第 28 卷 第 2 期　　力 学 进 展　　Vol. 28 No. 2
1998 年 5 月 25 日　　ADVANCES IN MECHANICS　　May 25, 1998

大气运动非线性稳定性研究中的能量-Casimir 方法*

穆 穆

中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

摘 要 介绍使用能量-Casimir 方法 (Arnol'd 方法) 研究大气与海洋运动非线性稳定性所取得的若干新进展, 建立了适用于有限振幅、任意空间结构扰动的非线性稳定性判据. 用初始状态给出了扰动场在任意时刻的上界与下界估计, 提供了关于扰动变化性态的有关信息. 对该领域理论研究与应用的深化与发展问题也作了讨论.

关键词 稳定性, 非线性, 大气, 海洋, 能量-Casimir 方法

1 引 言

大气运动的稳定与不稳定性研究, 是动力气象学的中心问题之一. 稳定与不稳定的大气环流形势, 具有重要的气象意义. 不稳定现象往往伴随着大气环流形势的比较迅速的、较大的变化, 常常导致强烈的天气变化. 另一方面, 大气环流异常的持续维持, 也经常造成大范围地区的天气异常 (如某一地区的持续干旱或洪涝灾害). 因此, 不稳定理论被广泛用来研究大气环流的演变, 气旋与反气旋的生成, 阻塞的形成、维持与崩溃等等. 随着大气科学的迅速发展, 当今人类密切关心的气候的变化与预测、全球变化等问题, 也需要使用稳定性理论进行深入探讨.

大气运动的各种状态, 可以看成是各种基本状态与不同尺度的扰动叠加的结果. 在经典的线性不稳定性理论中, 假定扰动的振幅充分小, 将控制方程线性化, 然后进行研究[1~6]. 在线性理论中, 标准模方法被广泛用来推演稳定与不稳定现象发生的充分 (或必要) 条件, 最大增长率、最不稳定波的波长, 等等. 这一方法只考察单波形式的小扰动, 其结果仅适用于扰动发展的初始阶段. 另一方面, 连续谱动力学[7,8]揭示了连续谱在扰动发展及能量传输中的重要作用, 使人们更清楚地认识到了标准模方法仅考虑离散谱的局限性.

相当一段时间以来, 地球流体力学中的弱非线性不稳定性理论也得到了很大发展, 取得了不少成果[9]. 该理论考察的运动具有下述特点: 超临界数很小, 扰动的振幅有限, 但必须小到可以使用摄动方法. 该理论的有效性必须用其他方法, 例如数值方法, 而加以"后验", 这是弱非线性理论的不足之处.

* 国家自然科学基金资助项目 (49455007)

收稿日期: 1996-10-16, 修回日期: 1997-06-06

当前，气候的变化与预测、全球变化及环境问题受到了人类前所未有的重视．另一方面，非线性科学是当今及下一世纪的前沿学科之一．随着它的蓬勃发展以及与地球科学的交叉、渗透，地球流体运动的稳定性研究，正处于从经典的线性与弱非线性理论向非线性理论的转化、发展的进程中．研究人员开始使用完整的非线性模式，考察扰动为有限振幅、空间结构为任意情形的稳定与不稳定问题，取得了不少有价值的成果．

能量-Casimir 方法是 80 年代以来研究流体运动非线性稳定性的重要方法之一，它是在前苏联著名学者V．I．Arnol'd 60 年代工作基础之上发展起来的(所以一些文献中亦称为Arnol'd 方法)．在文献［10，11］中，Arnol'd 考察了两维不可压缩流体的非线性稳定性，建立了两个非线性稳定性判据（Arnol'd 第一定理与第二定理)．他的主要结果可简介如下:

若 $\Psi(x, y)$ 是

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Phi(x,y,t)+\Phi_x(x,y,t)(\nabla^2\Phi(x,y,t))_y-\Phi_y(x,y,t)(\nabla^2\Phi(x,y,t))_x=0 \qquad (1.1)$$

的定常态，且流函数 $\Psi(x, y)$ 与涡度 $\nabla^2\Psi(x, y)$ 在流体区域 D 中满足函数关系式

$$\Psi(x,y)=\Psi(\nabla^2\Psi(x,y)),\qquad (x,y)\in D \qquad (1.2)$$

这里 $\Psi(\cdot)$ 是某一连续可导函数．若流函数与涡度满足条件

$$0<C_1=\min\frac{\Psi_x}{(\nabla^2\Psi)_x}=\min\frac{\Psi_y}{(\nabla^2\Psi)_y}\le C_2=\max\frac{\Psi_x}{(\nabla^2\Psi)_x}=\max\frac{\Psi_y}{(\nabla^2\Psi)_y}<\infty \qquad (1.3)$$

这时基流 $\Psi(x, y)$ 是非线性稳定的（Arnol'd 第一定理)，在任意时刻的扰动能量与扰动涡度拟能（enstrophy）可用初始扰动场一致有效地估计如下

$$\begin{aligned}&\iint[|\nabla(\Phi-\Psi)|^2+C_1(|\nabla^2(\Phi-\Psi)|^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\le\frac{C_2}{C_1}\iint[|\nabla(\Phi_0-\Psi)|^2+C_1(|\nabla^2(\Phi_0-\Psi)|^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned} \qquad (1.4)$$

这里下标“0”表示初始时刻的物理量．

另一方面，若

$$\begin{aligned}0<C_1&=\min\left(-\frac{\Psi_x}{(\nabla^2\Psi)_x}\right)=\min\left(-\frac{\Psi_y}{(\nabla^2\Psi)_y}\right)\le C_2=\max\left(-\frac{\Psi_x}{(\nabla^2\Psi)_x}\right)\\&=\max\left(-\frac{\Psi_y}{(\nabla^2\Psi)_y}\right)<\infty\end{aligned} \qquad (1.5)$$

Arnol'd 证明了其第二定理：记 λ 是某边值问题的最小正特征值（参见式（2．10)），若 $C_1\lambda>1$，且在区域 D 的每一连通分支上，扰动的速度环量恒为零，这时基流也是非线性稳定的，且成立类似于（1．4）的估计式．

能量-Casimir 方法是研究 Hamilton 动力系统非线性稳定性的重要工具之一，用 Hamilton 动力系统的语言，可以将这一方法简述如下:

利用能量守恒、广义位涡守恒及动量守恒等, 构造 Hamilton 不变量, 使得控制方程与 Hamilton 不变量构成一个 Hamilton 系统 对于流体力学中的问题, 一般地 Hamilton 系统是无限维的、非正则的, 因而存在非平凡的不变泛函 C, 通常称之为 Casimir. 一般地, 基本态 (定常态) 对应于 $H+C$ 的驻点 (即 $H+C$ 在该点的一阶变分为零). 进一步考察 $H+C$ 在该点的二阶变分, 若其是正定或负定的, 则称该基本态是形式稳定的 (formal stability).

