第28卷 第1期 力 学 进 展 Vol.28 No.1
1998年2月25日 ADVANCES IN MECHANICS Feb.25, 1998

非完整系统稳定性的若干进展*

朱海平
北京大学力学与工程科学系,北京 100871

梅凤翔
北京理工大学应用力学系,北京 100081

摘 要 介绍非完整系统稳定性理论的某些近代进展,包括非完整系统平衡位置关于全部变量的稳定性,平衡状态流形的稳定性,平衡位置关于部分变量稳定性及其与关于全部变量的稳定性的关系,平稳运动的稳定性,以及非完整控制系统的镇定.同时,讨论非完整系统稳定性的几个主要应用,并给出几个未来研究方向的建议.

关键词 非完整系统,稳定性,平稳运动,流形,反馈,镇定

1 引 言

自从 Whittaker[1]于1904年首先提出非完整系统的平衡位置稳定性以来,许多学者在这一领域做了大量的研究,得到不少有意义的结果[2~37].

不同于完整系统,由于非完整约束的影响,非完整系统的平衡位置往往不是孤立的,而组成维数与非完整约束方程有关的流形,特别是对于受有线性或非线性齐次非完整约束的力学系统,其维数不小于齐次约束方程的数目;非完整系统的特征行列式一般是非对称的,且特征方程有数目与系统所受非完整约束有关的零根.另外,非完整系统的运动方程可能存在平稳解,但却没有循环积分,且非完整约束方程中显含循环坐标.

根据非完整系统平衡位置的特性,以往对非完整系统平衡稳定性的研究分为两个方面:第一方面为平衡位置在 ляпунов意义下的稳定性,包括关于全部变量稳定性和关于部分变量稳定性等. Bottema[2], Aйзерман和 Гантмахер[3], Карапетян[4], Румянцев[5,6]和 Козлов[7]等的研究属于此类问题;第二部分为平衡状态流形的稳定性.此类稳定性的特点是,考虑充分接近未扰运动的扰动运动,当 $t\to\infty$时,在平衡状态流形附近的运动特性. Неймарк和 Фуфаев[8,9], Lilov[10]等研究了此类问题. 1965年以来, Семенова[11], Сумбатов[12], Неймарк和 Фуфаев[13], Карапетян[14~16]等考虑了非完整系统平稳运动的稳定性及镇定,得到不少重要结果.近10年以来,非完整控制系统的镇定问题受到极大关注,许多学者在理论、计算和实验等方面做了大量的工作.同时,在非完整系统稳定性的应用方面,也取得了不少进展.

2 非完整系统稳定性理论的近代发展

2.1 平衡位置关于全部变量的稳定性

设力学系统所受完整约束是定常的,其位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$确定,系统的运动受有 g个定常的非完整约束

*国家自然科学基金资助项目,高校博士点专项科研基金资助课题
收稿日期:1996-01-23,修回日期:1997-09-26

$$\dot q_{\varepsilon+\beta} = \phi_\beta(q_s, \dot q_\sigma) \quad (s = 1, \cdots, n; \beta = 1, \cdots, g; \sigma = 1, \cdots, \varepsilon; \varepsilon = n - g) \tag{1}$$

系统的运动方程可表为改进后的 Чаплыгин方程形式[17]

$$E_\sigma(T^*) - \sum_{\beta=1}^{g}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\right\}^* E_\sigma(\phi_\beta) - \sum_{\beta=1}^{g}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\right\}^* \frac{\partial \phi_\beta}{\partial \dot q_\sigma} = \frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \phi_\beta}{\partial \dot q_\sigma} + Q_\sigma^*$$

$$(\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{2}$$

其中 $E_\sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot q_\sigma} - \frac{\partial}{\partial q_\sigma}$ 为 Euler 算子 ,f^* 表示函数 $f = f(q_s, \dot q_s)$ 中嵌入约束(1) , T 为系统的功能 , U 为力函数 , Q_σ 为系统的非有势力. 设

$$q_s = q_{s0}, \quad \dot q_\sigma = 0 \tag{3}$$

为系统(1) (2) 的平衡位置. 令

$$q_\sigma = q_{\sigma 0} + x_\sigma, \quad q_{\varepsilon+\beta} = q_{\varepsilon+\beta,0} + x_{\varepsilon+\beta} + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\partial \phi_\beta}{\partial \dot q_\sigma}\right\}_0 x_\sigma \tag{4}$$

其中$\{\quad\}_0$ 表示将式(3) 代入括号中的表达式. 将式(4) 分别代入(2) (1) 中 ,可以得到非完整系统的扰动方程. 去掉扰动方程中二阶及二阶以上小项 ,得到其近似方程

$$\sum_{h=1}^{\varepsilon} A_{\sigma h}\ddot x_h + \sum_{h=1}^{\varepsilon} B_{\sigma h}\dot x_h + \sum_{h=1}^{\varepsilon} C_{\sigma h}x_h + \sum_{\gamma=1}^{g} D_{\sigma,\varepsilon+\gamma}x_{\varepsilon+\gamma} = 0 \tag{5}$$

$$\dot x_{\varepsilon+\beta} + \sum_{h=1}^{\varepsilon} C_{\varepsilon+\beta,h}x_h + \sum_{\gamma=1}^{g} D_{\varepsilon+\beta,\varepsilon+\gamma}x_{\varepsilon+\gamma} = 0 \tag{6}$$

方程(5) (6) 的特征方程为

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} A_{\sigma h}\lambda^2 + B_{\sigma h}\lambda + C_{\sigma h} & D_{\sigma,\varepsilon+\gamma} \\ C_{\varepsilon+\beta,h} & \lambda + D_{\varepsilon+\beta,\varepsilon+\gamma}\end{pmatrix} = 0 \tag{7}$$

若系统仅受线性、齐次非完整约束

$$\dot q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} b_{\varepsilon+\beta,\sigma}(\mathrm{q})\,\dot q_\sigma \tag{8}$$

其中 $\mathrm{q} = (q_1, \cdots, q_n)^{\mathrm{T}}$. 则系统的平衡位置(3) 不是孤立的 ,而组成维数不小于约束方程数目的流形[8,9]. 这时 ,方程(6) 中 , $C_{\varepsilon+\beta,h} = D_{\varepsilon+\beta,\varepsilon+\gamma} = 0$,从而特征方程(7) 有 g 个零根. 1904 年 , Whittaker 在其著作中研究了此类系统的小振动和平衡稳定性问题[1] ,这个结果虽然缺乏普遍性 ,但却是非完整系统平衡稳定性研究方面的最先成果. 后来 ,文献[3]给出非完整系统平衡稳定性的一个充分条件.

