第 29 卷 第 1 期 力 学 进 展 Vol. 29 No. 1
1999 年 2 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Feb. 25, 1999

随机有限元动力分析方法的研究进展*

赵 雷 陈 虬
西南交通大学, 成都 610031

摘 要 对随机结构动力分析方法, 包括随机模拟法、摄动随机有限元法、动态随机有限元法和正交展开法等进行了评述, 介绍了该领域内的研究进展, 并讨论了研究中存在的问题以及发展方向.

关键词 随机结构, 随机场, 随机有限元法, 特征值, 动力响应

1 引 言

随着科学技术的发展, 结构动力分析理论与方法已日趋完善. 尤其是大型、高速电子计算机的广泛应用, 使人们有可能对复杂的工程结构进行动态分析和设计. 近年来, 人们已开始不满足于确定性分析所得到的计算结果, 着力于寻求能描述结构真实工作行为的新的分析方法. 其中之一, 就是引入随机性概念, 研究结构分析的随机方法. 对于随机结构的静力分析以及稳定性分析已取得长足进步 [1,2], 但对于随机结构动力分析的研究却相对甚少.

随机结构动力分析方法的研究, 一般围绕两项主要内容展开, 即: 随机特征值和随机动力响应的概率分析. 随机结构动力分析涉及三方面的内容, 包含随机场的离散与分离、空间场的离散化以及时间域的积分, 从而增加了问题的难度. 我们于 80 年代末期开始对随机结构动力分析的有关问题进行了研究, 并在理论和应用方面进行了一些探索性工作, 取得了若干进展 [2~6]. 本文对国内外的相关研究文献进行了调研, 评述了随机结构动力分析方法的研究现状和进展, 期望能引起国内从事该领域研究的同行的兴趣, 推动随机结构动力学的发展.

2 随机特征值分析

设随机结构系统经离散化后, 成为 m 自由度系统, 其动力方程描述为

$$[M(\{\beta\})]\{\ddot{y}\} + [C(\{\beta\})]\{\dot{y}\} + [K(\{\beta\})]\{y\} = \{F(t)\} \tag{1}$$

其中 $[M(\{\beta\})]$, $[C(\{\beta\})]$ 和 $[K(\{\beta\})]$ 分别为结构关于 n 维随机变量 $\{\beta\}$ 的 $m\times m$ 阶随机质量矩阵、随机阻尼矩阵和随机刚度矩阵; $\{F(t)\}$ 为 $m\times 1$ 的随机动力荷载列阵; $\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$ 和 $\{y\}$ 为 $m\times 1$ 的随机动力响应列阵. 式 (1) 对应的广义特征值问题为

收稿日期: 1997-03-25, 修回日期:1997-11-13
* 国家自然科学基金资助项目 (59678039)

$$([K]-\lambda_k[M])\{\phi\}_k=\{0\} \tag{2}$$

其中 λ_k 和 $\{\phi\}_k$ 分别对应于结构的第 k 阶特征值和特征向量, $[K]$ 和 / 或 $[M]$ 的随机性导致了特征对 $(\lambda_k,\{\phi\}_k)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 的随机性.

对随机结构特征值问题的研究, 始于 60 年代, 已取得了一系列有价值的成果 [7~12]. Nagpal 等用 Monte Carlo 数值模拟方法研究了汽轮机叶片的几何和材料特性的误差对固有频率的影响 [13]; 笔者在文 [14] 中采用 Monte Carlo 加权残值法, 对加权残值法得到的固有频率的随机函数用 Monte Carlo 模拟求其统计特征, 得到了良好的数值结果; 更多的研究工作都是采用摄动法得到特征对的递推方程完成对随机特征值的分析 [15~17], 即取 $[K]$ 和 $[M]$ 的二阶 Taylor 展开式

$$\left.\begin{aligned}[K]&=[K]^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}[K]_i^{(1)}\beta_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[K]_{ij}^{(2)}\beta_i\beta_j\\ [M]&=[M]^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}[M]_i^{(1)}\beta_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[M]_{ij}^{(2)}\beta_i\beta_j\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中算子 $(\cdot)^{(0)}$, $(\cdot)_i^{(1)}$ 和 $(\cdot)_{ij}^{(2)}$ 分别表示 $(\cdot)$ 在随机变量 $\{\beta\}$ 的均值点 $\{\beta\}^{(0)}$ 处的零阶、一阶和二阶变异量. 设特征对 $(\lambda_k,\{\phi\}_k)$ 也有类似的二阶展开式, 即

$$\left.\begin{aligned}\lambda_k&=\lambda_k^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ki}^{(1)}\beta_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{kij}^{(2)}\beta_i\beta_j\\ \{\phi\}_k&=\{\phi\}_k^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}\{\phi\}_{ki}^{(1)}\beta_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{\phi\}_{kij}^{(2)}\beta_i\beta_j\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

