

单侧界面条件下弹性波传播规律的研究^{*}

盖秉政

哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001

摘 要 界面是介质间的分界面, 把界面看成是双侧的, 只是真实界面模型表述的一个极端, 在很多情况下, 它的另一个极端, 即单侧界面模型可能更近于实际. 在单侧界面条件下弹性波的传播问题, 与双侧界面问题相比, 还是一个尚未充分研究的领域. 本文意在对该领域的研究现状及问题作一评述和展望.

关键词 弹性波, 单侧界面, 相互作用

1 背景与意义

弹性波是弹性介质中的扰动运动. 自上世纪末以来, 人们对这种运动已经进行了大量的研究^[1~12]. 但是, 我们也应看到, 在弹性波的研究领域中仍然有相当多的问题尚待解决. 这里我们将要论述的在单侧界面条件下弹性波的传播问题就是其中之一. 所谓界面就是介质间的分界面, 在弹性波场中传播着的弹性波遇到界面时, 就要与其发生相互作用, 改变波场图案, 并把波动传给毗邻介质. 可见, 界面对弹性波的传播所起的作用是至关重要的. 在通常的分析中, 我们总是把界面视为零厚度的数学面, 并固定不变地贴接着两边的弹性介质. 于是在弹性波照射下, 界面不仅能抵抗压力, 而且也能抵抗拉力和剪力, 从而使界面两侧的介质始终保持应力与位移沿界面的连续性, 这种界面被称为双侧界面 (bilateral interface). 以往许多有关半空间, 双半空间, 层状介质, 以及有限体 (杆、板、壳等) 内弹性波的反射、折射及绕射等问题的研究就是在这种假设下作出的, 其详细情况可见 Ewing^[3], Brekhovskich^[4], Miklowitz^[5], Goldsmith^[6], Pao 和 Mow^[7], Achenbach^[8] 以及 Eringen 和 Suhubi^[9] 等人的优秀著作. 但是, 我们应该看到, 界面的双侧性简化只是真实界面的一种简化方式罢了, 它并非对所有的界面都完全实用. 例如, 复合材料层间的开裂面、地壳中的断层面、机械零部件间的连接面、工程构件中的裂纹面等等, 就不能说成是双侧的. 因为这类界面不能承拉, 且只靠摩擦承剪, 因此它在弹性波照射下, 尽管应力沿界面仍保持连续, 但位移沿界面则可能出现 (滑动或分离式的) 间断. 相对于双侧界面而言, Comninou 和 Dundurs 把这种界面称为单侧界面 (unilateral interface)^[36]. 在单侧界面条件下, 弹性波场可能表现出比双侧界面约束波场更复杂、更有趣的景象. 目前, 这

^{*} 国家自然科学基金资助项目

还是一个远远未被充分开发的研究领域. 下面我们将就它的研究现状与问题作一综合评述和展望.

2 研究概况

2.1 单侧界面问题的特点

考虑一个单侧界面, 如图 1 所示. 当它受到弹性波照射时, 按前面给出的单侧界面的定义, 我们可以想象在界面上可能会出现 3 种不同的区域, 即分离区 (separation zones)、滑动区 (slip zones)、粘着区 (stick zones). 在不同的区域上界面的条件是不同的, 在分离区,

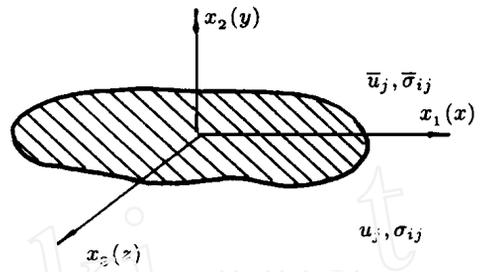


图 1 单侧界面

$$N = 0, S_1 = S_3 = 0, g \geq 0 \quad (1)$$

在滑动区,

$$\left. \begin{aligned} N \leq 0, \quad \dot{e}_1 / \dot{e}_3 = S_1 / S_3, \quad g = 0 \\ \mathbf{F}_k(N, \text{面条} S_3, e, \dot{e}_1, \dot{e}_3 \text{ 的数} = 0) \end{aligned} \right\} \quad \text{度}$$