对于有限维动力系统, 所有范数都是等价的, 由形式稳定性可以推出非线性稳定性 但对于无限维动力系统, 前者并不一定导致后者. 欲推导非线性稳定性判据, 需要进行 (广义的) 能量估计, 这一过程往往是最困难、最关键的一步. 完成这一步骤之后, 不仅得到了非线性稳定性判据, 也同时得到了基本态稳定时扰动变化的一些重要信息, 例如用初始扰动场给出的关于扰动能量、扰动位涡拟能的上界估计, 等等.

能量-Casimir 方法实际上是把 Fjortoft[5] 方法扩展到非线性且扰动为有限振幅之情形. Arnol'd 第一定理与第二定理分别对应于守恒泛函 $H+C$ 的二阶变分是正定或负定的情形 80 年代以来, 不少西方学者, 例如 Holm 等[12]、Abarbanel 等[13]研究了二维与三维无粘不可压缩流体、等离子体等运动的非线性稳定性 在地球流体动力学方面, Benzi 等[14]、Andrews[15]、McIntyre 等[16]、Zeng[17]、Shepherd[18~20]、Carnevale 等[21]、Swaters[22]、Vladimirov[23]、Frederiksen[24]、Ripa[25]在这一领域作了不少工作, 取得了一些令人感兴趣的成果 例如: 现在已经清楚, 线性稳定性理论中经典的 Rayleigh-kuo 判据, Charney-Stern 定理及 Fjortoft 定理, 本质上也是非线性稳定性判据, 适用于任意空间结构的有限振幅扰动 特别, Zeng[17]对大气动力学中的各种基本模式 (正压与斜压准地转模式, 分层模式, 原始方程组等), 作了深入系统的研究, 建立了一系列非线性稳定性判据

上述作者的工作主要集中于相应于 Arnol'd 第一定理的非线性稳定性判据 (二阶变分正定之情形). 当二阶变分为负定时 (对应于 Arnol'd 第二定理), 欲建立非线性稳定性判据, 问题要困难得多. Andrews[15]曾指出, 在大气动力学中, 对应于 Arnol'd 第二定理的非线性稳定性判据更有意义 近几年来, 作者及同事们深化与发展了能量-Casimir 方法, 对于准地转运动, 建立了若干对应于 Arnol'd 第二定理的非线性稳定性判据 这些判据成功地揭示了经典的 Phillips 模型与 Eady 模型中边缘稳定曲线、短波截断等现象的非线性特征, 深化与发展了经典的线性不稳定性理论, 同时也说明了 Arnol'd 第二定理的重要性 此外, 我们还研究了非线性对称不稳定性, 等等.

随着非线性稳定性研究的深入开展, 人们不仅希望了解在何种条件下, 基本态是非线性稳定的或非线性不稳定的, 而且需要获取在稳定与不稳定条件下, 扰动场随时间变化或发展的有关信息 例如, 基本态稳定情况下, 一些物理量 (例如扰动能量与扰动位涡拟能等) 变化的上界估计, 当基本态不稳定时, 这些物理量发展的饱和上界及其下界估计; 等等. 我们在这方面也作了一些工作, 获得了一些有意义的成果

本文旨在简要介绍作者及其同事们在上述领域的近期研究成果, 一些已经发表, 若干即将发表 材料大体安排如下: 第二节与第三节分别讨论两维正压准地转与多层准地转模式的非线性稳定性问题 第四节是关于三维连续层结准地转运动稳定性的讨论 非线性不稳定性的饱和问题在第五节中介绍 最后, 讨论了能量-Casimir 方法在理论研究与应用中的深化与发展问题

2 二维正压准地转运动的非线性稳定性

考察二维准地转运动的非线性稳定性 其控制方程为[26]

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \partial(\Phi, P) = 0 \tag{2.1}$$

$$P(x, y, t) = \nabla^2\Phi - F\Phi + f(x, y) \tag{2.2}$$

这里, Φ是流函数, P 是位势涡度, $\partial(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$ 是两维Jacobi算子, ∇^2是两维Laplace算子; (x, y)是空间变量, t 是时间, $F = f_0^2/gd$; $f(x, y) = (f_0/d)h(x, y) + f_0 + \beta y$ 表示科里奥利力与地形 $h(x, y)$的综合效应, d 是特征高度, f_0 (常数) 是科里奥利参数. $F = 0$ 对应于Rossby 变形半径为无穷大之情形.

在β平面上的有界多连通 (或单连通) 区域D 中考察流体的运动. 边界 ∂D 光滑, 由$J+1$个单连通分支 ∂D_j 组成, 边界条件为固壁条件与边界速度环量守恒

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right|_{\partial D} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\partial D_j} \nabla\Phi \cdot \mathrm{n}\,\mathrm{d}s = 0, \quad j = 0, \cdots, J \tag{2.3}$$

这里 s 与 n 分别是边界的切方向与法方向. 设 $(\Phi, P) = (\Psi(x, y), Q(x, y))$ 是 (2.1) ～ (2.3) 的一组定常解. 此外, 设存在一元连续可导函数 $\Psi(\cdot)$, 使得

$$\Psi(x, y) = \Psi(Q(x, y)), \quad (x, y) \in D \tag{2.4}$$

叠加在定常基本态 (Ψ, Q) 上的有限振幅扰动 (ψ, q) 定义为

$$\Phi = \Psi + \psi, \quad P = Q + q \tag{2.5}$$

对应于Arnol'd 第二定理, 设 $\Psi(\cdot)$ 是单调下降函数, 且存在常数C_1, C_2, 使得

$$0 < C_1 \le -\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}Q \le C_2 < \infty \tag{2.6}$$

这里 $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}Q = \nabla\Psi/\nabla Q$.

为了建立关于扰动能量与扰动位涡拟能的有关估计, 定义

$$q^* = \int_D q_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \Big/ \int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2.7}$$

这里 $q_0 = q(x, y, 0)$. 为了克服扰动的边界速度环量非零之困难, 再将 (ψ, q) 分解为

$$\psi = \psi' + \psi^*, \quad q = q' + q^*$$

这里 ψ'为下述问题的解

$$\nabla^2\psi' - F\psi' = q', \quad 在D中$$

$$\left.\frac{\partial \psi'}{\partial s}\right|_{\partial D} = 0, \quad \oint_{\partial D_j} \nabla\psi' \cdot \mathrm{n}\,\mathrm{d}s = 0, \quad j = 0, \cdots, J$$

关于上述问题解的存在性及“唯一性”的讨论, 读者可参见文献 [27].