于是有递推的特征值问题

$$\left([K]^{(0)}-\lambda_k^{(0)}[M]^{(0)}\right)\{\phi\}_k^{(0)}=\{0\} \tag{5}$$

$$\left([K]^{(0)}-\lambda_k^{(0)}[M]^{(0)}\right)\{\phi\}_{ki}^{(1)}=-\left([K]_i^{(1)}-\lambda_k^{(0)}[M]_i^{(1)}-\lambda_{ki}^{(1)}[M]^{(0)}\right)\{\phi\}_k^{(0)}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\left([K]^{(0)}-\lambda_k^{(0)}[M]^{(0)}\right)\{\phi\}_{kij}^{(2)}=-\left([K]_i^{(1)}-\lambda_k^{(0)}[M]_i^{(1)}-\lambda_{ki}^{(1)}[M]^{(0)}\right)\{\phi\}_{kj}^{(1)}-\\ &\quad\left([K]_j^{(1)}-\lambda_k^{(0)}[M]_j^{(1)}-\lambda_{kj}^{(1)}[M]^{(0)}\right)\{\phi\}_{ki}^{(1)}-\\ &\quad\left([K]_{ij}^{(2)}-\lambda_{ki}^{(1)}[M]_j^{(1)}-\lambda_{kj}^{(1)}[M]_i^{(1)}-\lambda_{kij}^{(2)}[M]^{(0)}-\lambda_k^{(0)}[M]_{ij}^{(2)}\right)\{\phi\}_k^{(0)}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{7}$$

式 (5) 是确定性方程, 不难求得均值条件下的特征对 $(\lambda_k^{(0)},\{\phi\}_k^{(0)})$. 文 [17] 给出了式 (6) 和 (7) 的求解策略. 根据 $([K]^{(0)}-\lambda_k[M]^{(0)})$ 的对称性, 可得

$$\lambda_{ki}^{(1)}=\frac{\left(\{\phi\}_k^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}\left([K]_i^{(1)}-\lambda_k^{(0)}[M]_i^{(1)}\right)\{\phi\}_k^{(0)}}{\left(\{\phi\}_k^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}[M]_i^{(1)}\{\phi\}_k^{(0)}}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

Vanmarcke 指出 [18], 即使由上式确定了 $\lambda_{ki}^{(1)}$, 由于矩阵 $([K]^{(0)}-\lambda_k^{(0)}[M]^{(0)})$ 的奇异性可能导致求解特征向量变异值的困难, 应对特征向量进行规范化以降低矩阵 $([K]^{(0)}-\lambda_k^{(0)}[M]^{(0)})$ 的秩 [8,19]. 要获得特征对 $(\lambda_k,\{\phi\}_k\}$ 的具有二阶精度的均值, 必须涉及特征对的二阶变异量, 因此计算工作量相当可观; 当随机变量相关时, 计算效率更差, 所以常采用一阶摄动 [16,20].

2 随机结构的动力响应

在动态响应分析中, 对质量、阻尼和刚度矩阵以及外激励的随机扰动效应的考虑, 大体上

始于 70 年代初期. 经过 20 多年来的研究工作, 形成了三类基本的分析方法, 即随机模拟方法、随机有限元法和正交展开法 [1].

3.1 随机模拟方法

随机模拟方法是最常用的统计逼近方法, 尤以 Monte Carlo 模拟最为人们所钟爱. Shinozuka 等用 Monte Carlo 数值模拟技术完成了线性结构随机激励的时域分析, 得到了样本函数的时间历程, 而这是标准的频域分析不可能得到的重要信息 [21,22]; 文 [23] 完成了非线性结构随机动力响应的数值分析; Nagpal 等用这种方法研究了汽轮机叶片的几何和材料特性的误差对固有频率及动力响应量的影响, 取得了有益的结论 [13]; Astill 等则用此法研究了随机结构在冲击荷载作用下的动力响应 [24]. 随机模拟方法的特点是适用范围广, 但计算工作量大, 难以应用于复杂的工程结构, 因而只作为检验其他近似数值方法的可行性尺度而在随机结构动力分析中使用.

3.2 随机有限元法

3.2.1 动力问题的随机变分原理

建立随机结构动力有限元法的理论基础是动力问题的随机变分原理. 从 1962 年 Bellman 讨论随机变分原理以来 [25], 人们在线性静力问题的随机变分原理方面展开了研究, 并取得了进展 [2,26~30]. 在动力问题的随机变分原理方面, Kliber 和 Hien 提出了随机 Hamilton 原理 [1,31]; 笔者利用瞬时最小势能原理, 研究了线性和非线性随机结构动力问题的随机变分列式 [6].

