



## 简评“分析力学框架中非完整系统的再研究”

陈立群

上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

加拿大 McGill 大学的 S. Ostrovskaya 博士和 J. Angeles 教授在美国机械工程师学会《应用力学评论》(ASME Applied Mechanics Review, 1998, 51(7): 415~433) 上发表“分析力学框架中非完整系统的再研究”(Nonholonomic systems revisited within the framework of analytical mechanics) 一文。该文对非完整力学系统的建模问题, 尤其是运动约束的处理, 进行了较为深入的分析, 有重要参考价值。

全文共分 8 节。在第一节引论中, 作者指出他们撰写该文的动机是工程应用, 例如移动机器人对完整和非完整约束的区分提出更高要求, 并且概述非完整系统动力学建模的历史发展。第二节说明该文使用的符号、定义和术语, 与分析力学和多体动力学的习惯用法基本一致。第三节讨论机械系统中的约束, 包括几何约束、运动学约束和代数约束。运动学约束写作 Pfaffian 形式后又进一步根据不同特点进行完整和非完整、固定 (scleronomic) 和流动 (rheonomic)、有序 (catastatic) 和无序 (acatastatic) 三种分类。第四节简略概括动力学建模的两类方法, 基于 Lagrange 方程的分析方法和基于 Newton-Euler 方程的综合方法。第五节应用 Lagrange 分析力学的方法建立受运动约束系统的动力学模型, 并讨论了完整系统和 Chaplygin 系统两种特例。第六节证明了判断运动约束可积性的完整性定理并分析若干重要特例。第七节研究了若干例子, 包括斜面上的两轮轴、带常规轮的移动机械人和带球轮的移动机械人。第八节为全文的结论。

该文在总结以往工作的同时也有创新性的结果。作者在第六节中给出判断系统约束是否完整的完整性定理比常用的 Frobenius 定理更为简便。应用 Frobenius 定理时需要计算  $(n-p)^2n$  个数量以验证 Lie 括号的对合性, 这里  $n$  是独立广义坐标的数目,  $p$  是运动约束的数目。应用完整性定理只需要计算完整性矩阵的  $(n-p)n$  个元素。而且从分析动力学应用的角度考虑, 采用完整性定理只需要进行矩阵与矢量的相乘运算, 比 Frobenius 定理更容易为工程人员接受。当然, 从逻辑的角度考虑, 完整性定理仅是 Frobenius 定理的推论。此外, 作者在第五节建立了受运动约束系统动力学方程的一种新形式, 类似于 P. Vorozet 和 G. Hamel 各自独立提出的方程, 但有所改进。作者还提出了准完整 (quasiholonomic) 约束的概念, 以概括与工程系统相关的一类非完整约束。

该文的突出特点是在很强的工程背景下讨论受运动约束力学系统用分析力学方法建模的问

(下转第 120 页)

# BROWNIAN DYNAMICS SIMULATION OF MOLECULE MODELS IN POLYMER RHEOLOGY

Fang Jiannong Fan Xijun

Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027

**Abstract** The Brownian dynamics simulation method which is used to study the rheological properties of molecule models in polymer is described and the researches on this method are summarized. In general cases, the methods for the study of molecule models can be combined with the numerical methods for solving the conservation equations in fluid dynamics. Then, it is possible to use a molecule model to take the place of the constitutive equation in continuum mechanics for numerical simulation of complex flows of polymer liquids. The latest progresses in this field are presented and the interesting features of the method are discussed.

**Keywords** molecule model, Brownian dynamics simulation, polymeric flow, numerical simulation

~~~~~  
(上接第 134 页)

题。特别是第七节讨论的 3 个例子，除较常见斜面上的两轮轴外，更为复杂带轮和球的移动机械人问题显示了该文方法的优越性。

综上所述，作者在 Lagrange 分析力学的框架内重新研究了与工程问题相关的受运动约束力学系统的动力学建模问题，系统准确地阐述了若干基本概念和结果，也包括一些新的概念、方法和结论。这些都有助于将 Lagrange 分析力学应用于复杂的工程系统。