(3)

式中, $N = \bar{t}_{22} - p = \bar{t}_{22} - p$; $S_1 = \bar{t}_{12} + q_1 = \bar{t}_{12} + q_1$; $S_3 = \bar{t}_{23} + q_3 = \bar{t}_{23} + q_3$ 分别为界面上的法向力及沿 x_1 和 x_3 方向的切向力; p, q_1, q_3 分别为界面上沿法向施加的外压力及沿切向 x_1 及 x_3 施加的外剪力; \bar{t}_{ij} 为界面一侧介质中的应力, \bar{t}_{ij} 为界面另一侧介质中的应力; $g = \bar{u}_2 - u_2, e_1 = \bar{u}_1 - u_1, e_3 = \bar{u}_3 - u_3$ 分别为位移沿界面法向及切向 x_1 及 x_3 方向的不连续量; u_i 为界面一侧介质的位移; \bar{u}_i 为界面另一侧介质中的位移; $e = \left(e_1^2 + e_3^2 \right)^{1/2}, \dot{e}_1 = \partial e_1 / \partial t,$ $\dot{e}_3 = \partial e_3 / \partial t$; t 为时间; $\mathbf{F}_s(\cdot), \mathbf{F}_k(\cdot)$ 分别为界面上的静、动摩擦规律, 它们为其宗量的函数, 其中 \cdot 为未指明的其它宗量因素. 此外, 在整个界面上, 由应力的连续性给出

$$\bar{t}_{22} = \bar{t}_{22}, \bar{t}_{21} = \bar{t}_{21}, \bar{t}_{23} = \bar{t}_{23} \quad (4)$$

式 (1) ~ (4) 构成了弹性波在单侧界面上必须满足的界面条件. 它与双侧界面的条件相比, 有如下几个特点. 界面条件复杂. 从式 (1) ~ (4) 我们看到, 在界面条件中应力、位移 (包括它的时间导数), 等式条件与不等式条件, 线性约束与非线性约束交织在一起, 而且界面上的 3 类区域 (, ,) 都依赖于未知的应力与位移, 因此它们的分布与范围在问题求解之前也是未知的, 这样的界面对于待解的弹性波场构成了一个非线性的未知的混合边界^[37]. 波场非线性化. 尽管波场中的介质是线弹性的, 但由于单侧界面条件的非线性, 因此弹性波与这样的界面相互作用后, 整个波场就表现出非常复杂的非

线性景象, 在这种条件下叠加原理已不适用^[36,37]. 摩擦与波场耦联. 在单侧界面中, 由于摩擦规律 $F_k(\cdot) = 0$ 及 $F_s(\cdot) < 0$ 出现在界面条件中, 于是单侧界面把摩擦现象与弹性波场耦联在一起. 通常, 固体表面间的摩擦与多种因素有关, 如压力、温度、表面光洁度、润滑情况、摩擦表面的材料等. 在弹性波场中, 摩擦的引入无疑使波场复杂化, 同时也更加丰富了弹性波场的内容.

2. 2 单侧界面问题的分析方法

如前所述, 单侧界面对弹性波的约束条件十分复杂, 因此在单侧界面条件下弹性波传播规律的分析要比双侧界面问题难得多, 至今所提出的一些分析方法都有很大的局限性或有值得商榷的地方. 这些方法主要是, 以 Fischer 和松本为代表的图解算法; 以 Sesawa, Kanai 和 Miller 为代表的线性 (及等效线性) 化方法以及密切联系于裂纹问题的其它方法, 现分别简述如下:

