方法用一致质量有限元方法对柔性体进行离散，柔性体的大范围转动用 Euler 四元数来描述. 绝对坐标方法具有程式化好、编程方便的优点，许多学者[2,3]的建模方法与此类似. 但该方法广义坐标和约束方程较多，计算工作量较大，尤其对大型复杂系统，计算效率较差. E. J. Haug 在用铰相对坐标建立多刚体系统动力学模型[4]的基础上，根据矢量变分方法（Variational-Vector Calculus Method）[5]和虚功原理，采用铰相对坐标加模态坐标的方法，建立了开环及含闭环的柔性多体系统的动力学模型[6,7]. 该方法对柔性体用集中质量有限元方法进行离散，用 Euler 四元数描述柔性体的大范围转动. 相对坐标方法具有动力学方程广义坐标和约束方程少、计算效率高的优点，但是程式化较绝对坐标方法差.

潘振宽、洪嘉振和刘延柱等[8,9]根据 Jourdain 变分原理，建立了绝对坐标下单柔体的动力学方程，利用递推关系，提出了相对坐标形式的树形柔性多体系统动力学的单向递推组集建模方法，并将其发展到含闭环的柔性多体系统中[10,11]. 该方法充分利用了绝对坐标方法建模的程式化形式，以单向递推组集的方法建立系统的动力学方程，具有较高的计算效率. 对于闭环系统，该方法建立了绝对坐标下的切断铰约束库，利用递推关系将其转换到铰相对坐标和模态坐标上，得到了微分 - 代数形式的闭环柔性多体系统动力学方程.

3 模态选取及模态综合

在柔性多体系统动力学中，如何描述柔性体的变形是非常重要的. 最初的做法是直接将有限元节点坐标作为柔性体变形的广义坐标，这种做法的缺点是动力学方程中广义坐标的数目庞大，对于复杂的大型结构，这种做法使得数值积分几乎不可能进行. 为此需要引入结构动力学中的坐标缩聚技术，使用少量的模态坐标代替节点坐标以降低动力学方程的求解规模. 传统的做法是选取若干低阶的正则模态作为模态函数，可直接由有限元方法得到，且用正则模态得到的模态质量阵和模态刚度阵均为对角阵，减少了仿真计算的工作量. 但正则模态是通过特征值分析得到的，只能较好地解决自由振动问题，而柔性体的变形是在外力、惯性力及联结铰约束反力等动载荷作用下的强迫振动问题，模态的选取必须考虑到动载荷的大小及其频率特性. W. S. Yoo[12]数值实验的结果表明：当柔性体上存在较大的非结构附加质量或联接铰中存在较大的动约束反力时，必须选取较多的正则模态（特别是高阶模态）来描述柔性体的变形，这使得模态坐标阵的维数和广义坐标数目增大，不利于动力学仿真计算.

为了解决上述问题，W. S. Yoo[13]、于清和洪嘉振[11]将结构动力学中的静力校正模态引入到柔性多体系统动力学中. 其原理为在柔性体受较大动载荷和外力的节点坐标上施加单位力，将由此得到的静变形作为模态坐标阵的一部分. 因正则模态可较好地解决自由振动问题，静力校正模态能够反映柔性体在较大动载荷作用下引起的变形，类似于非齐次常微分方程解的构造，可在变形模态阵中同时选取正则模态和少量的静力校正模态，通过 Gram-Schmidt 正交化方法，使它们相互正交. 柔性体的变形可表示为

$$u = \boldsymbol{\Psi}_n \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{\Psi}_s \boldsymbol{a}_s \tag{1}$$

其中 Ψ_n 和 Ψ_s 为正则模态坐标阵及静力校正模态坐标阵，分别由特征值分析和静力分析得到，$\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}_s$ 为与之对应的模态坐标. 柔性体的变形模态坐标阵 Ψ 为

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\Psi}_n \quad \boldsymbol{\Psi}_s] \tag{2}$$

此时的模态质量阵 M^m 及模态刚度阵 K^m 分别为

$$M^m = \Psi^{\mathrm{T}} M \Psi = \begin{bmatrix} I_{nn} & 0 \\ 0 & \Psi_s^{\mathrm{T}} M \Psi_s \end{bmatrix}, \quad K^m = \Psi^{\mathrm{T}} K \Psi = \begin{bmatrix} \Lambda_{nn} & 0 \\ 0 & \Psi_s^{\mathrm{T}} K \Psi_s \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中 M 和 K 分别为柔性体的质量阵和刚度阵，Λ_{nn} 为一对角阵，其元素为与 Ψ_n 对应的特征值. W. S. Yoo[12]较详细讨论了静力校正模态选取的方法，但指出静力校正模态的选取无严格的规律可循，绝大多数情况下还得依靠经验.