现在, 定义

$$\left.\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\int_D [|\nabla\psi|^2 + F|\psi|^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
E^* &= \frac{1}{2}\int_D [|\nabla\psi^*|^2 + F|\psi^*|^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
Z(t) &= \frac{1}{2}\int_D |q|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\
Z^* &= \frac{1}{2}\int_D |q^*|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
H &= E^* - E(0) - \int_D [G(Q + q_0) - G(Q) - \Psi q_0]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

这里

$$G(\xi) = \int^{\xi} \Psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad q_0' = q'(x, y, 0) \tag{2.9}$$

记 λ 为边值问题

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\varphi + \lambda\varphi = 0, \quad 在 D 中 \\ &\left.\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right|_{\partial D} = 0, \quad \int_{\partial D_j} \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0, \quad j = 0, \cdots, J \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

的最小正特征值

通过建立以初始扰动场给出的关于扰动能量 $E(t)$ 与扰动位涡拟能 $Z(t)$ 的上界估计, Mu 与 Shepherd[27]得到了

判据2.1 若定常态 (Ψ, Q) 满足式 (2.4) 与 (2.6), 且 $C_1(\lambda + F) > 1$, 则它是非线性稳定的

显然, $C_1 = \min(U/Q_y)$, 这里 U 是纬向速度, Q_y 是位涡的经向梯度 λ 是由区域 D 的几何特征确定的常数 该判据说明, 当基本气流的纬向速度, 位涡的经向梯度与区域的几何条件满足一定的配置时, 它是非线性稳定的

最近, 作者及其同事改进了文献 [27] 的关于 $E(t)$ 与 $Z(t)$ 的上界估计, 在判据2.1中条件成立的情况下, 得到了

$$E(t) \le E^* + B Z_{\max}^{1/2} + Z_{\max}/(\lambda + F) \tag{2.11}$$

$$Z(t) \le Z_{\max} + Z^* \tag{2.12}$$

这里

$$Z_{\max} = [B + (B^2 + 4kH)^{1/2}]^2/(4k^2)$$

$$k = C_1 - 1/(\lambda + F), \qquad \|\Psi^*\|^2 = \int |\Psi^*|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$B = \begin{cases} 2(E^*/(\lambda + F))^{1/2}, & 当 (\lambda + F)^{1/2}\|\Psi^*\| - (2E^*)^{1/2} \ge 0 时 \\ \sqrt{2}\,\|\Psi^*\|, & 其余情形 \end{cases}$$

若区域 D 是纬向周期通道, 且地形函数 $h = h(y)$, 这时我们可以建立较判据2.1应用范围更广的非线性稳定性判据[27].

若 $k < 0$, 这时基本态 (Ψ, Q) 可能是非线性不稳定的 在 $k \ll 0$时, 数值模拟结果支持 (但不是证明) 这一猜测 随之而来的问题是, 若基本态是非线性不稳定的, 叠加在其上的初始扰动的发展的上、下界如何估计. 上界问题一般称之为 Saturation (饱和) 问题, 我们将在第六节中介绍 关于下界问题, 迄今为止, 除了 Zeng[17]考察了非线性不稳定的 Haurwitz 波外, 作者尚未见到有其它文献给出这方面的结果 最近, 我们得到了下述结果:

设基本态满足式 (2.4), (2.6), 但 $k < 0$, 若初始扰动场使得 $H < 0$, 则我们有

$$E(t) \ge E^* - H + C_1 Z_{\min} \tag{2.13}$$

$$Z(t) \ge Z_{\min} + Z^* \tag{2.14}$$

这里

$$Z_{\min} = [B - (B^2 + 4kH)]/(2k)$$

显然, (2.13), (2.14) 式右端为正, 因而给出了扰动能量与扰动位涡拟能的非平凡的下界估计. 注意到这一估计仅当初始扰动场使得 $H < 0$时成立, 这是否隐含着满足这一条件的初始扰动场更容易发展起来, 这一点在物理机制上并不清楚

能量方法在作估计时, 往往出现比较保守的现象, 如上界估计放大与下界估计减小, 等等 这种现象在使用能量-Casimir 方法时是否出现, 尚未见到较充分的研究, 仍是一个值得探讨的问

题

在文献 [27] 中，作者们给出了满足上述非线性稳定性判据的若干基本气流。孙左令[28]对于这些基流，用数值方法研究了叠加在其上扰动能量与扰动位涡拟能随时间的演变情况。

3 多层准地转运动的非线性稳定性

多层准地转模式是地球流体动力学中的一个重要模式。我们考察层结稳定的 N 层准地转流体运动。各层密度 $\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_N$ 均为常数，层间密度跃度相同：$\rho_{i+1} - \rho_i = \rho'$，第 i 层的平均厚度为 d_i，其控制方程为[26]

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \partial(\Phi_i, P_i) = 0 \tag{3.1}$$

$$P_i(x, y, t) = \nabla^2\Phi_i + F_i\sum_{j=1}^{N} T_{ij}\Phi_j + f_i(x, y), \quad i = 1, \cdots, N \tag{3.2}$$

这里 Φ_i 和 P_i 分别是第 i 层的流函数与位涡，$F_i = f_0^2\rho_0/g\rho' d_i$ 是旋转 Froude 数，ρ_0 是流体的平均密度，$f_i(x, y) = \delta_{iN}(f_0/d_N)h(x, y) + f_0 + \beta y$，其中 $h(x, y)$ 是底层的地形函数，δ_{iN} 是 Kronecker 符号，矩阵

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

在如上节所述的区域 D 中考察问题。在每一层，边界是固壁的，且速度环量守恒，即对每一流函数 Φ_i，(2.3) 式成立。

设 $(\Phi_i, P_i) = (\Psi_i, Q_i)$ 是 (3.1)，(3.2) 式的一组定常解。此外，在每一层，存在一元连续可导函数 $\Psi_i(\cdot)$，使得

$$\Psi_i(x, y) = \Psi_i(Q_i(x, y)), \quad (x, y) \in D \tag{3.4}$$

叠加在定常态 (Ψ_i, Q_i) 之上的有限振幅扰动 (ψ_i, q_i) 定义为

$$\Phi_i = \Psi_i + \psi_i, \quad P_i = Q_i + q_i \tag{3.5}$$

对应于 Arnol'd 第二定理，假定函数 $\Psi_i(\cdot)$ 均是单调下降的，且存在正常数 C_{1i} 与 C_{2i}，使得

$$0 < C_{1i} \leq -\mathrm{d}\Psi_i/\mathrm{d}Q_i \leq C_{2i} < \infty, \quad i = 1, \cdots, N \tag{3.6}$$

类似于上节，欲建立关于扰动能量与扰动位涡拟能的有关估计，定义

$$q_i^* = \int_D q_{i0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big/ \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad i = 1, \cdots, N$$

这里 $q_{i0} = q_i(x, y, 0)$。再将 (ψ_i, q_i) 分解为

$$\psi_i = \psi_i' + \psi_i^*, \quad q_i = q_i' + q_i^*, \quad i = 1, \cdots, N$$