2. 2. 1 图解算法

图解算法亦称图解动力学方法 (graphodynamical method) 是 Duhasz 首先提出的, 后来为 Fischer、松本等人所发展^[13~20]. 方法主要用于分析包括实心杆, 空心杆, 等断面和不等断面杆, 同材质和不同材质杆等的各种纵向冲击问题. 显然, 在这种问题中杆间的冲击面是单侧界面, 它不能承担杆中传播的应力波在面上造成的拉应力. 由于问题是一维的, 没有滑动区及摩擦参与, 因此界面条件 (1) ~ (4) 简化为

$$\left. \begin{aligned} &= \bar{u} = 0, \quad \bar{u} - u \geq 0 \quad (\text{分离时}) \\ &= \bar{u} \leq 0, \quad \bar{u} - u = 0 \quad (\text{粘着时}) \end{aligned} \right\} \quad \text{上的}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{2A_1 \sigma_0}{A_1 + A_3} = 1.6 \\
 2 &= \frac{2A_3 \sigma_0}{A_1 + A_3} = 0.4 \\
 &= \frac{A_1 - A_3}{A_1 + A_3} = 0.6 \\
 &= \frac{2A_3}{A_1 + A_3} = 0.4
 \end{aligned}$$

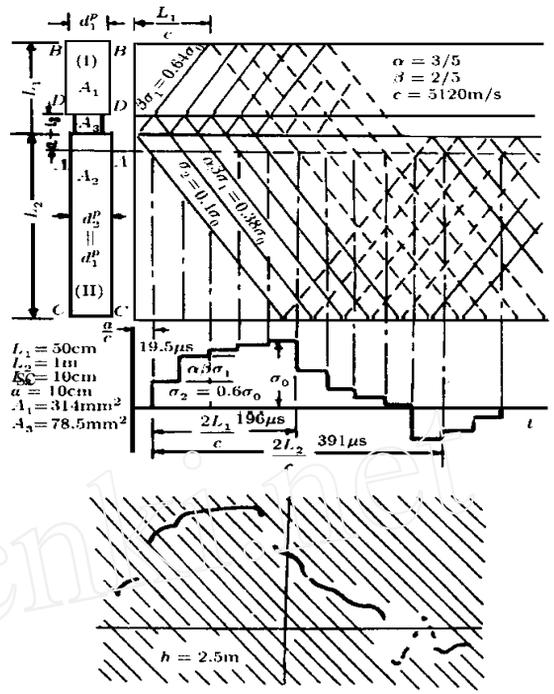


图2 杆中冲击波的图解

是滑动界面上的摩擦规律仍用线性规律 (式 (9)), 不过这时的 K, D 必须用等效线性化方法求出, 即令

$$= \mathbf{F}(e, \dot{e}) - (Ke + D\dot{e}) \quad (12)$$

从 的平方平均误差

$$= \frac{1}{2} \int_0^d \quad (13)$$

最小, 可得

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{E} \int_0^d \mathbf{F}(e, \dot{e}) \cos d \\ D &= - \frac{1}{E} \int_0^d \mathbf{F}(e, \dot{e}) \sin d \end{aligned} \right\}$$

www.cnki.net

(15)

的非零 SH 波场的充要条件为

$$\cot(\bar{\omega}H) - \frac{\bar{\mu}}{\mu} - \frac{\bar{\mu}}{K + iD} = 0 \quad (16)$$