3.2.2 摄动随机有限元法

80 年代中期, Liu 等 [32] 将摄动随机有限元法引入随机结构动力分析中, 计算动力系统的瞬态响应, 解决了刚度随机变异的弹簧 - 质量系统的线性动力响应和屈服应力随机变化的具有非线性刚度的桁架结构动力响应问题. 在这之前, 二阶摄动技术就已经被用于预测线性随机结构的动力响应量. Hoshiya 分析了线性随机结构对确定性输入的动态响应 [33], 并考虑了剪切梁在随机输入下的动力响应 [34]; Ghafory-Ashtiany 和 Singh 则分别考虑了随机地震作用下随机结构的动力响应问题 [35,36]; Nakagiri 则研究了阻尼随机变化时结构的振动分析问题 [37]; Sues 等考虑用类似的方法分析非线性体系 [38]; Kliber 和 Hien 也用摄动格式研究了随机结构的动力分析问题 [1]; 李贤兴用摄动随机有限元法研究了随机结构在随机荷载作用下的动态响应预测问题 [39,40], 将随机动力响应的协方差矩阵关于标准正态随机变量作幂级数展开, 获取关于 Lyapunov 矩阵方程的摄动格式, 以方差矩阵的统计特征值形式给出随机动力系统的解答. 结果表明, 这些方法都与 Monte Carlo 模拟解有很好的一致性.

在摄动随机有限元法中, 可以考虑结构系统的质量、阻尼、刚度以及激励、响应量的不确定性, 并模型化为随机变量, 但这种随机扰动量通常被假定为很小. 这些随机函数通过摄动格式展开为在随机变量均值点处的级数, 由此得到随机结构动力方程的一组递推方程, 进而得到动力响应的摄动解 [1,2,15]. 在基于摄动技术而出现的随机结构动力响应分析研究中, 对单自由度体系, Wall 和 Bucher 研究了随机荷载作用下具有随机参数的结构响应 [41], 用小参数 ε 分离随机函数, 得到一组递推方程, 按频响函数得到响应的积分表达式, 计算结构动力响应量, 文 [16] 称其为随机摄动法. 对于多自由度体系的瞬态动力响应, 基于摄动原理, 文 [16] 建议分为随机摄动法和随机有限元法. 前者将随机矩阵 $[\Psi]$ 用小参数 ε 分离为

$$[\Psi] = [\Psi]_1 + \varepsilon[\Psi]_2 \tag{9}$$

式中 $[\Psi]_1$ 为确定性部分, $[\Psi]_2$ 是均值为零的随机扰动部分. 将其代入随机结构动力方程中按摄动法原理得到由零阶 (均值) 方程和一阶变异方程组成的递推方程组. 其中零阶方程是确定

性的，可按常规方法求解；一阶变异方程是不确定参数的随机振动方程，广义荷载项由荷载的变异项及结构的随机参数扰动部分所组成. 在处理随机扰动项 $[\Psi]_2$ 时，一般按小随机变异条件，用 Taylor 级数将其在随机变量 $\{\beta\}$ 的均值点处作一阶展开，然后求出灵敏度响应并得到瞬态动力响应统计量.

基于摄动展开的随机有限元法，则是将随机结构动力方程中的各随机矩阵和随机列阵用 Taylor 级数在随机变量 $\{\beta\}$ 的均值点处作一阶和 / 或二阶展开，得到结构动力响应的零阶、一阶和二阶变异方程，即

$$[M]^{(0)}\{\ddot{y}\}^{(0)}+[C]^{(0)}\{\dot{y}\}^{(0)}+[K]^{(0)}\{y\}^{(0)}=\{F\}^{(0)} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&[M]^{(0)}\{\ddot{y}\}_i^{(1)}+[C]^{(0)}\{\dot{y}\}_i^{(1)}+[K]^{(0)}\{y\}_i^{(1)}=\{F\}_i^{(1)}-[M]_i^{(1)}\{\ddot{y}\}^{(0)}-\\&\quad[C]_i^{(1)}\{\dot{y}\}^{(0)}-[K]_i^{(1)}\{y\}^{(0)}\quad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&[M]^{(0)}\{\ddot{y}\}_{ij}^{(2)}+[C]^{(0)}\{\dot{y}\}_{ij}^{(2)}+[K]^{(0)}\{y\}_{ij}^{(2)}=\{F\}_{ij}^{(2)}-[M]_{ij}^{(2)}\{\ddot{y}\}^{(0)}-[C]_{ij}^{(2)}\{\dot{y}\}^{(0)}-\\&\quad[K]_{ij}^{(2)}\{y\}^{(0)}-[M]_i^{(1)}\{\ddot{y}\}_j^{(1)}-[C]_i^{(1)}\{\dot{y}\}_j^{(1)}-[K]_i^{(1)}\{y\}_j^{(1)}-[M]_j^{(1)}\{\ddot{y}\}_i^{(1)}-\\&\quad[C]_j^{(1)}\{\dot{y}\}_i^{(1)}-[K]_j^{(1)}\{y\}_i^{(1)}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{12}$$

解之即可得到结构动力响应的前两阶矩，如动力位移的具有二阶精度的均值响应和一阶精度的方差响应分别为

$$\left.\begin{aligned}E(\{y\})&=\{y\}^{(0)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{y\}_{ij}^{(2)}\mathrm{Cov}\,(\beta_i,\beta_j)\\ \mathrm{Var}\,(\{y\})&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{y\}_i^{(1)}\{y\}_j^{(1)}\mathrm{Cov}\,(\beta_i,\beta_j)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

实际上, 对于随机结构动力分析而言, 随机摄动法和摄动随机有限元法在本质上是一致的. 当基于摄动展开的随机有限元法的 Taylor 展开式取为一阶近似时，两者用于求解随机结构的零阶和一阶变异量的递推方程组是完全相同的，后者包含了前者的求解思想.