S. H. Shin[14]对静力校正模态在动力学仿真中的应用进行了进一步的讨论，指出：如果由式 (3) 定义的模态质量阵 M^m 中 $\Psi_s^{\mathrm{T}} M \Psi_s$ 矩阵对角元素的绝对值与单位值有数量级的差别，此时的模态质量阵是病态的. 为了解决这一问题，可将静力校正模态乘上适当的系数，以保证模态质量阵具有良好的数值性态. 另外，模态质量阵 M^m 和模态刚度阵 K^m 不一定是对角阵，这为动力学仿真带来了额外的工作量. 对此可进一步求解如下的特征值问题

$$\{K^m - \omega_i^2 M^m\} X_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{4}$$

特征向量 X_i 构成坐标变换阵 X 的列，于是可得到新的模态坐标阵 Φ

$$\Phi = \Psi X \tag{5}$$

可以看出，新的模态坐标阵 Φ 与 M 和 K 分别正交

$$\Phi^{\mathrm{T}} M \Phi = I_{mm}, \quad \Phi^{\mathrm{T}} K \Phi = \Lambda_{mm} \tag{6}$$

此时柔性体的弹性变形可表示为

$$u = \Phi a \tag{7}$$

H. T. Wu[15]分析了采用模态及模态坐标的方法描述柔性体的变形时引入的截断误差. 设使柔性体变形的动载荷为 F，其中包括外力、D'Alembert 惯性力及联接铰动约束反力三部分，截断误差 $R(t)$ 为

$$\begin{aligned} R(t) &= F - M\Psi\Psi^{\mathrm{T}} F + M\Psi\Lambda_{mm} a - K\Psi a = \\ &(I_{mm} - M\Psi\Psi^{\mathrm{T}}) F - (K\Psi - M\Psi\Lambda_{mm}) a \end{aligned} \tag{8}$$

(8) 式中第一项为用缩聚的模态坐标阵 Ψ 表示动载荷 F 而引入的误差，一般说来，只使用正则模态不能减小此项误差，但选取静力校正模态可降低此项误差. (8) 式中第二项当仅选取全部的正则模态时可自动消失. 所以同时选取正则模态和静力校正模态作为变形模态坐标阵可降低截断误差，提高动力学仿真的效率.

一些学者[16,17]认为模态坐标阵应是时变的，其变化规律由作用在柔性体上的动载荷 $F(t)$ 决定，因此可引入结构动力学中的 Ritz 矢量作为描述柔性体变形的模态坐标阵. 其原理为在积分的每一时刻，根据动载荷的特性自动选取一时变的模态坐标阵描述柔性体的变形，使得截断误差较小. Ritz 矢量的计算可分为迭代和正交化两个过程，设所需的 Ritz 矢量个数为 k，具体求解步骤为：

(1) 第一阶 Ritz 矢量的计算及其正交化

$$K\phi_1' = F, \quad \phi_1^{\mathrm{T}} M \phi_1 = 1 \tag{9}$$

由 (9) 式可以看出，第一阶 Ritz 矢量为柔性体在 $F(t)$ 作用下的静变形.

(2) 高阶 Ritz 矢量的计算及其正交化：其迭代过程为

$$K\phi_i' = M\phi_{i-1} \quad (i = 2, \cdots, k) \tag{10}$$

正交化过程首先使需求解的 Ritz 矢量同已求得的 Ritz 矢量正交，使用 Gram-Schmirdt 方法

$$\phi_i'' = \phi_i' - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \phi_j, \quad c_j = \phi_j^{\mathrm{T}} M \phi_i' \quad (j = 1, \cdots, i-1) \tag{11}$$