式中, $\bar{\omega}^2 = k^2 - p^2/\bar{\rho}$ ($\text{Re } \bar{\omega} > 0$, Re 表实部); $\bar{\omega}^2 = p^2/\bar{\rho} - k^2$; $p = (1 + i)\bar{\omega}$, $\bar{\rho} = \mu/\bar{\omega}$, $\bar{\rho} = \bar{\mu}/\bar{\omega}$; μ , $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\rho}$ 分别为半空间及加层中介质的剪切弹性模量及密度; H 为加层的厚度. 特别是, 当把 $\mathbf{F}(e, \dot{e})$ 取成 Coulombs 摩擦型, 即 $= s \text{sgn } \dot{e}$ 时, 从式 (14) 我们可具体算出线性化的参数 $K = 0, D = 4s/c$, s 为给定的界面上的滑动摩擦应力; c 为面波相速; w, \bar{w} 分别为下半空间及加层中的反平面位移. 当 $(K + iD) \rightarrow 0$ 时, 方程 (16) 即退化为众所周知的 Love 波方程 (Love, 1911)^[75]. $K=0$ 时, 方程 (16) 变为 Kanai 在 1961 年给出的结果 (Kanai, 1961)^[22].

2.2.3 双侧解修正法

双侧解修正法是 Comninou 和 Dundurs 自 1977 年以来在他们的一系列有关弹性波与单侧界面相互作用的研究工作中采用的分析方法^[36~47]。他们在分析中，针对单侧界面问题中的 2 个主要困难，即界面上各区的未知分布及不等式约束，相应地采取了 2 条措施，第 1 条是事先假定（分离、滑动、粘着）区的分布；第 2 条是把双侧界面问题的解作为基本解，然后再把双侧解中强加的等式约束条件变成单侧界面要求的不等式约束，于是具有单侧界面约束问题的解便成为

$$u_i = U_i + v_i, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij} \quad (17)$$

式中， u_i, σ_{ij} 为所论问题的位移及应力， U_i, σ_{ij} 为相应的双侧问题中的位移及应力； v_i, τ_{ij} 为修正的位移及应力。通常 U_i, σ_{ij} 是已知的，而 v_i, τ_{ij} 则必须给出相应的确定方法。Comninou 和 Dundurs 的作法是求修正解 v_i 的关于运动坐标 $y = k(x_1 p_1 - ct)$ 的 Fourier 级数解，即

$$v_i = \text{Re} \left[d_i \sum_{m=1}^{\infty} F_m \exp(i m y) \right] \quad (18)$$

式中， $\{d_i\}, \{p_i\}$ 分别为波运动及传播方向上的单位矢量； k 为波数； c 为相速； F_m 为待求复常数；Re 表实部。或是把（分离、滑动）区视为位错的某种连续分布 $\phi(\cdot)$ ，它沿界面以扰动速度

$$v = c_0 / \sin \theta_0 \quad (19)$$

传播。这里 y 为 y 沿界面之值，即 $y = k(x_1 p_1 - ct) |_{x_2=0} = k(x_1 p_1 - ct)$ ； c_0 为入射波相速； θ_0 为入射角。进而按位错理论可建立确定位错密度函数 $\phi(\cdot)$ 的关系式。对于单侧界面上的摩擦问题 Comninou 和 Dundurs 没有作特别的考虑，在他们的全部研究中，或不计界面上的摩擦或把摩擦按 Coulomb 摩擦规律处理，即在式 (2), (3) 中分别取 $F_k(\cdot) = 0$ 及 $F_s(\cdot) \leq 0$ 为

$$\left. \begin{aligned} S(\cdot) (S_1 \text{ 或 } S_3) &= -f^* N(\cdot), \quad (f^* = f_k \text{sgn} S) \\ |S(\cdot)| &\leq f_s |N(\cdot)| \end{aligned} \right\} \text{移.}$$

}

和分离区的端点条件

$$g(x) = g(x) = 0 \tag{23}$$

一起构成了单侧问题求解的核心. 式中 $g(x) = (x - a)^A (x - b)^{1-A}$, $A = \tan^{-1} (- P/R) / \pi$, $0 < A < 1$ 为方程 (21) 的基本解. Comninou 和 Dundurs 的研究指出, 方程 (21) 只对某些特殊的 P, Q, K, R 有解析解, 而在一般情况下, 需作数值求解^[48,49]. 同时他们还指出, P 的代数符号决定着解的性质, $P \geq 0$ 所得到的解在物理上是可以接受的, 它使间隙非负 ($g \geq 0$), 法向力非正 ($N \leq 0$), 这只对一定的入射角 θ_0 及界面二侧介质组合才有可能; 而当 $P < 0$ 时, 问题只有奇解. 他们的研究显示, 修正解是一自相平衡的解, 它使反射波、折射波发生相移和畸变, 使介质沿界面发生蠕动等等, 但它不改变 Snell 定律.