定理 2.1.1 (M. A. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер[3]) 对于线性、齐次、定常的非完整系统 ,如果在其平衡位置邻域内特征方程(7) 的所有根 ,除数目等于非完整约束数目的零根外 ,都处于左半平面 ,那么平衡位置是稳定的(但非渐近稳定) . 此时 ,任意充分接近未扰运动的扰动运动 ,当 $t \to \infty$ 时 ,趋于平衡状态流形上的一点.

Карапетян[4]等对线性、齐次、定常的非完整系统给出了定理 2.1.1 的一些推论,把非完整系统平衡稳定性的原始问题转化为完整系统平衡稳定性问题,利用 Лянунов Малкин定理, Айзерман Гантмахер定理[3]以及 Ляпунов按一次近似的不稳定定理,进一步发展了以往的结果.

由定理 2.1.1 知,判断线性齐次非完整系统平衡位置的稳定性时,只需考虑以下方程的根

$$\det\left(A_{\sigma h}\lambda^2 + B_{\sigma h}\lambda + C_{\sigma h}\right) = 0 \tag{9}$$

定理 2.1.2 (A.V. Карапеяян[4]) 如果 $\det(C_{\sigma h}) < 0$,那么无论有无耗散力作用,线性齐次非完整系统的平衡位置都是不稳定的.

如果系统满足条件

$$\left\{\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial b_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\upsilon}} + \sum_{\gamma=1}^{g} b_{\varepsilon+\gamma,\upsilon}\frac{\partial b_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\right)\right\}_0 = \left\{\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial b_{\varepsilon+\beta,\upsilon}}{\partial q_{\sigma}} + \sum_{\gamma=1}^{g} b_{\varepsilon+\gamma,\sigma}\frac{\partial b_{\varepsilon+\beta,\upsilon}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\right)\right\}_0$$

$$(\sigma, \upsilon = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{10}$$

显然,当 U 中不显含广义坐标 $q_{\varepsilon+\beta}(\beta = 1, \cdots, g)$,或者 $\left(\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)_0 = 0$ 时,条件(10)成立. 这时,方程(9)中, $(C_{\sigma h}) = (C_{\sigma h})^T$.

定理 2.1.3 (A.V. Карапеяян[4]) 如果矩阵 $(C_{\sigma h})$ 的所有特征值是正的,那么在条件(10)下,线性保守非完整系统的平衡位置在一次近似下是稳定的.

定理 2.1.4 (A.V. Карапеян[4]) 如果矩阵 $(C_{\sigma h})$ 至少有一个负的特征值,那么在条件(10)下,无论有无耗散力作用,非完整系统的平衡位置都是不稳定的.

文献[5]考虑将 Lagrange 定理推广到非完整系统. 假设坐标原点为平衡位置,并设约束系数和力函数在平衡位置为零. 按 Ляпунов稳定性定理,得到

定理 2.1.5 (V.V. Румянцев[5]) 对于线性、齐次、定常的非完整系统,如果在平衡位置邻域内力函数是负定的,那么无论有无耗散力作用,平衡位置都是稳定的.

类似完整系统,按 Четеев不稳定性定理可以得到

定理 2.1.6 (V.V. Румянцев[5]) 对于线性、齐次、定常的非完整系统,如果在平衡位置无论多么小的邻域内,力函数 U 可取正值,并且在区域

$$T^* - U < 0, \quad \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} q_\sigma \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\sigma} > 0$$

表达式

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} q_\sigma\left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} b_{\varepsilon+\beta,\sigma}\right)$$

是变量 $q_\sigma(\sigma = 1, \cdots, \varepsilon)$ 的正定函数,那么平衡位置是不稳定的.

文献[7]给出一种研究一定条件下的"不稳定性定理"的方法. 对于线性、齐次、定常的非完整系统,用 $-t$ 代替 t 后,系统的运动方程不变,所以当系统存在渐近轨线 $q(t), \dot{q}(t) \to 0\ (t \to \infty)$ 时,平衡位置是不稳定的. 从而,可以利用求完整系统特殊渐近轨线的方法考虑一定条件下的不稳定性定理.

假设力函数 $U(\mathbf{q})$,动能矩阵 (a_{sk}) 和 $b_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 在原点邻域是解析的, $U(\mathbf{q})$ 满足 $\mathrm{d}U(0) = 0$,且在原点邻域 $U(\mathbf{q})$ 能展开为

$$U = U_{m+1} + U_{m+2} + \cdots, \quad m \geq 1 \tag{11}$$

这里 U_{m+1} 为 $m+1$ 阶齐次式. 定义集合

$$定理 = \left\{ \mathbf{q} \mid q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} b_{\varepsilon+\beta,\sigma}(0)\, q_\sigma;\ \beta = 1, \cdots, g \right. \tag{12}$$

并假设 $\hat{U}_{m+1}$表示 U_{m+1}仅在集合 Π_1 上取值,$\hat{U}_{m+1}: \Pi_1 \to R$.

定理 2.1.7 (V.V. Козлов[7]) 假设函数 $\hat{U}_{m+1}$在点 $q = 0 \in \Pi_1$ 上没有极大值,那么线性齐次约束的保守系统的平衡位置 $q = 0$, $\dot{q} = 0$ 是不稳定的.

文献[7]还得到其他一些特殊结果.后来,这一问题得到进一步研究[18].

文献[19]研究了 Чаплыгин系统,其中指出完整系统平衡稳定性的大部分结论都可推广到 Чаплыгин系统. 另外, Николенко[20], Risito[21], Николенко和 Коваленко[22], Laloy[23]及 Красинсий等学者得到线性、齐次、定常非完整系统平衡位置稳定与不稳定的一些更特殊的结果.近来,一般广义力对非完整系统平衡位置的影响也受到关注[25].

文献[26]将定理 2.1.1 的结论推广到一类非线性非完整系统.若非线性约束方程(1)中有 $m\ (0 \le m \le g)$个 ϕ_β满足$\phi_\beta(q_s, 0) \equiv 0$,那么系统的平衡位置组成维数不小于 m 的流形,且特征方程(7)中有 m 个零根.这时,有类似定理 2.1.1 的结果,即:若在平衡位置邻域内特征方程(7)的所有根,除 m 个零根外,都处于左半平面,那么平衡位置是稳定的.

若系统所受非完整约束都不满足 $\phi_\beta|_{\dot{q}=0} \equiv 0$,则平衡位置可能是孤立的.这时,可直接利用 Ляпунов稳定性的有关定理[38~43]来判断系统的稳定性.