然后使 ϕ_i 与质量阵 M 正交，即

$$\phi_i^{\mathrm{T}} \mathrm{M} \phi_i = 1 \tag{12}$$

H. F. Yeh[17]的研究表明用正则模态加少量的 Ritz 矢量作为变形模态坐标阵，截断误差 R(t) 较小，并分析了此时集中质量有限元方法同一致质量有限元方法的差别.

模态的选取是柔性多体系统动力学的一个关键问题，直接影响到动力学仿真的成功与否和计算精度及计算效率. 其发展趋势为不再仅使用正则模态来描述柔性体的弹性变形，而是同时选取正则模态和少量的修正模态来降低截断误差. 各种修正模态应充分应用有限元方法在预处理时的结果以减少仿真计算工作量，但如何准确选取修正模态及其阶数的多少仍是一个值得深入研究的问题.

4 动力刚化现象

动力刚化现象 (Dynamic Stiffening) 又称为应力刚度 (Stress Stiffening)、几何刚度 (Geometric Stiffening)、几何非线性 (Geometric Nolinearities)、运动诱发刚度 (Motion Induced Stiffening)、初始应力刚度 (Initial StressStiffening)[18]，已成为柔性多体系统动力学近几年的研究热点之一. 动力刚化现象的实质是作大范围空间运动的柔性体因运动和变形之间的相互耦合而导致的柔性体刚度的增大 (附加动力刚度). 传统的柔性多体系统动力学中，一般采用假设模态或线性有限元的方法来描述柔性体的变形，这种方法计算工作量小，在大部分情况下可满足工程实际的需要. 但对作高速运动的柔性多体系统，在一定的条件下传统的建模方法会导致数值仿真的发散. T. R. Kane[19]于 1987 年指出：当柔性体高速转动时，传统的柔性多体系统动力学模型计算出的柔性体的变形与实验结果相比明显偏大，表现为柔性体刚度的明显减弱. Zhang Dajun 等[20]的结果表明，当细长梁的转动频率达到或超过梁的基频时，传统柔性多体系统动力学模型得到的梁的变形趋于发散.

目前对动力刚化现象的分析方法可概括为以下几种典型的方法：

(1) 非线性有限元方法　在结构动力学非线性有限元方法的基础上，将柔性体的大范围空间运动及其弹性变形统一采用结点位移来表示，得到的动力学方程中包含了因柔性体的大应变而导致的动刚度矩阵. 利用这种方法可分析作平面转动的大应变梁[21]和矩形板[22]. 非线性有限元方法的优点是可充分应用现有的非线性有限元分析软件，但因系统的广义坐标为有限元结点坐标，由此得到的动力学方程广义坐标数目非常庞大，且需采用隐式迭代算法，由此计算效率较低，不适合分析大型的复杂系统.

(2) 附加刚度法　附加刚度法又称为附加运动刚度法或附加几何刚度法. 这种方法认为柔性体在做大范围空间运动时的变形是小变形大应变，变形和应变之间应为非线性关系. 如在柔性体的位移 - 应变关系中过早地进行线性化处理，得到的柔性体的刚度阵为常值阵，不能反映柔性体的刚度与运动状况及应力状态的关系. 应保留非线性的位移 - 应变关系，应用有限元方法得到因大范围空间运动引起的附加刚度.

平面细长梁[23]的位移-应变关系较为简单，因此对其动力刚化问题的研究也较为成熟，其刚度矩阵可表示为

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_0 + \mathrm{K}_S \tag{13}$$

其中 K_0 为通常的模态刚度阵，为常值阵，K_S 为几何非线性刚度阵（附加动刚度阵），是梁轴向应力的函数．I. Sharf[24]，C. Damaren[25]研究了空间梁，认为其刚度阵是变形广义坐标 α 的无穷级数．根据细长梁的位移 - 应变特性，刚度阵 K 可采用 Taylor 方法近似表达为

$$K(\alpha) = K_0 + \frac{1}{2!}K_G(\alpha) + \frac{1}{3!}K_B(\alpha) \tag{14}$$

其中 K_G 为 a 的线性函数，K_B 为 a 的二次函数，并且得到了 K_G，K_B 的显式表达式．J．F. Zhu[26]也从非线性的位移-应变关系出发，得到了均质薄板的动刚度矩阵，其结果较为繁琐．

对任意的柔性体，其 Green-Lagrange 形式的应变张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

ε 中的各元素可表示为

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{3} u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta} \right), \quad u_{\alpha,\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial c_\beta} \tag{16}$$