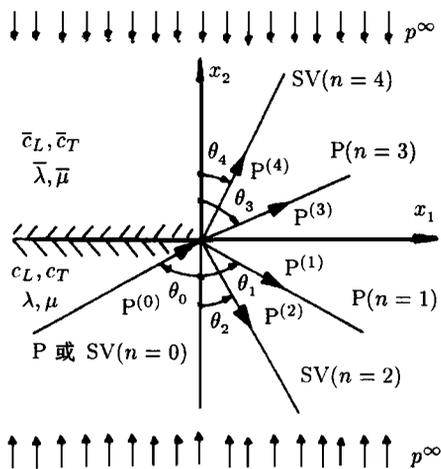


图 4 双半平面中的稳态平面波

用类似的方法, 龚育宁研究了初始界面滑动速度不为零时 SH 波在滑动接触面上的反射与折射, 以及 SH 波在平面受剪滑动面上诱导 P 波及 SV 波等问题^[50~52].

例 3 双半平面中的稳态平面波 (Comninou 和 Dundurs, 1977)^[36].

考虑如图 4 所示的双半平面, 其界面是单侧, 且无摩擦的, 即 $f_s = f_k = 0$, 在稳态的 P 或 SV 波入射下, 由于各场量的周期性, 在仅需考虑的 $[-\pi, \pi]$ 区间内, 假定只有一个为粘着区包围的待定分离区 (a, b) . 于是按着已知的双侧问题的解 U_i, σ_{ij} 和修正解的构造 (式 (18)), 把式 (17) 代入界面条件 (1) ~ (4), 经过简化, 便可得到确定修正

解级数 (式 (18)) 系数 F_m 的对偶级数方程, 再引入位错密度函数 $\phi(x)$, 即

$$\sum_{m=1}^{\infty} m (L_m \sin m \theta + M_m \cos m \theta) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq \theta < a, b < \pi) \\ \phi(x) & (a < \theta < b) \end{cases} \text{对}$$

)

从而使式 (24) 变成一个 $[-\pi, \pi]$ 区间上完整的 Fourier 级数, 其系数为

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= \left(A_0 \sin \theta - p \right) \\
 L_m &= \frac{b}{\mu a m} \left(A_0 \sin \theta - p \sin m \theta \right) \\
 M_m &\xrightarrow[\mu a m]{\text{法向}} \left(A_0 \sin \theta - p \cos m \theta \right)
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ \\ \leq \text{二侧} \end{array}$$

www.cnki.net

)]

例 4 SH 应力脉冲所引起的界面滑动 (Comninou 和 Dundurs, 1980)^[41].

考虑单侧界面连接的双半空间在 SH 应力脉冲 $f(x)$ 作用下半空间介质沿界面所引起的滑动, 如图 6 所示, p, q 分别为双半空间上施加的预压力及预剪力. 界面剪力 $S = \tau_{23}$ 对应的双侧问题的解 τ_{23} 为^[8]

$$\tau_{23} = A_0 f(x) + q \quad (31)$$

视滑动区为螺位错 (screw dislocations) 密度分布 $\phi(x)$ 时, 相应的修正解 τ_{23} 为^[75]

$$\tau_{23} = A_1 \left[\phi(x) + A_2 \int_{-}^{+} \frac{\phi(\xi)}{\xi - x} d\xi \right] \quad (32)$$