注记 1 定理 2.1.5 对所有非完整系统都有很强的局限性.此定理中要求力函数在平衡位置的邻域内负定,这一条件只对平衡状态流形上的个别点可能成立,不可能对所有点都成立.

注记 2 类似完整系统,耗散力及陀螺力对非完整系统平衡位置的稳定性也有较大影响.但是,由于非完整系统的复杂性,对于一般定常非完整系统,特别是非齐次非完整约束系统,耗散力与陀螺力对稳定性的影响这一课题的研究结果还不多.对于 Чаплыгин系统,耗散力及陀螺力对完整系统平衡位置的稳定性影响的许多结论都可做相应的推广;对于线性、齐次、定常的非完整约束系统,在条件(10)成立时,关于完整系统的一些定理也已得到推广,这些工作可参看文献[33].

例 1[29] 一单位质量质点在空间中运动,其动能为 $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$,力函数为 $U = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$,非完整约束方程为 $\dot{z} = y\dot{x} + x^2\dot{y}$,耗散函数为 $F = \frac{1}{2}(\mu_1\dot{x}^2 + \mu_2\dot{y}^2 + \mu_3\dot{z}^2)$.平衡位置为

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \text{const}.$$

所有平衡位置组成维数为 1 的流形.由方程(7),给出特征方程

$$\lambda[\lambda^4 + (\mu_1 + \mu_2)\lambda^3 + (\mu_1\mu_2 + 2)\lambda^2 + \beta(\mu_1 + \mu_2)\lambda + 1] = 0$$

由 Routh-Hurwitz 判据及定理 2.1.1 知,只要 $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$,每个平衡位置都是稳定的.

例 2 若将上例中的力函数 U 改为 $U = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$,则由定理 2.1.2 知,系统平衡位置不稳定.

例 3 非匀质圆球在绝对粗糙水平面上的滚动[9,17].

2.2 平衡状态流形的稳定性

Неймарк和 Фуфаев[8,9]最先提出非完整系统平衡状态流形稳定性的概念,并把 Айзерман Гантмахер的结果移植到平衡状态流形.假设(3)式中 q_{s0}为平衡状态流形上的任意点,它依赖 g 个参数.

定理 2.2.1 (Ю. Н. Неймарк, Н. А. Фуфаев[8,9]) 对于线性、齐次、定常的非完整系统,如果特征方程(7)的所有根,除 g 个零根外,都在左半平面上,那么系统的平衡状态流形是渐近稳定的;如果方程(7)至少一个根在右半平面上,那么它是不稳定的.

适当加一些限制, Карапетян[4,19], Lolay[23]等的结果大多可应用于系统的平衡状态流形.对于广义 Чаплыин系统,可以得到较好的结果.广义 Чаплыгин系统中约束方程、动能及力函数不显含广义坐标 $q_{\varepsilon+\beta}$,其运动方程为

还得 些特

$$E_\sigma(T^*) - \sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^* E_\sigma(\phi_\beta) = \frac{\partial U}{\partial q_\sigma} \tag{13}$$

(13)中不含 $q_{\varepsilon+\beta}, \dot{q}_{\varepsilon+\beta}$,故可看成某一完整系统的运动方程.假设 $q_\sigma = q_{\sigma0}$ 为(13)的平衡位置.那么,当且仅当约束方程满足条件:$\phi_\beta(q_{\sigma0}, 0) = 0$ 时,上面的广义 Чаплыгин系统存在平衡位置,有形式

$$q_\sigma = q_{\sigma0}, \quad \dot{q}_\sigma = 0, \quad q_{\varepsilon+\beta} = \text{const}. \tag{14}$$

我们有结论:广义 Чаплыгин系统平衡状态流形稳定(渐近稳定,不稳定)当且仅当广义 Чаплыгин方程(13)的平衡位置关于 $q_\sigma, \dot{q}_\sigma$ 稳定(渐近稳定,不稳定).可以类似完整系统考虑(13)的稳定性.以此为依据,文献[27]分别利用第一近似方法及构造 Ляпунов函数的方法,得到广义 Чаплыгин系统平衡状态流形的一些稳定性判据.

定理 2.2.2[27] 对于广义 Чаплыгин系统,若其约束方程满足 $\phi_\beta(q_\sigma, 0) \equiv$,且力函数 U 在点 $q_\sigma = q_{\sigma0}$ 的充分小邻域负定,那么在关于独立广义速度为完全耗散的耗散力作用下,平衡状态流形是渐近稳定的.

定理 2.2.3[27] 对于广义 Чаплыгин系统,若其约束方程满足 $\phi_\beta(q_\sigma, 0) \equiv 0$,且力函数 U 在点 $q_\sigma = \sigma_{\sigma0}$ 的充分小邻域内非常负,那么在关于独立广义速度为完全耗散的耗散力作用下,其平衡状态流形是不稳定的.

取 Ляпунов函数为 $V = T^* - U$,利用 Красовский渐近稳定与不稳定性定理[30],可以证明上面两个定理.

文献[28]将定理 2.2.1 的结果推广到非线性非完整系统相对平衡状态流形的稳定性.对于某些力学系统,文献[44～46]建立了关于平衡位置集合的稳定性理论.文献[10]将 Ляпунов稳定性理论推广到非自治系统关于点集的稳定性,并通过构造 Ляпунов函数将此结论应用于一个特殊的非完整系统.文献[30]将非完整系统平衡状态流形的稳定性转化为相应完整系统在约束流形上的稳定性,得到一些稳定性判据,这些结果仅适用于广义坐标能反映运动整体性的系统.

非完整系统平衡状态流形稳定性是个十分困难的课题,还有许多问题,如:在大范围意义下,其严格的数学描述等.

例 4 考虑例 1 中的系统.由定理 2.2.1 知,当 $\mu_1, \mu_2 > 0$ 时,平衡状态流形是渐近稳定的.

例 5 非匀质圆球在绝对粗糙水平面上的滚动[9,17].

例 6 设力学系统的动能为 $T = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 - \dot{q}_2\dot{q}_3\sin q_1\right.$,力函数为 $U = -\frac{1}{2}$ $\left(q_1^2 + q_2^2\right.$,耗散函数为 $F = \frac{1}{2}\left(2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\sin^2 q_1 - 2\dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_1\right.$ (3 . 1 系 统

2.3 平衡位置关于部分变量稳定性

非完整系统的平衡位置往往不是孤立的,因此其关于部分变量的稳定性就显得尤为重要.类似完整系统关于部分变量稳定性的研究方法,可以得到

定理 2.3.1 (B B Румянцев[5]) 对于线性、齐次、定常的非完整系统,如果在平衡位置邻域内力函数关于变量 $q_\sigma(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$ 是负定的,那么无论有无耗散力作用,平衡位置关于部分变量 $q_\sigma,\dot{q}_\sigma$ 都是稳定的.