其中 c 为质点位置坐标．由（15）和（16）式可得到[27]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = L\dot{u}, \quad L \equiv L^0 + L^{1(u)} \tag{17}$$

L^0 和 $L^{1(u)}$ 分别由（16）式中的线性部分和非线性部分导致．柔性体的应力-应变关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^r + H\boldsymbol{\varepsilon} \tag{18}$$

$\boldsymbol{\sigma}^r$ 为初始应力[28]．应用模态和模态坐标描述柔性体的变形，由变形引起的内力为[29]

$$F_a^C = [K_0 + K_a]a + F_a^r \tag{19}$$

$$K_a = \int [L^0 \boldsymbol{\Psi}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}^r \mathrm{d}V, \quad F_a^r = \int [L^{1(\Psi a)} \boldsymbol{\Psi}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}^r \mathrm{d}V \tag{20}$$

其中 K_0 为常值的模态刚度阵，K_a 为动刚度矩阵．由（19），(20) 式可以看出，当考虑到非线性位移-应变关系后，柔性体的刚度增大，是其初始应力 $\boldsymbol{\sigma}^r$ 的函数．C. E. Padilla[30]也提出了任意形状柔性体的动刚度矩阵，其形式与（19）式相类似．对任意形状的柔性体，显然 K_a 无显式表达，必须借助有限元得到数值结果．因动刚度矩阵为变形广义坐标或应力的函数，因此在实际仿真过程中，积分的每一步必须重新拼装动刚度矩阵，工作量较大，不利于动力学仿真计算．O. Wallrapp[29]认为动力刚化现象实质上是柔性体的刚度随着其应力状态的变化而变化，除了大范围空间运动外，外力、约束反力也是引起动力刚化现象的因素，柔性体内部应力越大，其动力刚化现象越明显．因（20）式中动刚度与初始应力成线性关系，可应用有限元方法预先计算出与单位影响因素（惯性力、外力、铰约束反力）对应的单位动刚度矩阵，实际仿真计算中，就可以非常方便地得到柔性体的动刚度矩阵．如可预先计算柔性体沿某个方向转动时单位惯性力 $\bar{F}_a^r$ 产生的应力而导致的动刚度矩阵 $\bar{K}_a$，在仿真计算时惯性力 F_a^r 引起的动刚度矩阵就可方便地表示为

$$K_a = \bar{K}_a(\bar{F}_a^r)\, F_a^r \tag{21}$$

A. K. Banerjee[31]就柔性体大范围空间运动引起的运动诱发刚度矩阵提出了一种新的计算方法：在小变形和线弹性假设的前提下，预先将柔性体的动刚度矩阵分解为 12 个与运动学参数

有关的动刚度矩阵（考虑微元的转动效应时为 21 个），用有限元程序计算出柔性体在单位运动学参数作用下的单位动刚度矩阵．在实际仿真过程中，每个积分时刻只要用单位动刚度矩阵乘以柔性体大范围空间运动学量的幅值，就可得到其动刚度矩阵，极大地简化了仿真计算．

(3) 变形耦合方法　Zhang Dajun 等[32]认为柔性体刚度的减弱是由于在运动学关系中过早地对变形的广义坐标进行了线性化，忽略了导致刚度增加的非线性项．为了保留弹性变形的非线性特性，将柔性体的变形场用模态坐标的二阶小量描述，形成精确到二阶小量的运动学描述．设保留柔性体的前 s 阶模态，变形场可表示为

$$u_i = N_{ij}a_j + \frac{1}{2}N_{ipj}a_p a_j \quad (i = 1,2,3;\quad p,j = 1,\cdots,s) \tag{22}$$

其中，α 为模态坐标，N_{ij} 为传统的形函数，N_{ipj} 为耦合形函数．利用 Lagrangian 应变张量和小变形假设，可得到 N_{ipj} 的表达式为

$$N_{ipj} = -\int^{i} \frac{\partial N_{kp}}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial N_{kj}}{\partial \xi_i}\mathrm{d}\xi_i \quad (i = 1,2,3) \tag{23}$$

应用 Kane 方法，在偏线速度和偏角速度的计算时对模态坐标进行线性化处理，由此也可得到柔性体的动刚度矩阵．但此方法只对简单形状的柔性体如均质梁、均质板有效，对复杂形状的柔性体，(23) 式很难得到解析表达式，数值积分也较为困难．