在滑动区, 依摩擦规律式 (20) 有

$$S = \tau_{23} + \tau_{23} = f_k p \quad (33)$$

把式 (31), (32) 代入式 (33), 则得如式 (21) 所示的奇异积分方程. 其中, $R=1, P = A_2/A_1, K(x, \xi) = 0, Q(x) = [A_0 f(x) + q - f_k p] / A_1$. 在这种情况下, 积分方程 (21) 可以解析地解出为

$$\phi(x) = \frac{1}{1 + A_2^2/A_1^2} \left\{ \frac{A_0}{A_1 f(x)} - \frac{f_k p - q}{A_1} - A_2 \int_{-}^{+} \dots \right\} \quad (34)$$

而相容条件 (22), 及静摩擦条件 (20) 变为

$$\frac{A_0 f(x) - f_k p - q}{A_1} = 0 \quad (35)$$

及

$$\left| A_0 f(x) + q - A_1 \cdot A_2 \int_{-}^{+} \frac{\phi(\xi)}{\xi - x} d\xi \right| < f_k p \quad (x > a, x < b) \quad (36)$$

它们共同给出滑动区 (a, b) 的位置及范围, 例如对于抛物线型脉冲

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

]

2.2.4 其它方法

单侧界面的一个典型例证就是裂纹面。裂纹是断裂力学研究的一个核心问题。在通常的分析中，我们总是假定裂纹面之间是不存在相互作用的，这只是出于数学处理上的简单罢了。十分明显，在波动力的作用下，裂纹面间的接触和相互作用是不可避免的，这种接触和相互作用将引起复杂的界面状态。但是若不考虑这种状态，裂纹的分析结果（即便是再“精确”）也实在很难说清是在处理现实世界中的真实问题。其实，不只是裂纹的动态扩展问题，就是静力问题，若是忽略裂纹面的接触，也会带来难于解释的结果。事实上，对于一个裂纹的分析表明，在裂尖（ $x = 1$ ）附近，垂直于裂纹面的法向位移差 u 显出如下振荡性态^[53,54]，

$$u = a (1 - x^2)^{1/2} \cos \left[\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right] \quad (40)$$

式中， a ，是只与载荷及材料有关的常数， x 为沿裂纹方向的坐标，裂纹半长为 1。于是，裂纹面在裂尖附近将发生振荡式的重叠，与已知的前提发生矛盾。这说明我们所臆造的力学模型有不合理性。值得庆幸的是，对于静裂纹问题，重叠区也只不过是裂纹长度的万分之一^[55]，不予以考虑也许不会影响大局，但对于应力波作用下的裂纹动态问题，不考虑裂纹面接触和相互作用的理论所带来的后果就不得而知了。为了消除静裂纹裂尖处振荡性态，1977 年和 1978 年 Comninou 和 Achenbach 相继提出了裂尖接触模型^[55]和裂尖吸附性模型^[56]。这可以看作是单侧界面问题的一种模型解法，这种方法后来被直接或间接地推广到弹性波与裂纹相互作用的问题中。王晓东提出了裂尖闭合界面模型，求解了层状介质中稳态及瞬态弹性波与扩展及非扩展裂纹间的相互作用问题^[57~60]，而周振功则直接把 Achenbach 的裂尖吸附性模型用于层状介质中的弹性波散射问题^[61]。此外还有周晶，李庆斌，周建人，Pekau 等人的工作^[62~65]。刘晶波等人则讨论了单侧界面问题的数值解法^[66,67]。他们将空间域采用有限元离散，时间域采用中心差分离散，使用集中质量有限元方法得到了任一节点 j 的时域逐步积分方程

$$u_j^{p+1} = 2u_j^p - u_j^{p-1} - \frac{t^2}{M_j} \sum_l K_{jl} u_l^p + \frac{t^2}{M_j} \left(F_j^p + R_j^p + f_j^p \right) \quad (41)_q$$