3.2.3 Taylor 展开随机有限元法

将随机结构动力方程中的随机函数在随机变量均值点处进行 Taylor 展开，并对随机结构动力方程施加期望算子 $E(\cdot)$ 运算，结合动力灵敏度方程得到一组关于随机结构动力响应变异量的递推方程组 [2,42,43]. 在瞬态动力分析的 Taylor 展开随机有限元法中，它的递推方程组本质上与摄动随机有限元法一致，因此仍然伴随长期项的困扰.

3.2.4 Neumann 动力随机有限元法

文 [6] 提出对随机结构动力方程式 (1) 首先作时间域离散，采用逐步积分格式，导出在时间结点处用结构位移描述的随机结构动力分析的拟静力方程

$$[K]_{eq}\{y\}_{t+\Delta t}=\{F\}_{eq} \tag{14}$$

式中 $[K]_{eq}$ 和 $\{F\}_{eq}$ 分别是结构的拟静力等效随机刚度矩阵和等效随机荷载列阵. 然后对 $[K]_{eq}$ 按 Neumann 展开式求 $[K]_{eq}^{-1}$, 并将 $\{F\}_{eq}$ 分解为均值量和随机扰动量，由 Monte Carlo 模拟递推求出样本解，最后按中心极限定理求出时间结点 $(t+\Delta t)$ 处的响应统计量. 这种方法不受随机变异量大小的限制，可以方便地求得二阶及以上的统计矩，并且具有较高的数值精度和计算效率. 更为重要的是，此法不采用摄动格式处理随机信息，因此不存在长期项的干扰，是一种很有效的动力分析的随机有限元法.

3.2.5 动态随机有限元法

随机结构动力分析的有限元离散时，如果在沿用静力位移模式的基础上考虑结构振动特性，从而提出分析随机结构动力响应的一类新的随机有限元法 —— 动态随机有限元法 [6]. 假设有限单元的随机动力位移模式为

$$\{U(\{x\},\{\beta\},t)\} = [N_D(\{x\},\omega)]\{\delta(t,\{\beta\})\} \tag{15}$$

式中 $[N_D]$ 为单元动态形函数矩阵， ω 为结构频率， $\{x\}$ 为空间坐标， $\{\delta\}$ 为单元结点位移.

动态形函数矩阵一般取为 ω^2 的升幂形式

$$[N_D(\{x\},\omega)] = [N_D(\{x\})]_0 + \omega^2[N_D(\{x\})]_2 + \omega^4[N_D(\{x\})]_4 + \cdots \tag{16}$$

按 ω^2 的取法分别导致了基于标准特征值基频、低阶模态综合和基于二次特征值基频、低阶模态综合的四种动态随机有限元列式 [44~47]. 若将动态形函数矩阵取为基于动约束模态的形函数，则可以更好地描述单元振动时的空间位移场，文 [48] 导出了杆件结构的这种动态随机有限元法的计算列式. 与 Monte Carlo 模拟结果的比较表明，动态随机有限元法的单元动力位移模式较好地描述了单元的动态位移场，因此精度较高.

需要指出的是，动态随机有限元法从单元列式上解决了动态的随机位移场的空间位形描述，其随机结构的动力方程为

$$[M(\{\beta\},\omega)]\{\ddot{y}\} + [C(\{\beta\},\omega)]\{\dot{y}\} + [K(\{\beta\},\omega)]\{y\} = \{F(t)\} \tag{17}$$

式 (1) 仅是上式关于 ω 的零阶近似，因此式 (17) 描述随机结构动力行为比式 (1) 更为适宜，该法对于正确描述随机结构的动应力分布更具优势.

3.3 正交展开法

1979 年，Sun 针对具有随机参数的微分方程的求解，提出了一类基于对结构位移量取 Hermit 正交多项式展开的数值算法 [49]. 受其影响， Jensen 和 Iwan 在结构地震响应分析中使用正交多项式展开方法 [50~53], Ghanem 和 Spanos 将这种方法引入了结构可靠度分析中 [54]. 耐人寻味的是， Jensen 的结果中的重要失误被算例中的矩阵对称性所掩盖. 李杰基于泛函空间中的次序正交分解概念，提出了概率测度空间中的次序正交分解原理，对场域随机变量施行次序正交分解，给出了随机结构动力分析的扩阶系统方法 [55], 直接从随机结构动力方程中按次序分解原理得到扩阶系统动力方程

$$[A_m]\{\ddot{x}_l\} + [A_c]\{\dot{x}_l\} + [A_k]\{x_l\} = \{F_l(t)\} \tag{18}$$

式中 $\{x_l\}$ 为时域随机过程， $[A_m]$, $[A_c]$ 和 $[A_k]$ 分别为扩阶系统中与式 (1) 的 $[M(\{\beta\})]$, $[C(\{\beta\})]$ 和 $[K(\{\beta\})]$ 有关的确定性的扩阶矩阵. 求解式 (18) 后便可以由正交多项式的级数式得到随机结构动力响应的统计特征. 对随机结构所进行的在确定性地震输入和随机性地震输入下的动态响应研究，表明了扩阶系统方法的适用性 [56,57].