(4) 子结构方法　S. C. Wu[33]，A. Q. Liu[34]提出了解决动力刚化问题的一种数值方法．将柔性体分为若干子结构，认为在子结构中柔性体的变形为小变形、小应变，位移 - 应变的线性化假设仍然成立．这样，应用已有的柔性多体系统动力学模型就可较好地解决动力刚化问题．在这种方法中，对内部子结构采用了约束模态以满足相容的位移边界条件，因此虽然子结构中的变形是线性的，但整体结构的变形是非线性的．这种方法的优点是对现有的柔性多体系统动力学模型和分析软件不作任何修改就可计及动力刚化效应，但其结果明显依赖子结构的数目，且在各子结构的对接面上必须引入约束方程以满足变形的连续性，对复杂的大型结构，此方法的计算工作量非常大．

动力刚化现象到目前为止，仍是柔性多体系统动力学研究的热点和难点，各种方法因在柔性体的变形或位移 - 应变关系中考虑了不同的附加非线性项，因此都可得到附加的刚度项．但柔性体的刚度与其大范围空间运动之间的内在联系以及导致动力刚化现象的根本原因仍是值得深入研究的课题．目前还没有一种非常通用和程式化的处理动力刚化问题的方法，适合大型通用柔性多体系统动力学仿真软件的开发．对动力刚化现象研究的趋势应是非常清楚的：即必须充分利用有限元技术，在动力学仿真的预处理阶段生成动刚度矩阵或与各种影响因素对应的单位动刚度矩阵，在仿真计算时只需根据柔性体的运动状态或应力状态对其进行简单的处理即可得到柔性体的动刚度矩阵，以最大限度地简化仿真计算．

5　柔性多体系统动力学微分 - 代数方程组的数值方法

受约束柔性多体系统的控制方程为动力学方程（微分方程）同约束方程（代数方程）联立求解的微分-代数混合方程，又称 DAE 方程（Differential Algebraic Equations）．据公认的分类术语[35]，DAE 方程为指标 3 问题，与常微分方程不同，在数值计算上存在困难．在仿真过程中随着误差的积累，约束方程的违约加剧，得到的解已不能表示受约束多体系统的真实运动，必须对约束方程的违约进行抑制，使数值积分得以顺利进行．微分 - 代数方程组的求解方法已成为目前多体系统动力学的难点问题，近二十年来国内外进行了大量的研究工作．目前的研究方法大体可分为两类：一种是从微分 - 代数方程组本身出发，利用现代数学的研究成果将约束

方程定义为流形，对微分 - 代数方程组进行降阶处理，将其转化为由约束方程定义的流形上的常微分方程[36]．这种方法的优点是可以直接应用求解常微分方程的技术，避免约束方程的违约．但在求解过程中必须计算由约束方程定义的流形零空间的基，计算工作量大，对复杂的多体系统，零空间基的计算缺乏成熟的方法，且有时并不唯一；另一种方法是在动力学方程中引入附加校正项，当约束方程产生违约时，对动力学方程进行校正[37]．目前的校正方法多为间接校正方法，不能对系统的广义坐标进行直接的校正以满足约束方程．另外，在动力学方程中加入附加校正项需给定校正系数，校正系数太小校正效果不明显，校正系数太大容易引起动力学方程的破坏．目前还没有校正系数的自动选取方法，大都凭经验选取校正系数．

对微分 - 代数方程组的求解方法在文献［38］中已进行了较详细的讨论，本文仅对近年来一些新的校正方法进行综述．

设受约束多体系统的广义坐标数为 n，系统受到 m 个独立的完整约束，约束方程的一般形式为

$$\Theta(y, t) = 0 \tag{24}$$

其中 y 为系统的广义坐标阵，速度形式和加速度形式的约束方程可分别表示为

$$\dot{\Theta}(y, \dot{y}, t) = \Theta_y \dot{y} - \eta = 0 \tag{25}$$

$$\ddot{\Theta}(y, \dot{y}, \ddot{y}, t) = \Theta_y \ddot{y} - \xi = 0 \tag{26}$$