定理 2.3.2 (B B Румянцев[5]) 对于线性、齐次、定常的非完整系统,如果在平衡位置上 $\mathrm{grad}\,U=0$,并且在平衡位置的无论多么小的邻域内,力函数 U 的二次部分和表达式

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} q_\sigma\left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}b_{\varepsilon+\beta,\sigma}\right)$$

对于变量 $q_\sigma(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)$ 是负定的,那么在对独立广义速度为完全耗散的耗散力作用下,平衡位置关于部分变量 $q_\sigma,\dot{q}_\sigma$ 是渐近稳定的.

文献[5,6]还给出一系列关于部分变量稳定,不稳定及渐近稳定的判据.文献[27]将上面的结果推广到非线性非完整系统.文献[31]指出,非完整系统平衡位置关于部分变量的稳定性等价于相应完整系统平衡位置在约束流形上关于部分变量的稳定性,利用 Ляпунов 关于部分变量的稳定性理论,得到线性和非线性非完整系统的一些稳定性判据.

对于某些非完整系统.其关于全部变量稳定性与关于部分变量的稳定性具有等价关系,文献[31,32]考虑了这类问题.

假设 $\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}}=0$ 为系统的平衡位置.如果非完整约束(1)的前 g′个方程能表示为以下形式

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta'}=\sum_{\sigma'=1}^{\varepsilon'}\phi^{\sigma'}_{\beta'}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}'')\dot{q}_{\sigma'}\quad(\beta'=1,\cdots,g') \tag{15}$$

其中 $\mathbf{q}=(q_1,\cdots,q_n)^T$, $\dot{\mathbf{q}}''=(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_\varepsilon)^T$, $\varepsilon'\le\varepsilon$, $g'\le g$. 要求 $\phi^{\sigma'}_{\beta'}$ 在以下区域 Q 内连续有界

$$Q=\{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}'')\mid \|(\mathbf{q}'-\bar{\mathbf{q}}',\dot{\mathbf{q}}'')\|<H,\quad \|\mathbf{q}'''-\bar{\mathbf{q}}'''\|<+\infty\} \tag{16}$$

其中 $H>0$, $\mathbf{q}'=(q_1,\cdots,q_{\varepsilon'},q_{\varepsilon+g'+1},\cdots,q_n)^T$, $\mathbf{q}'''=(q_{\varepsilon'+1},\cdots,q_\varepsilon,q_{\varepsilon+1},\cdots q_{\varepsilon+g'})^T$. 即存在 $A>0$,使得 $\phi^{\sigma'}_{\beta'}$ 在 Q 内满足 $\|\phi^{\sigma'}_{\beta'}\|<A$.

定理 2.3.3[30] 对于受有非完整约束(15)的定常力学系统,其平衡位置关于部分变量 $\mathbf{q}',\tilde{\dot{\mathbf{q}}}''$ 稳定的充要条件是此平衡位置关于变量 $\mathbf{q}',\dot{\mathbf{q}}''$ 稳定. 这里 $\tilde{\dot{\mathbf{q}}}'=(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_{\varepsilon'},\dot{q}_{\varepsilon+1},\cdots,\dot{q}_n)^T$.

显然,如果 $\varepsilon'=\varepsilon$, $g'=g$,那么定理 2.3.3 给出一类非完整系统关于全部变量和关于部分变量 $q_\sigma,\dot{q}_\sigma$ 稳定的等价关系.假设非完整约束(1)中不含变量 $q_{\varepsilon+1},\cdots,q_n$,且能表为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}f^{\sigma}_{\beta}(\dot{\mathbf{q}}'',\dot{\mathbf{q}}'')\dot{q}_\sigma\quad(\beta=1,\cdots,g) \tag{17}$$

要求 f^σ_β 在点 $\dot{\mathbf{q}}''=\tilde{\mathbf{q}}''$, $\dot{\mathbf{q}}''=0$ 的附近连续.这是(15)的一个特殊情况,故由定理 2.3.3 知

推论 2.3.1[32] 对于受有非完整约束(17)的定常力学系统,其平衡位置关于部分变量 $\dot{q}''$, $\dot{q}$ 稳定的充要条件是此平衡位置关于全部变量 $q,\dot{q}$ 稳定.

假设系统的约束方程, Lagrange 函数及广义力中不显含广义坐标 $q_{\varepsilon+\beta}(\beta=1,\cdots,g)$. 这时,称系统存在循环坐标 $q_{\varepsilon+\beta}$. 此系统的广义 Чаплыгин 方程中不显含 $q_{\varepsilon+\beta},\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$.

推论 2.3.2 如果受有非完整约束(17)的定常力学系统存在循环坐标 $q_{\varepsilon+\beta}$,则此系统的

平衡位置 $\dot{q} = \bar{q}$, $\dot{q} = 0$ 稳定的充要条件是系统的广义 Чаплыин方程在其平衡位置 $q'' = \bar{q}''$, $\bar{q}'' = 0$ 稳定.

证明　必要性显然成立,只需证明充分性.系统的广义 Чаплыин方程在 $\dot{q}'' = \bar{q}''$, $\bar{q}'' = 0$ 稳定,那么系统的平衡位置 $\dot{q} = \bar{q}$, $\dot{q} = 0$ 关于部分变量 $\dot{q}''$, $\dot{q}$ 稳定.由推论 2.3.1 知,系统的平衡位置关于全部变量 q, $\dot{q}$ 稳定.

Чаплыгин系统是保守的,且有循环坐标 $q_{\varepsilon+\beta}$的非完整系统,且其约束是一阶线性,齐次和定常的.由推论 2.3.2 知

推论 2.3.3　Чаплыгин系统的平衡位置 $q = \bar{q}$, $\dot{q} = 0$ 稳定的充要条件是它 Чаплыгин方程在其平衡位置 $q'' = \bar{q}''$, $\dot{q}'' = 0$ 稳定.

例 7　例 1 中的系统满足定理 2.3.1 的条件,此系统的每一个平衡位置关于变量 x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ 是稳定的.更进一步,此系统还满足定理 2.3.2 的条件,故平衡位置关于部分变量 x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ 是渐近稳定的.