基于正交多项式展开的随机结构动力分析方法不受参数变异量大小的限制，这是其优于摄动随机有限元法的特点之一. 但是，扩阶系统方程式 (18) 的阶数远高于原系统方程式 (1). 当所考虑的随机因素较多或随机变异量较大时，正交展开多项式的项数会显著增加，计算工作量会迅速增大以至达到不能承受的程度. 文 [58] 提出递归聚缩算法，在不降低计算精度的前提下，较大幅度地提高计算速度. 由于此法不采用摄动格式，避开了长期项的干扰. 如何进一步提高

计算效率，解决实际工程结构，成为工程界乐于接受的随机分析方法，是正交展开法需要着力解决的迫切问题.

4 摄动随机有限元动力分析的几个问题

因为人们对确定性分析的摄动方法已研究得比较成熟[59]，摄动技术的动力分析的随机有限元法应用很普遍，这些方法可以方便地运用到随机结构动力分析中．但是，这种动力分析的随机有限元法存在计算效率、精度和收敛性问题，当求解高阶响应或者随机变异量较大时，这些问题尤为突出.

4.1 递推方程的时域求解技术

随机结构动力方程对应的零阶、一阶和二阶变异方程在本质上已成为确定性的递推方程组，因此结构动力学中确定性方程的各种解法都是适用的．对于多自由度体系，目前随机结构动力方程的时域求解方法一般有以下三种.

(1) 模态 (振型) 叠加法

本质上是一种广义坐标变换，把物理空间中的动力方程变换到模态空间中求解.

(2) 直接积分法

当 $[M]^{(0)}$, $[C]^{(0)}$ 和 / 或 $[K]^{(0)}$ 出现随机时间变化的特性，或者当外部激励激起的振型较多，需计算的特征对数目较大时，宜采用直接积分法，即对时间域进行离散以完成数值积分．文 [60] 按 Newmark 法导出了随机结构非线性动力分析的增量随机有限元计算列式，数值结果表明该法与 Monte Carlo 数值模拟具有较好的一致性.

(3) 加权残值法

对摄动随机有限元动力方程的各阶变异式 (10)~(12), 在时间域内按加权残值法离散，取三次 B 样条函数空间中的基底函数的线性组合作为递推动力方程中动力响应解的各阶变异量的试函数．如果先用模态叠加法，在模态空间中使用此法，就形成基于振型叠加的随机加权残值法；如果不采用模态坐标变换，直接在物理空间中采用此法，就形成基于直接积分的随机加权残值法[6].

4.2 摄动随机有限元法的计算效率

为了得到具有二阶精度的结构均值响应，当随机变量个数为 n, 且为相关随机变量时，随机结构动力分析的计算工作量是相应确定性分析的 $(1+n+n^2)$ 倍．为了改善这种状况，可采用随机变量的特征正交化变换，将 n 维相关随机变量转换为一组互不相关的随机变量[2,8,40]，可使 n 阶协方差矩阵转换为对角阵形式的方差矩阵，从而计算工作量仅为相应确定性分析的 $(1+2n)$ 倍．注意到方差数值较小的随机变量对结构动力系统随机性的相关结构的影响比方差数值较大的随机变量的影响微弱得多，因而可以在正交化变换后的 n 维独立随机变量中选取方差数值较大的前 q 个随机变量取代原来的 n 维随机变量，从而计算工作量缩减为确定性分析的 $(1+2q)$ 倍[2]，这里 $q<n$.

4.3 一阶摄动与二阶摄动

摄动随机有限元法仍以微小摄动量为条件，动力分析中的随机变异系数一般不超过 0.2 ~ 0.3. 根据数值计算经验可知，变异系数小于 0.2 时，一阶摄动随机有限元法效率较高，能给出满意的结果，二阶摄动法对结果的改进不大，而计算工作量大幅度增加[20]．采用上述随机场的局部平均正交化处理及有效正交随机变量后，二阶摄动法中二阶变异方程的出现仅意味着 m 自

由度二阶常系数线性微分方程组的 q 次求解 ($q < n$), 相应的零阶和一阶变异方程共需解 $(1+q)$ 次, 而 q 与 $(q+1)$ 是十分接近的. 因此二阶摄动法的计算工作量至多比一阶摄动法增加 50%; 另一方面, 式 (13) 表明, 结构动力响应的方差无论采用一阶摄动还是二阶摄动, 都是一阶精度, 而响应的均值则分别是零阶精度和二阶精度. 显然, 从随机结构动力分析的目的出发, 零阶精度的均值没有体现结构体系的随机性对动力响应的均值的影响, 而随机结构分析的目的, 却正是要力图说明: 随机结构系统的均值响应与系统随机性有关 [6,61]. 这个 "有关项" 正是均值响应式中由二阶摄动分析结果所得到的二阶变异项 (即等式右边第二项). 因此, 摄动随机有限元法的动力分析中, 应该采用二阶摄动法.