这里 ψ_i' 是下述问题的解

$$\nabla^2\psi_i' + F_i\sum_{j=1}^{N} T_{ij}\psi_j' = q_i', \quad \text{在 } D \text{ 中}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_i'}{\partial s}\right|_{\partial D} = 0, \quad \int_{\partial D_j} \nabla\psi_i' \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}s = 0, \quad j = 0, \cdots, J$$

上述问题解的存在性与“唯一性”在文献 [29] 中已有讨论。

为了叙述我们的结果，定义矩阵

$$\mathrm{K} = \mathrm{diag}(F_1^{1/2}, \cdots, F_N^{1/2})$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{diag}(C_{11}, \cdots, C_{1N})$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{C} - (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{KTK})^{-1}$$

这里 λ 是上节中由问题 (2.10) 定义的最小正特征值，I 是单位矩阵，上标“-1”表示矩阵求逆。再定义

$$\left.\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\int\left[\sum_{i=1}^{N} d_i \left|\nabla\Psi_i\right|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} d_i F_i (\Psi_{i+1} - \Psi_i)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
E^* &= \frac{1}{2}\int\left[\sum_{i=1}^{N} d_i \left|\nabla\Psi_i^*\right|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} d_i F_i (\Psi_{i+1}^* - \Psi_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
Z(t) &= \frac{1}{2}\int\sum_{i=1}^{N} d_i \left|q_i\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
Z^* &= \frac{1}{2}\int\sum_{i=1}^{N} d_i \left|q_i^*\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
H &= E^* - E(0) - \int\sum_{i=1}^{N} d_i [G_i(Q_i + q'_{i0}) - G(Q_i) - \Psi_i q'_{i0}]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

这里

$$G_i(\xi) = \int^{\xi}\Psi_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad q'_{i0} = q'_i(x, y, 0) \tag{3.8}$$

在文献 [29] 中，我们建立了

判据3.1 设基本气流 (Ψ_i, Q_i) 满足 (3.4) 与 (3.6) 式，且矩阵M 正定，则它是非线性稳定的。

最近，通过精细的估计，我们改进了文献 [29] 中关于扰动能量 $E(t)$ 与扰动位涡拟能 $Z(t)$ 的上界估计，在判据3.1的条件成立的情形下，建立了类似于 (2.11)，(2.12) 式的估计：只需将那里的 k 换成矩阵M 的最小特征值 k_1，再令 $F = 0$，并将 $\|\Psi^*\|$ 换成 $\|\Psi^*\| = \left(\sum_{i=1}^{N}\int d_i \left|\Psi_i^*\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}$ 即可。

若矩阵M 不是正定的，且其最小特征值 $k_1 < 0$，这时基本态 (Ψ, Q) 可能是非线性不稳定的。类似于上节，我们最近得到了在 (3.4)，(3.6) 式成立的条件下，若初始扰动场 $H < 0$，则成立

$$E(t) \geq E^* - H + \min_i (C_{1i}) Z_{\min} \tag{3.9}$$

$$Z(t) \geq Z_{\min} + Z^* \tag{3.10}$$

现在我们转向讨论经典的 Phillips 模型的非线性稳定性[26]：在每一层，定常态为

$$\Psi_i(y) = -U_i y, \quad Q_i(y) = (-1)^{i+1} F_i U_s y + f_0 + \beta y, \quad i = 1, 2 \tag{3.11}$$

这里 U_1，U_2 分别是上、下层的速度（常数），$U_s = U_1 - U_2$，区域 D 是纬向周期通道：$\{-\pi \leq x \leq \pi, -L \leq y \leq L\}$。在文献 [29] 中，我们证明了，当下述条件之一成立时，定常态 (3.11) 是非线性稳定的：

(1) $U_s = -\beta/F_1$，且 $\lambda^2 > F_1 (F_1 + F_2)$；

(2) $U_s = \beta/F_2$，且 $\lambda^2 > F_2 (F_1 + F_2)$；

(3) $-\beta/F_1 < U_s < \beta/F_2$；

(4) $U_s < -\beta/F_1$，或 $U_s > \beta/F_2$，且

$$\lambda^2 - 2F_1F_2 + (F_1 - F_2)\beta/U_s > 0 \qquad (3.12)$$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 4F_1F_2)U_s^2 + 2U_s\beta(F_1 - F_2)\lambda^2 + (F_1 + F_2)^2\beta^2 > 0 \qquad (3.13)$$

上述条件的物理意义是清楚的: 对于临界情形 (1) 与 (2), 若最小波数 $\lambda^{1/2}$分别大于对应的临界值, 则基流是非线性稳定的. 条件 (3) 说明, 当上、下层的速度切变不超过临界值$-\beta/F_1$与β/F_2时, 基流也是非线性稳定的. 对于条件 (4), 注意到用标准模方法考察 Phillips 模型得到的线性不稳定的充分条件是[26]: 波数 K 满足

$$\beta^2(F_1 + F_2)^2 + 2\beta U_s(F_1 - F_2)K^4 - K^4U_s^2(4F_1F_2 - K^4) < 0 \qquad (3.14)$$

显然, 充分大的波数 K 将不满足 (3.14) 式, 这就是二层 Phillips 模型斜压不稳定性的短波截断现象. 因为 $\lambda^{1/2}$恰为最小波数, 若 (3.14) 式对所有的波数 K 都不成立, 则 (3.13) 式成立或 (3.13) 式左端为零 (对应于中性稳定情形). 因而, (3.13) 式恰对应于边缘稳定曲线, 并且揭示了短波截断现象的非线性特征.

最后, 若 $\beta = 0$, 则对于非平凡的$U_s \neq 0$, 上述稳定性条件变为 $\lambda^2 > 4F_1F_2$, 这与文献 [30] 的结果是相同的.

我们指出, 上述非线性稳定的充分条件在下述意义下是最优的: 若上述条件被破坏, 除去若干临界情形外, 一定存在某一周期充分大的纬向周期通道, 在其中存在正规模形式的随时间指数增长的波, 因而基流是线性不稳定的[31, 32].

对于一般的多层准地转模型 (层间密度跃度不同, 顶层与底层边界可以是自由的, 亦可以是固壁的), 在文 [33] 中, 用能量-Casimir 方法考察了其运动的非线性稳定性. 在文 [34] 中, 也讨论了二层广义 Phillips 模型 (每一层的 速度为常数, 上、下层边界可以是固壁的, 也可以是自由的). 结果表明, 对于大尺度海洋运动, 自由表面对运动的稳定性的影响可以忽略; 而对于大尺度大气运动, 自由表面近似对运动稳定性的影响是不可忽略的.