例 8[4]　一力学系统受有如下非完整约束

$$\dot{z} = cy\dot{x}$$

其中 c 为常数.系统的动能为 $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$,力函数为 $U = z + \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$,其中 a, b 为非零常数.系统的平衡位置为

$$x = y = 0, \quad z = \text{const}.$$

可以推得[4],当 $a > 0$ 或 $b > 0$ 时,平衡位置关于部分变量 $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ 不稳定;当 $b < \pi^2 a < 0$ 时,平衡位置关于 $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ 稳定.所以,由推论 2.3.1 知,当 $a > 0$ 或 $b > 0$ 时,系统的平衡位置关于全部变量不稳定;当 $b < \pi^2 a < 0$ 时,系统的平衡位置关于全部变量稳定.

2.4　平稳运动的稳定性

平稳运动一般是指非循环坐标以及相应于循环坐标的速度保持为常值的一类运动[33].根据循环坐标是否依赖于运动方程(包括约束方程和广义 Чаплыин方程)和运动方程是否存在循环积分,可将以往非完整系统平稳运动归纳为四类.第一类,运动方程存在循环积分,但它可能显含循环坐标. 1965 年, Семенова[11]首先考虑这类系统的平稳运动,他认为,非完整系统的平稳运动不是孤立的,而组成流形,其维数不低于约束方程数目与循环坐标数目之和.后来, Сумбатов[12]推广了 Семенова的定义;第二类,运动方程中不显含循环坐标,但它可能不存在循环积分. 1966 年, Неймарк和 Фуфаев[9,13]首先讨论这类系统的平稳运动,他们指出,非完整系统的平稳运动不是孤立的,而组成维数不小于 1 的一个流形.后来, Емельянова和 Фуфаев等推广了这类定义;第三类,运动方程不显含循环坐标,且存在循环积分. Шульгин, Карапетян等研究了这类系统的平稳运动,通过引入 Routh 函数,他们将非完整系统的运动方程降阶,把原系统平稳运动的稳定性问题转化为降阶后的系统平衡位置的稳定性问题;第四类,运动方程显含循环坐标,且不存在循环积分. Карапетян[14,15]首先研究这类系统,将非完整系统平稳运动的稳定性问题转化为完整系统平衡位置的稳定性问题.后来, Карапетян[16], Атажанов和 Красинская[35,36]等进一步考虑了这类平稳运动的稳定性.

以上四类问题中,第一类的研究结果较少,第三类可类似完整系统考虑,下面简介第二类及第四类的研究结果.这四类问题之间实际上存在一些关系[33].

假设系统除有势力外,还受有耗散力的作用,系统的Lagrange函数 L 及耗散函数 F 中不显含后 l 个广义坐标,且 F 不含后 l 个广义速度.设系统所受非完整约束的形式为

$$\sum_{s=1}^{n} B_{\beta s}(q_1, \cdots, q_{n-l})\dot{q}_s = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{18}$$

此系统的运动方程可表为Routh方程的形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta B_{\beta i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n-l+\rho}} = \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta B_{\beta, n-l+\rho}$$

$$(i = 1, \cdots, n-l;\ \rho = 1, \cdots, l) \tag{19}$$

系统存在平稳运动

$$q_i = q_{i0}, \quad \dot{q}_i = 0, \quad \dot{q}_{n-l+\rho} = \dot{q}_{n-l+\rho,0} \tag{20}$$

系统平稳运动满足方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta 0}B_{\beta i} = 0, \quad \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta 0}B_{\beta, n-l+\rho} = 0, \quad \sum_{\rho=1}^{l}B_{\beta, n-l+\rho}\dot{q}_{n-l+\rho,0} = 0 \tag{21}$$

方程(21)组成为确定 $n+g$ 个量 $q_{i0}, \lambda_{\beta 0}, \dot{q}_{n-l+\rho,0}$ 的 $n+g$ 个方程的系统.可以推出,方程(21)中至少有一个方程不是独立的,于是,平稳运动组成维数不小于1的流形.这时,对非完整系统平稳运动稳定性的研究,类似于对非完整系统平衡位置稳定性的研究[9,13].

对于某些存在平稳运动的非完整系统,其运动方程可能不存在循环积分,且非完整约束方程中显含循环坐标.下面考虑线性、齐次、定常的非完整系统.假设系统的Lagrange函数 L,耗散函数 F 和约束方程(8)对于广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 的所有系数都不显含广义坐标 $q_\alpha(\alpha = n-m+1, \cdots, n;\ 0 \le m \le g)$.这时,约束方程的前 $g-m$ 个方程和嵌入约束后的 Воронец方程中都不显含广义坐标 q_α 及广义速度 $\dot{q}_\alpha$.这样,可把约束方程的前 $g-m$ 个方程和嵌入约束后的 Воронец方程结合,作为系统的一个子系统,与其余方程区分开来.此子系统的运动方程为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta'} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} b_{\varepsilon+\beta',\sigma}(q_1, \cdots, q_{n-m})\dot{q}_\sigma \quad (\beta' = 1, \cdots, g-m) \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L^*}{\partial q_\sigma} - \sum_{\beta'=1}^{g-m}\frac{\partial L^*}{\partial q_{\varepsilon+\beta'}}b_{\varepsilon+\beta',\sigma} - \sum_{\mu,\upsilon=1}^{\varepsilon}\sum_{\beta=1}^{g}K_{\sigma\mu\upsilon}^{\beta}\dot{q}_\mu\dot{q}_\upsilon = -\frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{23}$$

假设 $L^*, F^*, b_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 及 $\sum_{\beta=1}^{g}K_{\sigma\mu\upsilon}^{\beta} = 0$ 中不显含广义坐标 $q_\rho(\rho = k+1, \cdots, \varepsilon; 0 \le k \le \varepsilon)$,且

$$\frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_\rho} = 0, \quad \sum_{\alpha=g-m+1}^{g}K_{\rho\rho_1\rho_2}^{\alpha} = 0, \quad b_{\varepsilon+\beta',\rho} = 0 \quad (\rho, \rho_1, \rho_2 = k+1, \cdots, \varepsilon) \tag{24}$$

这时系统存在如下的平稳运动

$$q_r = q_{r0}, \quad \dot{q}_\rho = \dot{q}_{\rho 0}, \quad q_{\varepsilon+\beta'} = q_{\varepsilon+\beta',0} \quad (r = 1, \cdots, k;\ \rho = k+1, \cdots, \varepsilon;\ \beta' = 1, \cdots, g-m) \tag{25}$$

平稳运动(25)不是孤立的,而组成维数不小于约束方程(22)的数目与循环坐标数目之和的流形[15].