其中 Θ_y 为约束方程的Jacobi 矩阵，η 和 ξ 分别为速度和加速度约束方程的右端项．受约束多体系统的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} Z & \Theta_y^T \\ \Theta_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix} \tag{27}$$

其中 Z，z 分别为系统的广义质量阵和广义力阵，μ 为拉格朗日乘子．在数值积分动力学方程（27）时，由于积分误差的影响，得到的 y 和 $\dot{y}$ 不能满足约束方程（24）和（25），即出现违约现象，必须加以校正．

5.1　位移约束方程、速度约束方程同时自动修正方法[39]

设积分步长为 h，在积分的第 $n+1$ 步对位移约束方程 Θ 进行 Taylor 展开，有

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + h\dot{\Theta}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{\Theta}_n + O(h^3) \tag{28}$$

若 y_n 满足

$$\ddot{\Theta}_n + \frac{h}{2}\dot{\Theta}_n + \frac{2}{h^2}\Theta_n = 0 \tag{29}$$

则恒有

$$\Theta_{n+1} = O(h^3) \tag{30}$$

即（29）式对位移约束方程有自动修正能力，修正后的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} Z & \Theta_y^T \\ \Theta_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \xi - \frac{2}{h}\dot{\Theta} - \frac{2}{h^2}\Theta \end{bmatrix} \tag{31}$$

方程（31）为稳定的微分方程．同 Baumgarte 约束稳定法[40]相比，有

$$\alpha = \frac{1}{h},\quad \beta = \frac{\sqrt{2}}{h} \tag{32}$$

即上述方法提供了 Baumgarte 约束稳定法中校正系数 α , β 的自动选取方法. 但上述方法仍未考虑速度约束方程的违约问题, 并可能进一步破坏速度约束方程. 为此可对位移约束方程和速度约束方程同时进行 Taylor 展开, 并且强制 $\Theta_{n+1} = O(h^3)$, $\dot{\Theta}_{n+1} = O(h^2)$, 可得到

$$\ddot{\Theta}_n = -\frac{2}{h}\dot{\Theta}_n, \quad \dot{\Theta}_n = -\frac{1}{h}\Theta_n \tag{33}$$

设 $W(y)$ 是约束 Jacobi 矩阵 Θ_y 零空间的一组基, 位移约束方程和速度约束方程同时修正后的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} W^{\mathrm{T}}Z & 0 \\ \Theta_y & 0 \\ 0 & W^{\mathrm{T}}Z \\ 0 & \Theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{\mathrm{T}}Z\dot{y} \\ -\frac{2}{h}\Theta \\ W^{\mathrm{T}}z \\ -\frac{1}{h}\dot{\Theta} \end{bmatrix} \tag{34}$$

$W(y)$ 的选取一般可通过对 Θ_y^{T} 进行 QR 分解得到, 但并不唯一.

5.2 广义坐标主动校正方法[41,42]

设积分到 $t = t_k$ 时得到广义坐标为 $\hat{y}_k$, 当约束方程的违约超过了给定的精度范围时, 可认为 $\Theta_k = \Theta(\hat{y}_k, t_k) \neq 0$. 此时需对 $\hat{y}_k$ 加入校正项 δy_k , 使 $\Theta(y_k, t_k) = 0$, 即

$$y_k = \hat{y}_k + \delta y_k \tag{35}$$

并且有

$$\Theta_k = \Theta(y_k, t_k) = \Theta(\hat{y}_k, t_k) + \delta\Theta_k = 0 \tag{36}$$

由 (36) 式可得到

$$\delta\Theta_k = -\Theta(\hat{y}_k, t_k) \tag{37}$$

这里 $\Theta(\hat{y}_k, t_k)$ 假设很小, 所以有

$$(\Theta_y)_k \delta y_k = -\Theta(\hat{y}_k, t_k) \tag{38}$$

由矩阵的广义逆理论, 应用 Θ_y 的 Moore-Penrose 广义逆 Θ_y^{+} , 此时方程 (38) 存在极小范数解

$$\delta y_k = -\Theta_y^{+}\Theta_k = -(\Theta_y)_k^{\mathrm{T}}\left[(\Theta_y)_k(\Theta_y)_k^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\Theta(\hat{y}_k, t_k) \tag{39}$$

将 δy_k 代入 (35) 式, 广义坐标 $\hat{y}_k$ 得到校正.