4 三维连续层结准地转运动的非线性稳定性

考察三维 (连续层结) 的准地转运动的非线性稳定性, 其控制方程为[26]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} + \partial(\Phi, P) = 0, && \text{在 }\Omega\text{ 中} \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \partial\left((\Phi, \Phi_z + \frac{N^2}{f_0}h\right) = 0, && z = z_0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \partial(\Phi, \Phi_z) = 0, && z = z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

这里 Φ (x, y, z, t) 为流函数, 位涡

$$P = \nabla^2\Phi + \frac{f_0^2}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0}{N^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + f_0 + \beta y \qquad (4.2)$$

ρ_0 (z), N (z) 分别是密度函数与浮力频率, z 是垂直方向坐标, $0 \leq z_0 \leq z \leq z_1 < \infty$, 区域 $\Omega = D \times (z_0, z_1)$, 其余记号意义同前. 水平侧边界条件仍为式 (2.3).

考察 (4.1), (4.2) 及 (2.3) 式的定常态 $(\Phi, P) = (\Psi, Q)$. 设存在一元连续可导函数 $\Psi(\cdot)$, $\Psi_i(\cdot)$, $i = 0, 1$, 使得

$$\left.\begin{aligned} &\Psi(x, y, z) = \Psi(Q(x, y, z)), && \text{在 }\Omega\text{ 中} \\ &\Psi(x, y, z_i) = \Psi_i(B_i), && i = 0, 1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

这里$B_0 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{N^2}{f_0}h\right)\Big|_{z=z_0}$, $B_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial z}\Big|_{z=z_1}$. 叠加在 (Ψ, Q) 之上的有限振幅扰动 (ψ, q) 定义为

$$\Phi = \Psi + \psi, \quad P = Q + q$$

对应于Arnol'd第二定理，设 $\Psi(\cdot)$，$\Psi_i(\cdot)$ 均为单调下降函数，且存在常数 C_1，C_2，C_{1i}，C_{2i}，$i = 0, 1$，使得

$$\left.\begin{aligned} &0 < C_1 \le -\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}Q \le C_2 < \infty \\ &0 < C_{1i} \le (-1)^{i+1}\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}B_i} \le C_{2i} < \infty, \quad i = 0, 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

作者等[35]通过精细的先验估计，建立了用初始扰动场给出的扰动能量，扰动位涡拟能及扰动边界能量的上界估计，从而成功地建立了对应于Arnol'd第二定理的非线性稳定性判据　此后，作者等[36]又进一步改进了文献［35］的结果　定义

$$F_1 = \frac{\max\limits_{[z_0, z_1]} f_0^2(\rho_0/(|z_1 - z_0|N^2) + |\partial(\rho_0/N^2)/\partial z|)}{\max\limits_{[z_0, z_1]} \rho_0}$$

$$F_2 = f_0^2 \max_{[z_0, z_0]}(1/N^2)$$

我们有

判据4.1　设定常态 (Ψ, Q) 满足（4.3），（4.4）式，且

$$C_1\left[\lambda - F_1\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{11}}\right) - F_2\left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{11}}\right)^2\right] > 1 \tag{4.5}$$

则它是非线性稳定的

最近，作者及同事[37]更进一步改进了上述结果，现简要介绍如下：记 $U(z, \mu)$ 与 $V(z, \mu)$ 分别为二阶常微分方程

$$\left(\frac{\rho_0 f_0^2}{N^2} v_z\right)_z + \mu\rho_0 v = 0, \quad z \in (z_0, z_1)$$

满足下述条件之解

$$U(z_0, \mu) = 1, \quad U_z(z_0, \mu) = 0; \quad V(z_1, \mu) = 0, \quad V_z(z_1, \mu) = 1$$

再令 $m = \frac{1}{C_1} - \lambda$，我们有

判据4.2　若基本态 (Ψ, Q) 满足（4.3），（4.4）式，$m < 0$，且

$$\begin{aligned} &C_{10}U(z_1, m) + C_{11}V_z(z_1, m) - [\{C_{10}U(z_1, m) - C_{11}V_z(z_1, m)\}^2 \\ &\quad + 4C_{10}C_{11}\rho_0(z_0)N^2(z_1)]/[\rho(z_1)N^2(z_1)]^{1/2} - 2V(z_1, m) > 0 \end{aligned}$$

则基本态是非线性稳定的

因篇幅所限，这里略去了关于扰动能量，扰动位涡拟能及扰动边界能量的有关估计，有兴趣的读者可参阅上述有关文献

现在讨论经典的Eady模型的非线性稳定性　Eady模型是一个高度简化的三维准地转模型，但它抓住了大尺度大气运动的特征，成功地揭示了斜压不稳定性[3]．在Eady模型中，区域 D 是周期纬向通道，$\beta = 0$，也不考虑地形的影响，即 $h = 0$，密度 ρ_0 与浮力频率 N 均为常数，定常态为

$$U = \Lambda z, \quad V = 0; \quad \Psi = -\Lambda yz, \quad Q = f_0 \tag{4.6}$$

这里 Λ 是任一给定常数

显然，除了 $U = 0$ 这一平凡情形外，定常态（4.6）式不满足（4.3），（4.4）式，因而上述判

据这里不适用. 在文献 [38] 中, 我们指出, 利用能量守恒及纬向动量守恒构造的泛函不以定常态 (4.6) 式为临界点, 用通常证明Arnol'd 第二定理的办法似乎难以研究其非线性稳定性. 但是, 这时扰动位涡拟能也是守恒量. 利用这一性质, 作者等[38]克服了定常态非临界点之困难, 建立了以初始扰动场给出的扰动能量与扰动边界能量的上界估计. 当初始扰动场趋于零时, 该类上界估计关于时间一致地趋于零, 从而建立了一个非线性稳定性判据, 它与用正规模方法得到的线性稳定性判据仅相差一个系数因子. 最近, 作者等[39]又进一步深入研究了这一问题, 得到了

判据4.3 若纬向周期通道南北方向的宽度 $|Y_2 - Y_1|$ 与垂直方向的高度 $|z_1 - z_0|$ 满足

$$\frac{\pi}{|Y_2 - Y_1|} > W_0 \frac{f_0}{N|z_1 - z_0|} \tag{4.7}$$

则基本态 (4.6) 是非线性稳定的, 这里 W_0 是方程 $(W_0/2)\tanh(W_0/2) = 1$ 的根 ($W_0 \doteq 2.3994$).

由 Eady 模型的线性稳定性理论可知[26], 判据4.3在下述意义下是最优的: 若条件 (4.7) 式被破坏, 则一定存在某一周期纬向通道, 在其中存在随时间指数增长的正规模形式的波, 因而是线性不稳定的.

不等式 (4.7) 的物理解释即是经典的"短波截断"现象. 我们指出, 虽然 (4.7) 式的表达形式与线性稳定性判据完全一样, 但却具有不同的物理意义: 判据4.3适用于任意空间结构的有限振幅扰动, 而用正规模方法得到的线性稳定性判据仅适用于单波形式的小扰动.

对于球坐标系下的三维连续层结准地转模式, 作者及其同事[40,41]也研究了其运动的稳定性. 因为篇幅限制, 这里从略.