令

$$q_r = x_r + q_{r0}, \quad \dot{q}_\rho = y_\rho + \dot{q}_{\rho 0}, q_{\varepsilon+\beta'} = z_{\varepsilon+\beta'} + q_{\varepsilon+\beta',0} \tag{26}$$

将(26)代入(22)(23)中,可得扰动方程,其特征方程有如下形式

$$\Delta = \lambda^{n-m-k} f(\lambda) = 0 \tag{27}$$

即特征方程有 $n-m-k$ 个零根.类似 Айзерман Гантмахер定理[3]的推导方法,据 Ляпунов Малкин定理及 Ляпунов按一次近似的不稳定性定理,可以得到

定理 2.4.1 (А В Карапетян[15]) 如果特征方程(27)的所有根,除数目等于 $n-m-k$ 个零根外,都具有负实部,那么平稳运动(26)相对变量 $q_r, \dot{q}_\rho, q_{\varepsilon+\beta}$ 是稳定的.此时,所有充分接近未扰运动的扰动运动,当 $t\to\infty$ 时,趋于平稳运动流形上的一点;如果特征方程(27)至少有一个具有正实部的根,那么平稳运动(26)是不稳定的.

通过基本变换,可将去掉 $n-m-k$ 个零根后的特征方程(27)变为以下形式[15]

$$\det\left(A_{ij}\lambda^2 + B_{ij}\lambda + C_{ij}\right) = 0 \quad (i,j = 1,\cdots,k) \tag{28}$$

这可看成某一完整系统运动方程的特征方程.从而,非完整系统平稳运动的稳定性转化为含 k 个自由度的完整系统平衡位置的稳定性.

类似定理 2.2.1,也可把定理 2.4.1 应用于平稳运动流形.除 $n-m-k$ 个零根外,(27)的所有根都具有负实部,那么系统的平稳运动流形渐近稳定.

让 $m=g$,则子系统(22)(23)中只包括嵌入约束后的 Воронец方程,文献[14]所考虑的系统属于这种情况.后来,这些问题得到进一步发展[35,36].文献[16]研究了受有粘性摩擦力作用的非完整系统,讨论了此类系统与原系统同样平稳运动的存在性问题,并得到一些关于 Ляпунов稳定性的结果.文献[30]放宽限制条件,将定理 2.4.1 推广到非线性非完整系统.

近来,广义力对非完整系统平稳运动稳定性的影响问题也得到研究.文献[37]分析了一些特殊非完整系统平稳运动引入陀螺力后镇定的可能性问题.文献[34]指出,对于某些非完整系统,通过引入关于部分或全部循环坐标的控制力,可使不稳定的平稳运动变成稳定.

例 9 匀质圆盘在重力作用下沿绝对粗糙水平面的滚动[9,17].系统的 Lagrange 函数为 $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}\{A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2 - mga\sin\theta$,耗散函数为 $F = \frac{1}{2}h\dot{\theta}^2$.此系统存在平稳运动

$$\theta = \theta_0, \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$$

此平稳运动组成维数为 2 的流形.可利用定理 2.4.1 分析此系统平稳运动的稳定性.

2.5 非完整控制系统的镇定

非完整控制系统的研究可追溯到本世纪 60 年代,由于问题的复杂性,其后的 20 多年进展缓慢,所得结果大多停留在建立基本的运动方程,这些工作的主要内容在文献[17]中做了概括.近 10 年以来,由于大量的实际问题的需要,非完整控制系统引起了广泛的关注,在系统的镇定、控制及非完整运动规划等方面得到了很多的重要结果,在许多的重要学术期刊和国际会议上发表了大量的学术论文.这些研究的部分早期工作已在文献[47,48]中给出.下面仅介绍非完整控制系统镇定问题的有关结果.

以往主要研究了受线性、齐次、定常的非完整约束的控制系统的镇定问题,此类系统的运动方程可表为以下形式

$$\sum_{k=1}^{n} M_{sk}(q)\ddot{q}_k + F_s(q, \dot{q}) = \sum_{\beta=1}^{g} a_{s\beta}(q)\lambda_\beta + \sum_{i=1}^{r} B_{is}(q) u_i \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k\beta}(q)\ddot{q}_k = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{30}$$

且假定方程(30)能转化为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} b_{\varepsilon+\beta,\sigma}(q)\dot{q}_\sigma \tag{31}$$

系统(29)(30)可统一表为

$$\dot{x}_l = f_l(x) + \sum_{i=1}^{r} u_i g_{il}(x) \quad (l = 1, \cdots, 2n - g) \tag{32}$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_{2n-g})^T = (q_1, \cdots, q_\varepsilon, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_\varepsilon, q_{\varepsilon+1}, \cdots, q_n)^T$. 系统(29)(30)在 $u = 0$ 时的平衡位置不是孤立的,而组成维数不小于约束方程数目的流形. 鉴于此特性,可研究系统平衡状态流形,单个的平衡位置及一般运动的稳定性. 对于平衡状态流形 L 的镇定,有结论

定理 2.5.1 (A. M. Bloch[49]) 若将方程(32)在 L 上每一点处线性化,所得线性方程的能控阵的秩都为 $2n - 2g$,则可通过光滑状态反馈使非完整控制系统(29)(30)的平衡状态流形 L 渐近稳定. 设

$$L' = \{(q, \dot{q}) \mid \dot{q} = 0, f_\sigma(q) = 0, \sigma = 1, \cdots, \varepsilon\}$$

为系统(29)(30)在 $u = 0$ 时的 g 维光滑平衡子流形,且设 $r \geq n - g$. 这时,有

定理 2.5.2 (A. M. Bloch, M. Reyhanoglu, N. H. McClamroch[50]) 假设非完整约束(30)满足(i)若 $q_\sigma(t)$, $\dot{q}_\sigma(t)$ 是指数衰减函数,则 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\upsilon=1}^{\varepsilon} b_{\varepsilon+\beta,\upsilon}(q_\sigma(t), q_{\varepsilon+\gamma})\dot{q}_\upsilon(t)$ 的解有界; (ii)矩阵 $\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\upsilon}\right.$ 和 $\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\upsilon} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} b_{\varepsilon+\beta,\upsilon}\right.$ 是满秩的. 那么,可以通过光滑状态反馈使平衡子流形 L 渐近稳定.