4.4 长期项问题

在摄动法的求解过程中, 尽管动力系统的荷载项并不含有共振频率部分, 但由于摄动格式的使用导致递推方程组的一阶和二阶变异方程中出现共振因素并造成随机动力方程摄动解的数值精度变坏, 在一些情况下甚至出现不收敛的结果, 这就是所谓的 "长期项" (secular terms) 问题 [1,6,18,50,61~64]. 对单自由度随机动力系统的脉冲响应函数的均值和方差, 与 Monte Carlo 数值模拟的比较表明, 摄动随机有限元法只适用于 $t < 4\pi/\omega_0$ (ω_0 为系统固有频率), 此后的偏差随时间 t 的增大而越来越大 [15], 尤其对瞬态响应的方差, 二阶摄动法比一阶摄动效果更差. 事实上, 这是由于长期项中所含时间变量的阶数与摄动阶数相等所致, 低阶解答中的瞬态共振项在高阶递推运算中被一再地放大, 导致所有的统计解答精度随时间增加而降低, 但这种放大效应在真实的随机动力响应中是根本不存在的 [27]. 因此, 摄动随机有限元法解决瞬态动力响应时, 一般只适用于较短的时程, 长期项问题是此法解决随机动力问题时的一个固有弱点.

为了克服长期项对随机动力系统摄动格式之瞬态解的困扰, 人们已提出很多方法用以在数值上消除长期项, 但这些方法的有效性仍在研究中 [65]. 采用等效阻尼衰减的方式可以在一定程度上抑制长期项的影响 [62]; Liu 等在文 [63] 中提出用加权函数消除长期项, 他们将荷载的离散 Fourier 谱中的模态自然频率的某个邻域内的频率项系数消去, 可通过给荷载谱中的共振项系数赋以一个频率加权函数的系数来实现. 文 [63] 已给出了三种类型的频率加权函数及相应的邻域尺度. 这种方法对线性随机结构的瞬态动力响应解答有较好的数值结果. 但对于非线性的随机结构, 迄今为止还没有一种合适的方法能够有效地消除由于摄动格式产生的长期项困扰. 1988 年, Beck 等曾用基于 Fourier 级数展开而非 Taylor 级数展开的摄动法计算具有不确定固有频率的单自由度体系动力响应的均值与方差, 其 Fourier 级数的时程用快速 Fourier 变换估计. 但结论是: 这种展开式很适合于有一个不确定参数的情况, 而当随机变量多于一个时, 这种方法就显得很麻烦了 [66].

由于随机结构动力分析的摄动变异方程是确定性方程, 因此确定性振动理论中关于解决摄动法产生长期项的方法原则上都可以用于各阶变异方程的求解. 出现长期项, 虽不说明近似解是谬误的, 但与其加上修正量, 不如消去长期项, 经过变数变换后, 在选定待定函数项时就可以做到 [67,68]. 但人们求解确定性动力问题的兴趣, 似乎已不在摄动法上, 因而即使是确定性动力学中这些消除长期项的方法的有效性也还没有很好解决, 将其借用于解决随机结构动力学问题, 显然更具难度. 总之, Liu 等在文 [63] 中所提出的方法是目前随机结构动力分析文献中所认可的一种较好的消除摄动格式长期项的数值方法.

5 结 语

众多的研究工作表明, 结构参数的随机变异性可以引起结构随机动力响应的大幅度涨落,

结构的力学参数的随机性在一定条件下还可能成为主导因素．通常，结构最大响应的变异系数大致是结构参数变异系数的 2 ～ 4 倍，有的文献给出的算例已高达 7 倍 [62]；在随机动力系统中，结构参数的随机性对动力响应的贡献量一般大于外激励的随机性之贡献量 [6,40]．这些结果充分表明在结构动力分析中考虑结构参数随机变异的必要性和重要性．我们认为，随机结构动力分析可以在以下方面展开进一步的研究工作：

(1) 完善线性随机结构动力分析理论，比如解决长期项困扰，是摄动随机有限元法完成随机动力分析的必由之路；

(2) 考虑材料非线性和结构大变形效应，建立一套完整的非线性动力分析的随机有限元理论体系，以满足工程结构分析与设计的需要；

(3) 更为合理地描述结构系统的随机场，简单实用的随机场分析技术对于工程应用具有重要意义；

(4) 在随机动力分析中，考虑结构参数和外部环境的模糊性，形成正确描述结构动力系统不确定性分析方法的理论框架显得十分重要和必要；

(5) 加强动力分析随机有限元法的工程应用研究，如结构动力系统的灵敏度分析、研究随机结构体系的动力可靠度理论以及研制随机结构动力分析及可靠度评估的计算机软件等．

参 考 文 献

1 Kleibr M, Hien T D. The Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation. New York: John Wiley & Sons, 1992

2 陈虬，刘先斌．随机有限元法及其应用．成都：西南交通大学出版社， 1993

3 陈虬，李贤兴．等参局部平均随机场的随机有限元分析．西南交通大学学报， 1991, (3): 67～72

4 陈虬，戴志敏．等参局部平均随机场和 Neumann 随机有限元法．计算结构力学及其应用， 1991, 8(4): 397～402

5 Liu Xianbin, Chen Qiu. The interpolation method of stochastic functions and the stochastic variational principle. In: Kussmaul K.F. ed. Structural Mechanics in Reactor Technology. Vol B: Computational Mechanics. Elsever Science Publisher B V, 1993. 243～249