5 扰动发展的上界估计与饱和问题

当基本态是不稳定时, 叠加在其上的初始扰动 (包括无穷小扰动) 究竟如何发展?其性态如何? 这是不稳定理论十分关心的一个重要问题. 显然, 线性不稳定理论难以回答上述问题. 标准模方法给出的不稳定波, 其振幅随时间以指数形式无限制增长, 这显然不符合实际情况. 事实上, 线性理论只在扰动发展的初始阶段有效, 当扰动发展到有限振幅时, 非线性项便不能被忽略了. 弱非线性理论虽然提供了一种获取扰动振幅发展之信息的方法, 但正如前文所指出的, 其结果的有效性必须借助其它方法 (例如数值方法) 加以验证. 显然, 这是该理论的不足之处.

在非线性稳定性研究中, 研究者使用能量-Casimir 方法, 不仅建立了非线性稳定性判据, 还成功地以初始扰动场给出了一些重要物理量 (例如扰动能量, 扰动位涡拟能及扰动边界能量) 的上界估计. 这类估计的一个重要特点是: 它关于有限振幅的扰动成立. 利用这一性质, 文献 [18] 提出了一个新方法, 用来研究叠加在不稳定基流之上扰动发展的上界及其饱和问题: 通过选取一族稳定的基本态 (人为构造的), 将叠加在不稳定基流之上的扰动分解成两部分, 其一为相对于该稳定基流的扰动, 其二为稳定基流与不稳定基流之间的偏差. 第一部分可用叠加在稳定基流之上扰动变化的上界而加以估计. 再通过一些数学处理, 即可得到叠加在不稳定基流之上扰动的能量, 位涡拟能等的上界估计.

作者等建立了适用于初值的扰动与模式中参数扰动的非线性稳定性判据及有关上界估计[42,43]. 利用关于参数扰动成立的特点, 作者[42]推广了上述方法, 讨论了两维正压不稳定流的扰动发展的上界问题, 得到了一些更优的结果.

显然，利用 Shepherd 方法建立饱和上界时，两个因素至关重要，即基本气流的选取与叠加在其上扰动的估计；可供选取的基本气流越多，有关估计越精细，一般可期望得到更优的结果 如上文所述，研究人员近来得到了一类对应于 Arnol'd 第二定理的非线性稳定性判据，并且建立了关于叠加于稳定基流之上扰动的一些上界估计，这些成果在上述两方面都为研究人员考察饱和问题提供了条件 基于这一思路，文献［44］讨论了两维平行切变流正压不稳定的饱和问题，文［45］考察了三层 Phillips 模型斜压不稳定性的饱和问题

上述工作主要涉及准地转运动非线性不稳定性的饱和问题 下面我们简单介绍关于非线性对称不稳定性饱和问题的一些结果 对称不稳定性是大气动力学中的一个经典问题 早期关于该问题的兴趣主要在于轴对称的行星环流的研究 70年代中期，产生了（湿）对称不稳定性导致中尺度锋面雨带形成的理论，使人们关于对称不稳定的研究又得到了发展 关于非线性对称不稳定性的研究，有兴趣的读者可参见文献［46～48］

考察 f-平面上非流体静力平衡的绝热的 Boussinesg 方程组，在所有场变量与 y 坐标无关的对称性条件下，控制方程可写成[47]

$$\omega_t = -\partial(\Psi, \omega) + \partial(m, fx) + \partial(\theta, gz/\theta_0) \tag{5.1}$$

$$m_t = -\partial(\Psi, m), \quad \theta_t = -\partial(\Psi, \theta) \tag{5.2a, b}$$

这里（x，y，z）是空间坐标，（u，v，w）是速度场，流函数 Ψ 与涡度 ω 分别由 $\Psi_z = u$，$-\Psi_x = w$，$\omega = u_z - w_x = \nabla^2\Psi$ 定义，$\partial(F, G) = F_zG_x - F_xG_z$ 是（x，z）平面上的两维 Jacobi 算子，$m = v + f_0$ 是绝对速度的 y 分量，θ 与 θ_0 分别是位温与（常数）参考位温 在（x，z）平面上的有界单连通区域 D 中考察问题，边界条件是流函数 Ψ 在边界上为零

基本气流满足热成风方程

$$\left.\begin{aligned} V^{(0)} &= \tilde{N}(1+\epsilon)z, \quad \omega^{(0)} = 0 \\ \theta^{(0)} &= \frac{\theta_0\tilde{N}^2 z}{g} + \theta_0\tilde{N}f_0(1+\epsilon)\frac{x}{g} \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

这里 Brunt-Vaisala 频率 $\tilde{N}$ 是常数，$\epsilon > 0$ 是超临界数 因为 Richardson 数 $Ri = 1/(1+\epsilon)^2 < 1$，该基本气流是不稳定的[47] 在（5.3）上叠加一扰动（$v^{(1)}$，$\omega^{(1)}$，$\theta^{(1)}$），将其作为（5.1），（5.2a，b）的初值，由于不稳定性，扰动（$v^{(1)}$，$\omega^{(1)}$，$\theta^{(1)}$）将发展起来 我们的目的是给出任意时刻扰动（可能发展成有限振幅）

$$\omega'(t) = \omega(t), \quad m'(t) = m(t) - M, \quad \theta'(t) = \theta(t) - \Theta$$

的动能的上界估计 Cho 等[47]在矩形区域 $D = \{-L/2 \le x \le L/2, -H/2 \le z \le H/2\}$ 中考察了这一问题，在（$v^{(1)}$，$\omega^{(1)}$，$\theta^{(1)}$）为无穷小扰动的条件下，给出了扰动动能的上界估计 最近，作者等[48]通过精细的估计，在同样的条件下，建立了下述估计

$$\frac{1}{2}\int |\nabla\Psi'(t)|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \le \begin{cases} \dfrac{1}{6}H^3L\tilde{N}^2\epsilon(2+\epsilon), & \text{当 } \tilde{N}^2H^2 \ll f_0^2 \text{ 时} \\ \dfrac{1}{6}HL^3f^2\epsilon(2+\epsilon), & \text{当 } \tilde{N}^2H^2 \gg f_0^2L^2 \text{ 时} \end{cases}$$

容易说明上述结果较文献［46，47］中的估计更优

6 讨 论

随着非线性大气科学的发展, 通过研究者的不懈努力, 在研究大气运动的非线性不稳定性方面, 能量-Casimir 方法取得了令人瞩目的成果 目前, 该领域的研究正向着理论探讨的进一步深化与实际应用紧密结合两方面发展