对于系统的单个平衡位置,由 Brockett 关于稳定性的必要条件[51]知,不可能通过光滑状态反馈使其渐近稳定. 但系统(29)(30)的平衡位置是强可达和小时间局部可控的,可通过非连续状态反馈使其渐近稳定[50]. 分别针对一些特殊的非完整控制系统,文献[52,53]考虑了利用时变光滑状态反馈,文献[54]考虑利用非光滑状态反馈,使平衡位置镇定. 近几年,平衡位置的指数收敛性也得到研究,文献[55]利用分段光滑纯反馈,文献[56]利用非光滑时变反馈,分别讨论了几类非完整控制系统平衡位置按指数镇定的问题. 另外,非完整控制系统的非平衡解的镇定问题也已引起关注[57].

3 应用

非完整系统稳定性理论不断发展的同时,其应用也受到广泛的关注,特别是近 10 年来,在

对非完整控制系统的研究中,绝大多数工作是结合具体的实际问题进行的.比较突出的应用有

(1)滚轮系统的线路稳定性　滚轮系统,如自行车、摩托车、汽车、火车车厢、飞机起落架、带轮的机器人等,一般都是非完整系统.文献[9]研究了滚轮系统的线路稳定性问题.许多具体现象涉及线路稳定性,如:在一定速度下,即使轮胎制造非常好,在极平坦的路面上行驶,汽车也会失去稳定,这只能用非完整力学的线路稳定性理论解释.

(2)航天结构的运动稳定性　许多航天结构的运动与非完整力学有关.如:卫星对接问题中,为避免使联结件发生扭转而破坏,常常要求两卫星以同样角速度转动,这一问题需利用非完整动力学理论;航天结构自由漂浮时守恒律对操作的影响,这是一个非完整运动规划问题;等等.对于某些非完整系统,可能有完全不同于完整系统的失稳现象[47],这对航天结构的运动控制会有较大影响,此问题已引起一些学者的注意.

(3)机器人的运动规划　近10年来,在非完整力学的应用中,滚轮机器人是国际上研究最多的非完整系统,针对各种不同的情形,许多学者对其镇定、控制及运动规划等方面做了大量的研究,得到不少有意义的结果[52~61].另外,受有非完整约束的机器人操作器也得到研究[62].由于系统的复杂性,至今对滚轮机器人的研究还停留在仅考虑在平面等较简单的环境下作纯滚动的情况,对更复杂的问题研究较少.若考虑到机器人的又滚又滑运动,则需加上单面约束,对受单面约束的机器人系统进行研究很有必要,至今未发现这方面的成果.

4　结束语

尽管从Whittaker提出非完整系统稳定性问题以来,不少学者做出了很大的努力,已得到一些重要成果,但是,与完整系统相比还很不完善,有不少问题还有待进一步研究.下面提出几个问题,供研究参考.

(1)对以往课题作进一步研究,将完整系统的结论推广到非完整系统.

(2)应用现代数学理论,特别是现代微分几何知识.非完整系统平衡位置一般不孤立,故对其稳定性作大范围的研究很有必要,以往在这方面的结果有很强的局限性.对一般非完整系统,其稳定性的几何提法及判断方法是一个十分困难的课题.

(3)动力学中随机过程的研究是科学和工程中的重要课题,已取得重要进展.近几年来,非完整系统的随机问题已引起一些学者的关注.受非完整约束的系统,其随机性可能表现在约束方程中,这类系统的随机响应十分复杂,随机稳定性也是非常困难的课题,其提法及解法有待深入研究.

(4)分叉,混沌问题是现代非线性科学中的重要课题.非完整系统的定性分析中,也少不了要考虑分叉与混沌问题.近几年来,一些学者研究过一些特殊非完整系统的分叉现象,如在水平面上滚动的重刚体.这一方面的结果还不多.

(5)非完整系统有着广泛的应用背景,国际上近10年来在控制、机器人等领域关于这方面的成果很多,稳定性问题是研究的热点之一.国内对非完整系统的应用问题研究得很少,还未见有重要价值的成果.

参　考　文　献

1　Whittaker E T. A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Eng: Cambridge Univ Press, 1904

2　Bottema O. On the small vibrations of nonholonomic systems. *Proc Kon Ned Akad Wet*, 1949, 52(8): 8484～850

3　Aiserman M A, Gantmacher F R. Stabilitat der gleichgewichtslage in einem nichtholonomen system. *ZAMM*, 1957, 37(1～2): 74～75