由 (39) 式得到的极小范数解有很明确的物理意义, 即 (39) 式不仅对系统的广义坐标进行了校正, 使约束方程得到满足, 而且因其具有极小范数, 意味着在违约得到校正的条件下, 极小范数解对广义坐标的校正幅度最小, 也就是对系统的动力学方程的破坏最小, 由此得到的广义坐标最接近系统的真实运动, 这对数值仿真是至关重要的. 这种主动校正方法的优点是可重复进行, 直到将约束方程的违约控制在任意规定的精度范围内. 对速度约束方程的违约可采用类似的方法.

微分-代数方程组的求解方法是多体系统动力学的一个难点, 目前仍无非常通用和程式化的方法. 但其发展趋势是校正方法应自动进行, 不需人工干预, 且违约校正不能以破坏系统的动力学方程为代价.

6 结束语

本文综述了柔性多体系统动力学近年来国内外的研究成果. 对柔性多体系统动力学的建模方法、模态的选取与模态综合、动力刚化现象以及柔性多体系统动力学微分 - 代数方程组的数值方法等研究重点进行了详细的阐述, 并对各研究重点今后的发展作了展望. 柔性多体系统动力学今后总的发展趋势应为: (1) 如何更好地同具体的工程问题相结合. (2) 如何面向当今飞速发展的计算机技术. (3) 如何将现代控制理论引入柔性多体系统动力学中以解决大型复杂柔性机构的控制问题. (4) 如何应用现代数学的研究成果.

参 考 文 献

1 Chen C, Shabana A A, Rismantab-Sany J. Generalized constraint and joint reaction forces in the inverse dynamics of spatial flexible mechanical systems. *Journal of Mechanical Design*, 1994, 116: 777～784

2 Gofron M, Shabana A A. Effect of the deformation in the inertia forces on the inverse dynamics of planar flexible mechanical systems. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 6: 1～20

3 陆佑方. 柔性多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1996

4 Bae D S, Haug E J. A recursive formulation for constrained mechanical system dynamics: part 1: open loop systems. *Mech Struct & Mach*, 1987, 15 (3): 359～382

5 Haug E J, Wu S C, Kim S S. Dynamics of flexible machines: avaritional approach. In: Bianchi G, Schiehlen W eds. Dynamics of Multibody Systems. Berlin Heidelberg: Springer, 1986

6 Kim S S, Haug E J. A recursive formulation for flexible multibody dynamics, part 1: open-loop systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71: 293～314

7 Kim S S, Haug E J. A recursive formulation for flexible multibody dynamics, part 2: closed-loop systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 74: 251～269

8 潘振宽, 洪嘉振, 刘延柱. 柔性机械臂动力学方程单向递推组集建模方法. 力学学报, 1993, 25 (3): 327～333

9 潘振宽, 洪嘉振, 刘延柱. 链状柔性多体机器人动力学研究. 固体力学学报, 1993, 14 (4): 323～329

10 于清, 洪嘉振. 静力校正模态在闭环柔性多体系统动力学仿真中的应用. 见: 洪嘉振, 贾书惠主编. 多体系统动力学与控制. 北京: 北京理工大学出版社, 1996: 27～30

11 Yu Qing, Hong Jiazhen. Static correction modes in dynamic simulation of flexible multibody systems with closed loops. *Journal of Shanghai Jiaotong University (English Edition)*, 1997, E-2 (1): 17～20

12 Yoo W S, Haug E J. Dynamics of articulated structures, part 2. computer implementation and applications. *J Struct Mech*, 1986, 14 (2): 177～189

13 Yoo W S, Haug E J. Dynamics of flexible mechanical systems using vibration and static correction modes. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1986, 108: 315～322

14 Shin S H, Yoo W S. Effects of mode selection, scaling, and orthogonalization on the dynamic analysis of flexible multibody systems. *Mech Struct & Mach*, 1993, 21 (4): 507～527

15 Wu H T, et al. Selection of modal basis for flexible bodies of mechanical systems. *Mech Mach Theory*, 1995, 30 (3): 471～489

16 Wu H T, Mani N K. Modeling of flexible bodies for multibody dynamic systems using ritz vectors. *Journal of Mechanical Design*, 1994, 116: 437～444

17 Yen H F, Dopker B. Deformation mode selection and mode orthonormalization for flexible body system dynamics. *Computers & Structures*, 1990, 34 (4): 615～627