首先, 在理论研究方面, 研究者正从广度与深度两方面继续探索 在广度方面, 能量-Casimir 方法的应用领域正日益扩大, 它揭示了正压不稳定, 斜压不稳定, 对称不稳定性, 等等; 研究了准地转模式, 半地转模式[49], 锋地转模式[50]等 在深度方面, 地球流体力学中的Hamilton 理论有了很大发展[51, 52]. Noether 定理告诉我们, 一个Hamilton 系统的物理守恒性与其几何对称性之间存在着对应关系 能量-Casimir 方法的要点是利用物理守恒性构造不变泛函, 具有鲜明的几何特征 可以预期, 使用Hamilton 理论研究非线性不稳定性, 是将几何、物理与分析方法结合起来的有效途径之一, 值得我们去进一步深入探讨

另一方面, 用能量-Casimir 方法得到的成果, 也在不稳定性研究的其它领域获得了重视 除了前文所述关于非线性不稳定性饱和问题的研究之外, Vanneste[31, 53] 关于爆发性共振的研究, 在探讨非线性不稳定的机制方面, 作了很有价值的工作

在应用方面, 研究者开始使用能量-Casimir 方法所得到的理论成果去研究大气与海洋运动中的一些实际问题 Dowling[54]利用木星上中纬度对流层的观测资 料, 发现其位涡与流函数恰好满足线性关系式, 他成功地用Arnol'd 第二定理说明了木星上纬向风场是中性稳定的 在这一工作的启发下, Dowling[55]对Arnol'd 第二定理的重要性作出了很高的评价 他指出: 对于前人关于地球大气运动不稳定性的有关结果, 也应该运用这些新的理论成果, 去重新探讨其意义与价值

70年代中期以来, Modon 的非线性稳定性研究一直颇受重视 研究者期望用Modon 的稳定性去研究阻塞维持的机制[56]. 虽然一些作者声称解决了Modon 的非线性稳定性, 但进一步的研究表明这些工作是不严格的, 其正确性受到了另外一些学者的质疑[57, 58]. Modon 的非线性稳定性仍然是一个悬而未决的问题, 一些学者正在这方面进行着不懈的努力[59]. 可以预期, 这一领域的研究成果, 可能会在研究阻塞维持的机制方面, 发挥重要作用

在将能量-Casimir 方法的理论成果应用于大气运动中的具体问题时, 首先必须解决"基本气流"的确定问题 在线性稳定性理论中, 通常对资料作时间及纬向平均, 并将其作为基本气流 一段时间以来, 人们倾向于对资料场作时间平均, 而得到基本气流 一般地, 这种基本气流是非纬向流 但是, 这种方法得到的基本态, 是否为所采用的控制方程 (保守系统或耗散系统) 的平衡态, 是需要加以验证的, 而这点有时被人们或多或少地忽略了. 在大气动力学的研究中, 在一定意义上, "基本气流"的确定包含了人为的因素 一些研究表明, 某类天气系统, 对一种基本气流, 它是不稳定的; 而相对于另一种基本气流, 它又是稳定的 (当然, 这还与所采用的稳定性的定义有关). 因此, 如何合适地"选取"基本气流, 对于进一步深化与发展理论成果的应用, 是至关重要的 同时, 这一问题本身也具有重要的理论意义

能量-Casimir 方法的理论成果的另一个重要应用领域是计算地球流体力学 随着电子计算机的高速发展, 数值试验与数值模拟已成为大气科学研究中的最重要的手段之一 大气运动的不稳定性研究中, 数值方法也扮演着越来越重要的角色 但是, 一个重要的问题一直令人困惑, 即如何区分计算不稳定性与动力不稳定性 当数值试验或数值模拟中出现不稳定现象时, 我们需要弄清它究竟是计算不稳定性还是动力不稳定性引起的[60]. 用能量-Casimir 方法得到的非线性稳定性判据以及所建立的有关扰动演变的上、下界估计, 提供了一种检验数值格式的比较有

效的方法 若基本态是非线性稳定的，而数值试验或模拟中出现不稳定现象，则提示我们这是计算不稳定性引起的，必须修改数值格式或采用另外更有效的格式 孙左令[28]的工作在这方面作了有益的尝试，深入的探讨正在进行之中

参 考 文 献

1 Rayleigh L. On the stability or instability of certain fluid motions *Proc Lond Math Soc*, 880, 11: 57～70

2 Charney J G. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current *J Meteor*, 1947, 4: 135～162

3 Eady E T. Long waves and cyclone waves *Tellus*, 949, 1: 33～52

4 Kuo H L. Dynamical instability of two- dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere *J Meteor*, 1949, 6: 105～122

5 Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex *Geophys Publ*, 1950, 17: 1～52

6 Charney J G, Stern M E. On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere *J Atmos Sci*, 1962, 19: 159～172

7 Lu P S, Lu L, Zeng Q C. The spectra of barotropic quasi-geostrophic model and the evolution of disturbances *Scientia Sinica*, Ser B, 1987, 30: 426～437

8 任舒展 准地转模型中的连续谱动力学理论及其在大气环流中的应用 ［博士论文］ 中国科学院大气物理研究所，1993. 188 (Ren Shuzhan. Continuous spectrum dynamics in the quasi-geostrophic models and its application to atmospheric circulations *PhD Thesis* Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, 1993, (in Chinese)

9 Pedlosky J. Finite-amplitude baroclinic waves *J Atmos Sci*, 1970, 27: 15～30

10 Arnol'd V I Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid *Dokl Akad Nauk USSR*, 1965, 162: 975～978 English Transl: *Soviet Math*, 965, 6: 773～777

11 Arnol'd V I On a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability. *Izv Vyssh Uchebn Zaved, Matematika*, 1966, 54: 3～5 English Transl: *Am Math Soc Transl*, Series 2}, 1969, 79: 267～269

12 Holm D D, Marsden J E, Ratiu T, Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria *Phys Rep*, 1985, 123: 1～116

13 Abarbanel H D I, Holm D D, Marsden J E, Ratiu T. Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria *Phil Trans Roy Lond*, 986, 318 (A): 349～409

14 Benzi R, Pierini S, Vulpiani A, Salusti E. On nonlinear hydrodynamic stability of planetary vortices *Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 1982, 20: 293～306

15 Andrews D G. On the existence of nonzonal flows satisfying sufficient conditions for stability. *Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 1984, 28: 243～256

16 McIntyre M E, Shepherd T G. An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to nonparallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Aronl'd's stability theorems *J Fluid Mech*, 1987, 181: 527～565

17 Zeng Q C. Variational principle of instability of atmospheric motion *Adv in Atmos Sci*, 1989, 6: 137～172

18 Shepherd T G. Rigorous bounds on the nonlinear saturation of instabilities to parallel shear flows *J Fluid Mech*, 988, 196: 291～322

19 Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability, Part I: The two-layer model *J Atmos Sci*, 1988, 45: 2014～2025

20 Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability, Part II: Continuously-stratified fluid *J Atmos Sci*, 1989, 46: 888～907

21 Carnevale G F, Shepherd T G. On the interpretation of Andrews' theorem. *Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 990, 51: 1～17