6 赵雷．随机参数结构动力分析方法及地震可靠度研究： [博士学位论文]．成都：西南交通大学， 1996

7 Zhu W Q, Wu W Q. A stochastic finite element method for real eigenvalue problems. *Prob Engrg Mech,* 1992, 118(3): 496～511

8 Collins J D, Thomson W T. The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties. *AIAA J,* 1969, 7(4): 642～648

9 Astill C J, Shinozuka M. Random engenvalue problems in structural mechanics. *AIAA J,* 1972, 10(4): 456～462

10 Vaicaitis R. Free vibrations of beams with random characteristics. *J Sound Vib,* 1974, 35(1): 13～21

11 Scheidt J V, Purkert W. Random Eigenvalue Problem. New York: Elserier Science Publshing Co Inc, 1983

12 陈塑寰．随机参数系统的随机特征值．吉林工业大学学报， 1987, 4: 12～18

13 Nagpal V K, et al. Probabilistic structural analysis to quantify uncertainties associated with trubopump blades. *AIAA J,* 1989, 27(6): 809～813

14 赵雷，陈虬．结构随机分析的 Monte Carlo 加权残值法．计算结构力学及其应用， 1996, 13(2): 193～200

15 朱位秋．随机振动．北京：科学出版社， 1992

16 陈塑寰．随机参数结构的振动理论．长春：吉林科学技术出版社， 1992

17 曹宏等．随机结构动力反应及可靠性分析．应用数学和力学， 1993, 14(10): 931～938

18 Vanmarcke E, et al. Random fields and stochastic finite element. *Structural Safety,* 1986, 3(3/4): 143～166

19 Fox R L, Kapoor M P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA J,* 1968, 6(12): 2426～2429

20 Yamazaki F, et al. Neumann expansion for stocuastic finite element analysis. *J Engrg Mech, ASCE,* 1988, 114(8): 1335～1354