18 Ryu J, Kim Sang Sup, Kim Sung Soo. A general approach to stress stiffening effects on flexible multibody dynamic systems. *Mech Struct & Mach*, 1994, 22 (2): 157～180

19 Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1987, 10 (2): 139～151

20 Zhang Dajun, Liu Youwu, Houston R L. On the dynamics of an arbitrary flexible body with large overall motion, an integrated approach. *Mech Struct Mach*, 1995, 23 (3), 419～438

21 Simo J C, Quoc V L. On the dynamics of flexible beams under large overall motion, the planar case, part 1. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, 53: 849～854

22 Simo J C, Quoc V L. The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, 119 (3): 487～508

23 Hsiao K M, Yang R T, Lee A C. A consistent finite element formulation for non-linear dynamic analysis of planar beam. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 75～89

24 Sharf I. Geometrically non-linear beam element for dynamics simulation of multibody systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39: 763～786
25 Damaren C, Sharf I. Simulation of flexible-link manipulators with inertial and geometric nonlinearities. *Journal of Dynamic Systems, Measurement & Control*, 1995, 117: 74～86
26 Zhu J F. A new consideration on the derivation of the geometrical stiffness matrix with the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 123: 141～160
27 Wallrapp O. Linearized flexible multibody dynamics including geometric stiffening effects. *Mech Struct Mach*, 1991, 19 (3): 385～409
28 Wallrapp O. Standardization of flexible body modeling in multibody system codes, part 1: definition of standard input data. *Mech Struct & Mach*, 1994, 22 (3): 283～304
29 Wallrapp O, Schwertassek R. Representation of geometric stiffening in multibody system simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, 32: 1833～1850
30 Padilla C E, von Flotow A H. Nonlinear strain-displacement relations and flexible multibody dynamics. *Journal of Guidance, Control & Dynamics*, 1992, 15 (1): 128～136
31 Banerjee A K, Lemak M E. Multi-flexible body dynamics capturing motion-induced stiffness. *Journal of Applied Mechanics*, 1991, 58: 766～775
32 Zhang D J, Huston R L. On dynamic stiffening of flexible bodies having high angular velocity. *Mech Struct & Mach*, 1996, 24 (3): 313～329
33 Wu S C, Haug E J. Geometric non-linear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, 26: 2211～2226
34 Liu A Q, Liew K M. Non-linear substructure approach for dynamic analysis of rigid-flexible multibody systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 114: 79～396
35 Eich E, Fuhrer C, Yen J. On the error control for multistep methods applied to ODEs with invariants and DAEs in multibody dynamics. *Mech Struct & Mach*, 1995, 23 (2): 159～179
36 Blajer W, Schirm W. A projective criterion for variable partioning in analyses of constrained mechanical systems. *Mechanics Research Communication*, 1994, 21 (3): 215～222
37 Bayo E, Garcia De jalon J, Serna M A. A modified lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71: 183～195
38 潘振宽等. 多体系统动力学微分/代数方程组数值方法. **力学进展**, 1996, 26 (1): 28～40
39 潘振宽等. 多体系统动力学微分/代数方程位置、速度约束违约自动修正方法. 见: 洪嘉振, 贾书惠主编. 多体系统动力学与控制. 北京: 北京理工大学出版社, 1996. 31～35
40 Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972, 1: 1～16
41 Yoon S, et al. Geometric elimination of constraint violations in numerical simulation of lagrangian equations. *Journal of Mechanical Design*, 1994, 116: 1058～1064
42 于清, 洪嘉振. 受约束多体系统一种新的违约校正方法. **力学学报**, 1998, 30 (3): 300～306

SOME TOPICS ON FLEXIBLE MULTIBODY SYSTEM DYNAMICS

Yu Qing　　Hong Jiazhen
Department of EngineeringMechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030

Abstract This paper summarizes the studies on flexible multibody system dynamics in recent years. The focus of this paper are on the modeling method, modal selection and synthesis, dynamics stiffening and the numerical method for differential-algebraic equations. The trend of the development of flexible multibody system dynamics is discussed at the end of this paper.

Keywords flexible multibody system dynamics, modeling method, modal, modal synthesis, dynamics stiffening, differential-algebraic equations, numerical method