22 Swaters G E. A nonlinear stability theorem for baroclinic quasigeostrophic flow. *Phys Fluids*, 1986, 29: 5～6

23 Vladimirov V A. Conditions for nonlinear stability of flows of an ideal incompressible liquid *J Appl Mech Tech Phys*, 1986, 27 (3): 382～389

24 Frederiksen J S. Nonlinear stability of baroclinic flows over topography. *Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 991, 57: 85～97

25 Ripa P. Arnol'd's second stability theorem for the equivalent barotropic model *J Fluid Mech*, 1993, 257: 597～605

26 Pedlosky P. *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, 1979

27 Mu Mu, Shepherd T G. On Arnol'd's second nonlinear stability theorem for two-dimensional quasi-geostrophic flow. *Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 994, 75: 21～37

28 孙左令. 一类非线性运动稳定性问题的数值研究 [硕士论文]. 中国科学院大气物理研究所, 1995

29 Mu Mu, Zeng Q C, Shepherd T G, Liu Y M. Nonlinear stability of multilayer quasi-geostrophic flow. *J Fluid Mech*, 994, 264: 165～184

30 Ripa P. Wave energy- momentum and pseudoenergy-momentum conservation for the layered quasi-geostrophic instability problem. *J Fluid Mech*, 992, 235: 379～398

31 Vanneste J. Explosive resonant interaction of baroclinic Rossby waves and stability of multilayer quasi- geostrophic flow. *J Fluid Mech*, 995, 291: 83～107

32 穆穆. 二层Phillips模型的非线性稳定性判据的最优性的讨论. 科学通报, 1998, 待发表

33 Liu Y M, Mu Mu. Arnol'd's second nonlinear stability theorem for general multilayer quasi-geostrophic model. *Adv in Atmos Sci*, 1994, 11: 36～42

34 Li Yang, Mu Mu. Baroclinic instability in the generalized Phillips model. Part I: two-layer model. *Adv in Atmos Sci*, 996, 13: 127～137

35 Mu Mu, Wang X Y. Nonlinear stability criteria for the motion of three-dimensional quasi-geostrophic flow on a beta-plane. *Nonlinearity*, 992, 5: 353～371

36 Mu Mu, Simon J. A remark on nonlinear stability of three-dimensional quasi- geostrophic motions. *Chinese Science Bulletin*, 993, 38 (23): 1978～1984

37 Liu Yongming, Mu Mu, Shepherd T G. Nonlinear stability of continuously stratified quasi-geostrophic flow. *J Fluid Mech*, 1996, 325: 419～439

38 Mu Mu, Shepherd T G. Nonlinear stability of Eady's model. *J Atmos Sci*, 994, 51: 3427～3436

39 Liu Y, Mu Mu. Nonlinear stability theorem for Eady's model of quasi-geostrophic baroclinic flow. *J Atmos Sci*, 996, 53: 1459～1463

40 Mu Mu, Zeng Qingcun. Criteria for the nonlinear stability of three-dimensional quasi-geostrophic motions. *Adv in Atmos Sci*, 1991, 8: 1～10

41 Li Y, Mu Mu. On the nonlinear stability of three-dimensional quasi-geostrophic motions in spherical geometry. *Adv in Atmos Sci*, 1995, 12: 203～216

42 Mu Mu. Nonlinear stability of two-dimensional quasi-geostrophic motions. *Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 1992, 65: 57～76

43 Mu Mu. Nonlinear stability criteria for motions of multilayer quasi-geostrophic flow. *Science in China*, B, 1991, 34: 1516～1528

44 Xiang Jie, Mu Mu. Saturation of nonlinear instability to parallel flow. *Progress in Natural Science*, 997, 7: 239～243

45 Paret J, Vanneste J. Nonlinear saturation of baroclinic instability in a three-layer model. *J Atmos Sci*, 1996, 53: 2905～2917

46 Xu Q. Generalized energetics for linear and nonlinear symmetric instability. *J Atmos Sci*, 1986, 43: 972～984

47 Cho H R, Shepherd T G, Vladimirov V A. Application of the direct Liapunov method to the problem of symmetric stability in the atmosphere. *J Atmos Sci*, 993, 50: 822～836

48 Mu Mu, Shepherd T G, Swanson K. On nonlinear symmetric stability and the nonlinear saturation of symmetric instability. *J Atmos Sci*, 996, 53: 2918～2923

49 Kushner P J, Shepherd T G. Wave activity conservation laws and stability theorems for semi- geostrophic dynamics, Part II: Pseudoenergy-based theorem. *J Fluid Mech*, 995, 290: 105～130

50 李扬. 大气和海洋运动中的准地转模式和锋地转模式的非线性稳定性 [博士论文]. 中国科学院大气物理研究所, 1995. 120 (Li Yang. Nonlinear stability of quasi-geostrophic models and frontal geostrophic models in the atmosphere and ocean. *PhD Thesis*, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Science. 1995 (in Chinese)).

51 Shepherd T G. Symmetries, conservation laws and Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics. *Advances in Geophysics*, 990, 32: 287～338

52 Holm D D. Hamiltonian balance equations. *Physica* D, 1996, 98: 379～414

53 Vanneste J, Vial F. On the nonlinear interaction of geophysical waves in shear flows. *Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 994,

78: 115～141
54 Dowling T E. A relationship between potential vorticity and zonal wind on Jupiter. *J Atmos Sci*, 993, 50 (1): 14～22
55 Dowling T E. Dynamics of Jovian Atmospheres. *Annu Rev Fluid Mech*, 995, 27: 293～334
56 McWilliams J C. An application of equivalent modons to atmospheric blocking. *Dyn Atoms Oceans*, 1980, 5: 43～66
57 Nycander J. Refutation of stability proofs for dipole vortices. *Phys Fluids*, 992A, 4: 467～476
58 Ripa P. Comments on a paper by Sakuma and Ghil. *Phys Fluids*, 1992A, 4: 460～463
59 Haupt S E, McWilliams J C, Tribbia J J. Modons in shear flow. *J Atmos Sci*, 1993, 50: 1181～1198
60 **曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷. 北京: 科学出版社**, 1979. 543 (Zeng Q C. The Physical-Mathematical Basis of Numerical Weather Prediction. Vol. 1. Beijing: Science Press, 1979 (in Chinese))

ENERGY-CASIMIR METHOD IN THE STUDY OF NONLINEAR STABILITY OF THE ATMOSPHERIC MOTIONS

Mu Mu
LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

Abstract This paper summarizes some recent advances in the study of nonlinear instability of the atmospheric and oceanic motions by using energy-Casimir method (Arnol'd's method). Nonlinear stability criteria established for finite-amplitude disturbance due to an arbitrary spatial structure are presented. Upper and lower bounds of the disturbance field in terms of the initial state are obtained, which provide the information on the behaviour of the evolution of the disturbance. The prospects of the further development of the theory and its applications are also discussed.

Keywords stability, nonlinear, atmosphere, ocean, energy-Casimir method