21 Shinozuka M. Monte Carlo solution of structural dynamics. *Computer & Structures,* 1972, 2: 855～874

22 Shinozuka M. Digital simulation of random processes its applications. *J Sound Vib,* 1972, 25(1): 111～128

23 Shinozuka M, Wen Y K. Monte Carlo simulation of nonlinear vibrations. *AIAA J,* 1972, 10(1): 37～40

24 Astill C J, et al. Impact loading on structures with random properties. *J Struct Mech,* 1972, 1(1): 63～77

25 Bellman R. On the foundations of a theory stochastic variational processes. In: Proc of Symposium on Applied Mathematics, 1962, 13: 275~286
26 刘先斌．随机力学系统的分叉行为与变分方法研究：[博士学位论文]．成都：西南交通大学，1994
27 Liu W K, et al. Variational approach to probabilistic finite elements. *J Engrg Mech, ASCE,* 1988, 114(12): 2115~2133
28 Capinski M, Cutland N. Stochastic Navier-Stokes equations. *Acta Appl Math,* 1991, 25(1): 59~85
29 张汝清，高行山．随机变量的变分原理及有限元法．应用数学和力学，1992, 13(5): 383~388
30 高行山，张汝清．有限变形弹性理论随机变量变分原理及有限元法．应用数学和力学，1994, 15(10): 855~862
31 Hien T D, Kleiber M. Finite element analysis based on stochastic Hamilton variational principle. *Computer & Structures,* 1990, 37(6): 893~902
32 Liu W K, et al. Probabilistic finite element methods in nonlinear dynamics. *Compt Meth Appl Mech Engrg,* 1986, 56(1): 61~81
33 Hoshiya M, Shah H C. Free vibration of a beam column with stochastic properties. In: Proc ASCE Engre Mech Div. Specialty Conference, Lafayette, Indiana. Nov, 1969
34 Hoshiya M. Vibration of elastic shear beam with random parameters. In: Lumb P ed. Statistics and Probability in Civil Engineering. Hong Kong: Hong Kong Univ Press, 1972. 537~556
35 Ghafory-Ashtiany M, Singh M P. Seismic response of structural system with random parameters. Report No. VPI-E-81.15. Dept of Engrg Sci and Mech, Virginia Polytech Inst and State Univ, Blacksburg, Va, 1981
36 Singh M P. Seismic response of structures with random parameters. In: Proc 7th Word Conference on Earthquake Engrg. Istanbul, Turkey, 1980
37 Nakagiri S, Hisada T. A note on stochastic finite element method: In: part 7, time-history analysis of structural vibration with uncertain proportional damping. Tokyo Japan: Seisan-Kenkyu, 1983, 35(5): 26~29
38 Sues R H, et al. Stochastic evaluation of seismic structural performance. *J Struct Engrg, ASCE,* 1985, 111(6): 1204~1218
39 Lee X X. Double random vibration of nonlinear systems. In: Proc Int Conf on Computational Stochastic Mechanics, Corfu, Greeze, Sept, 1991
40 李贤兴．强震作用下钢筋混凝土多层建筑的空间随机响应分析及其损伤评估：[博士学位论文]．成都：西南交通大学，1991
41 Wall F J, Bucher C G. Sensitivity of expected exceedance rate of SDOP system response to statistical uncertainties of loading and system parameters. *Proc Engrg Mech,* 1987, 2(3): 138~146
42 陈虬，尹志远．随机结构动力分析的随机有限元法．西南交通大学学报，1994, 29(5): 477~481
43 Chen Qiu, Zhao Lei. Stochastic seismic response analysis of concrete frame structures with random parematers by Taylor expansion. *J Southeast Univ (English Edition),* 1995, 11(1A), Part 3, 355~360
44 Zhao Lei, Chen Qiu. A new stochastic finite element method of random dynamic response for structures with random parameters. In: Proc of 1st ECCS Int Conf, Book II. Changsha China: Hunan University Press, 1995. 207~213
45 赵雷，陈虬．基于二次特征值的动态随机有限元法．西南交通大学学报，1996, 31(增刊): 392~395
46 Zhao Lei, Chen Qiu. Study of dynamic stochastic finite element method in structural aseismic dynamic theory. In: New Developments in Structural Engineering-Theories and Practices. Beijing: China Architecture & Building Press, 1996. 88~93
47 赵雷，陈虬．动态随机有限元法．地震工程与工程振动．1998, 18(1): 1~7
48 Zhao Lei, Chen Qiu. A dynamic stochastic finite element method based on dynamic constraint mode. *Compt Meth Appl Mech Engrg,* accepted for publication in the end of 1998
49 Sun T C. A finite element method for random differential equations with random coefficients. *Int J Numer Analysis,* 1979, 16(6): 1019~1035
50 Jensen H, Iwan W D. Response variability in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* 1991, 20(1): 949~959
51 Jensen H, Iwan W D. Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation. *J Engrg Mech, ASCE,* 1992, 118(5): 1012~1025
52 Iwan W D, Jensen H. On the dynamic response of continuous systems including model uncertainty. *J Appl Mech, ASME,* 1993,60(2): 484~490
53 Jensen H. Dynamic response of structures with uncertain parameters. In: Report EERL 89-2. Earthquake Engrg Res Lab. Pasadena Ca: California Inst of Tech, 1989
54 Ghanem R, Spanos P D. Spectral stochastic finite element formulation for realiability analysis. *J Engrg Mech, ASCE,* 1991, 117(10): 2351-2372

55 李杰. 随机结构分析的扩阶系统方法 (II) 结构动力分析. 地震工程与工程振动, 1995, 15(4): 27~35
56 李杰. 复合随机振动分析的扩阶系统方法. 力学学报, 1996, 28(1): 66~75
57 李杰. 随机结构动力分析的扩阶系统方法. 工程力学, 1996, 13(1): 93~102
58 李杰, 魏星. 随机结构动力分析的递归聚缩算法. 固体力学学报, 1996, 17(3): 263~267
59 陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论. 重庆: 重庆出版社, 1991
60 赵雷, 陈虬. 不确定性结构非线性动力分析的增量随机有限元法. 工程力学, 1996, (2 增刊): 353~357
61 李杰. 地震工程学基础理论研究的若干进展 (1). 世界地震工程, 1995, (1): 5~14
62 李杰. 结构动力分析的若干发展趋势. 世界地震工程, 1993, (2): 1~8
63 Liu W K, et al. Transient probabilistic systems. *Compt Meth Appl Mech Engrg,* 1988, 67(1): 27~54
64 Benaroya H, Rehak M. Finite element methods in probabilistic structural analysis: a selective review. *Appl Mech Rev, ASME,* 1988, 41(5): 201~213
65 Liu W K, et al. Finite element methods in probabilistic mechanics. *Prob Engrg Mech,* 1987, 2(4): 201~213
66 Beck J L, Katafygiotis L. Treating model uncertainties in structural dynamics. In: Proc 9th World Conf, Earthquake Engrg, 5, Kokyo, Tokyo Japan, P3D-03, 1988
67 陈予恕. 非线性振动. 天津: 天津科学技术出版社, 1983
68 黄安基. 非线性振动. 成都: 西南交通大学出版社, 1993

ADVANCES OF DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS BASED ON STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD

Zhao Lei Chen Qiu

Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China

Abstract Various approaches of random dynamic response analysis of structures with stochastic parameters, including random simulation, perturbation stochastic finite element method, dynamic stochastic finite element method and orthogonal expansion, are comprehensively discussed in this paper. The new advances of random dynamic response analysis of structures with stochastic parameters are reviewed. The existing problems and the future improvement trends are also briefly outlined.

Keywords structures with stochastic parameters, random field, stochastic FEM, eigenvalue, dynamic response