4 Карапетян А В об устойчивости равновесия неголономных систем, *ПММ*, 1975, 39(6): 1135～1140
5 Румянцев вв об устойчивости движения неголномных систем *П ММ*, 1967, 31(2): 261～271
6 Карапетян АВ, Румянцев ВВ Устойчивость консервативных идиссипативных систем М: ВИНИТИ, 1983
7 Козлов ВВ об устойчивости равновесий неголономных систем ДАН СССР, 1986, 288(2): 289～291
8 Неймарк Ю И, Фуфаев НА. Устойчивость состояний равновесия неголономых систем *ПММ*, 1965, 29(1): 46～53
9 Неймарк Ю И, Фуфаев Н А Динамика неголономных систем М: Наука, 1967
10 Lilov L. Die stabilitat einer Bewegung bezuglich einer menge. *ZAMM*, 1974, 54: 789～793
11 Семенова Л Н О теореме Рауса для неголономных систем ПММ, 1965, 29(1): 156～157
12 Сумбатов АС О линейных интегралах неголономных систем *Bechuk МГУ МаТMex.*, 1972, (6): 77～83
13 Неймарк Ю И, Фуфаев НА Об устойчивости стационарных движений голономных и нголономных систем *ПММ*, 1966, 30(2): 236～242
14 Карапетян АВ Об устойчивости стационарных движений нголономных систем Чаплыгина ПММ, 1978, 42(5): 801～807
15 Карапетян АВ К вопросу об устойчивостеи стационарных лвижений неголономных систем ПММ, 1980, 44(3): 418～426
16 Karapetyan A V. On the stability of the stationary motions of systems with friction. *J Appl Math Mech*, 1987, 51(4): 431～436
17 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京:北京工业学院出版社, 1985
18 Furta S D. Instability of the equilibrium positions of restricted mechanical systems. *Soviet Appl Mech*, 1991, 27(2): 204～208
19 Карапетян АВ О распространений теоремы лагранжа на неголономных системы Чаплыгина, ПММ, 1979, 10(2): 11～16
20 Николенк ИВ Об устойчивости равновесия неголономных систем *п В. Вороheua*, *Ухр МаТ Журн*, 1968, 20(1): 127～131
21 Risito C. On the Lyapunov stability of a system with known first integrals. *Meccanica*, 1967, 2(4): 197～200
22 Николенко ИВ, Коваленко А П Два теоремы про устойчивости равновесия некоторый механических систем *Bechuk Kuebc′ koco Yhubeepcumemy, Cepur* МаТ *Mex*, 1977, 19(1): 85～88
23 Laloy M. On the first approximation stability of nonholonomic systems. *Ann Fac Sci de Kinshasa, Section Math Phys*, 1976, 2(1): 91～107
24 Сосницкий СП Об устойчивости равновесия неголономных систем в одном частном случае *Укр Мам Журн*, 1991, 43(4): 440～447
25 Krasinskii A Ya. The stability and stabilization of the equilibrium positions of non-holonomic systems. *J Appl Math Mech*, 1988, 52(2): 152～158
26 梅凤翔. 关于非线性非完整系统平衡状态的稳定性, 科学通报, 1992, 37(1): 82～85
27 朱海平, 史荣昌, 梅凤翔. Чаплыгин系统平衡状态的稳定性. 应用数学和力学, 1995, 16(7): 595～602
28 朱海平, 梅凤翔. 非线性非完整系统相对平衡状态流形的稳定性. 见: MMM - V1 会议论文集. 苏州: 苏州大学出版社, 1995. 448～454
29 梅凤翔. 非完整系统的平衡位置及其稳定性. 见: 舒仲周. 稳定振动分叉与混沌研究. 北京: 中国科学技术出版社, 1992. 25～33
30 朱海平. 约束力学系统的稳定性和随机问题研究(博士论文). 北京: 北京理工大学, 1994
31 朱海平, 梅凤翔. 关于非完整系统相对部分变元的稳定性. 应用数学和力学, 1995, 16(3): 225～234
32 朱海平, 梅凤翔. 一类非完整系统关于部分变元与关于全部变元稳定性的关系. 科学通报, 1994, 39(2): 129～132
33 Mikhailov G K, Parton V Z. Applied mechanics, Soviet Reviews, Vol 1. New York: Hemishere Publishing Corporation, 1990
34 Ataznanov B, Krasinskaya E M. Stabilization of the stationary motions of non - holonomic mechanical systems. *J Appl Math Mech*, 1988, 52(6): 705～714
35 Атажанов В, Красинская Э М К стойчивости стационарных движений неголономных систем *Изв АН узССР, Сер Техн Наук*, 1985, (1): 41～46
36 Атажанов В Красинская Э М К стойчивости стационарных движяиний неголономных систем *Изв АН узССР, Сер Техн Наук*, 1985, (6): 39～43
37 Krasinskaia E M. On the stabilization of steady - state motions of mechanical systems. *J Appl Math Mech*, 1983, 47(2): 253～259
38 Rouche N, Habets P, Laloy M. Stability theory by Liapunov's direct method. Berlin: S - V, 1977
39 秦元勋, 王慕秋, 王联. 运动稳定性理论与应用. 北京: 科学出版社, 1981
40 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988
41 舒仲周. 运动稳定性. 成都: 西南交通大学出版社, 1989
42 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989
43 王照林. 运动稳定性及其应用. 北京: 高等教育出版社, 1992
44 Lasalle J P. The stability of dynamical systems. Phila: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976
45 Ahmad K H. Stability relative to a set and to the whole space revisited. *Appl Math Comput*, 1987, 24(2): 91～99
46 Kulev G K, Bainov D D. On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct method. *Dynamics Stability Systems*, 1990, 5(3): 149～162
47 Li Z, Canny J F. Nonholonomic motion planning. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993
48 Kolmanovsky I, McClamroch N H. Developments in nonholonomic control problems. Control Systems Magazine, Dec, 1995

49 Bloch A M. Stabilizability of nonholonomic control systems. *Automatica*, 1992, 28(2): 431～435
50 Bloch A M, Reyhanoglu M, McClamroch N H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 1992, 37(11): 1746～1757
51 Brockett R W. Asymptotic stability and feedback stabilization. In: Brockett R W, Millman R S, Sussman H J eds. Differential Geometric Control Theory. Boston: Birkhauser, 1983. 181～191
52 Samson C. Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots. *Int J Robotics Research*, 1993, 12(1): 55～64
53 Teel A R, Murray R M, Walsh G. Nonholonomic control systems: From steering to stabilization with sinusoids. In: IEEE CDC. Arizona, Dec, 1992, 1603～1609
54 Canudas de Wit C, Sψrdalen O J. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. In: IEEE CDC. 1991, 692～697
55 Canudas de Wit C, Sφrdalen O J. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 1992, 37(11): 1791～1797
56 Egeland O, Berglund E, Sψrdalen O J. Exponential stabilization of a nonholonomic underwater vehicle with constant desired configuration. In: Gruver W A. Proc IEEE ICRA. Los Alamitos: IEEE omputer Society Press, 1994, 20～25
57 Walsh G, Tilbury D, Sastry S, Murray R, Laumond J P. Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. In: Menga G ed. Proc IEEE ICRA. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1992. 1999～2004
58 Hirose S, Fukushima E F, Tsukagoshi S. Basic steering control methods for the articulated body mobile robot. In: Gruver W A ed. Proc IEEE ICRA. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1994. 2384～2390
59 Zhao Y, BeMent S L. Kinematics, denamics and control of wheeled mobile robot. In: Menga G ed. Proc IEEE ICRA. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1992. 91～96
60 Krishnan H, McClamroch N H. Tracking in nonlinear differential - algebraic control systems with applications to constrained robot systems. *Automatica*, 1994, 30(12): 1885～1897
61 Laumond J P, Jacobs P E, Taix M, Murray R M. A motion planner for nonholonomic mobile robots. *IEEE Trans Robot Automat*, 1994, 10(5): 577～593
62 Sψrdalen O J, Nakamura Y, Chung W J. Design of a nonholonomic manipulator. In: Gruver W A ed. Proc IEEE ICRA. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1994, 8～13

DEVELOPMENTS IN THE STUDIES OF STABILITY OF NONHOLONOMIC SYSTEMS

Zhu Haiping
Department of Mechanics and Engineering Science,
Peki6ng University, Beijing 100871

Mei Fengxiang
Department of Applied Mechanics,
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081

Abstract This paper reviews developments in the study of stability of nonholonomic systems, including the stability of the equilibrium state with respect to all variables, the equilibrium manifold and the stationary motions, partial stability and the stabilization of nonholonomic control systems. Moreover, several important applications of the stability of nonholonomic systems are discussed, and some proposals for the study in the future are made.

Keywords nonholonomic system, stability, stationary motion, manifold, feedback, stabilization