式中， u_l^p 为位移向量； K_{jl} 为刚度矩阵； M_j 为集中质量； $p = 0, 1, 2, \dots$ ； t 为时间步长； F_j^p 为已知外载荷向量； R_j^p ， f_j^p 分别为裂纹间接触正应力及剪应力形成的节点力向量。由此， u_j^{p+1} 被分解为由 F_j^p ， R_j^p ， f_j^p 决定的 3 个部分 \bar{u}_j^{p+1} ， u_j^{p+1} ， v_j^{p+1} ，即

$$u_j^{p+1} = \bar{u}_j^{p+1} + u_j^{p+1} + v_j^{p+1} \quad (42)$$

刘晶波等人给出了 R_j^p ， u_j^{p+1} 及 f_j^p ， v_j^{p+1} 的算法程序，获得了裂纹面上动接触正应力及剪应力的大小与分布。

3 问题与展望

目前，有关弹性波与单侧界面相互作用的研究尽管作了不少工作，但也只能看成是一个初步工作，因为不论对分析的模型，分析的方法还是扩大对所分析的问题的范围都有相

当多的工作要作。Fischer, 松本等人^[13~20]的分析方法只适用于杆; Sesawa, Kanai 和 Miller 等人^[21~34]的分析方法只限于界面滑而不离的情况, 而且界面剪应力也与界面两侧介质间的相对位移 e 及它的时间导数有关的假定并没有牢靠的理论与实验基础; Comninou 和 Dundurs 等人^[36~47]的工作应该说代表着现今有关单侧界面问题分析的最高水平, 但是他们的双侧修正法有着致命的弱点, 首先单侧界面在弹性波照射下所处的状态, 即分离区、滑动区、粘着区的分布在分析之前必须人为设定, 尽管这种设定基于某些考虑, 但也不一定符合客观实际。最近, 我们从单侧界面 Love 型波的研究中发现在 [- ,] 的一个波动周期区内, 分离区可能出现一大一小的 2 个, 在特殊情况下退化成一个¹⁾, 这与 Comninou 和 Dundurs^[36]的假定并不符合。其次, 双侧修正法的前提是要有双侧解, 理论上讲这可能不成问题, 但实际上由于双侧解通常都比较复杂, 在单侧问题中并不便于分析使用, 正是因为这样, Comninou 和 Dundurs 等人所论及的全部工作也只是涉及到双半空间的平面及反平面双侧界面问题的解, 因为这是最简单的双侧解。目前, 有关裂纹分析的模型方法(裂尖闭合模型、吸附模型和动接触模型等)多半是从静裂纹问题引伸过来的, 在裂纹的动态问题中, 裂纹面的接触状态可能与静力问题很不相同, 这是分析中没有注意到的。单侧界面分析的数值方法与解析法相比对处理比较复杂的问题显示出较大的优越性。但数值解不利于对问题进行机理分析, 而且迭代收敛性、计算量、数值离散及在无限域问题中人工边界的引入所带来的误差, 特别是用(有限自由度的)网格节点上介质的运动来模拟(无限自由度的)连续介质波动问题所产生的失真与附加畸变效应等还均需作进一步研究。现在, 有待解决的单侧界面问题很多, 我们可以简单地举出如下: 弹性波在具有单侧界面的多层介质中的传播问题; 单侧界面约束层间的波导问题; 单侧界面的非稳态及冲击问题; 单侧约束加层半空间上的 Love 型及 Rayleigh 型波问题; 单侧界面层状介质中的球面波(或柱面波)问题; 具有单侧界面的各种结构中弹性波的传播问题; 无限(或有限)体各种形式的裂纹与弹性波相互作用的问题; 固体间的冲击问题; 弹性波在单侧界面上的耦合与极化问题等等。这些问题用前面我们谈到的方法都是很难解决的。不仅如此, 就是 Comninou 和 Dundurs^[36]多次讨论的具有单侧约束的双半平面问题至今也未能给出波场的全解。特别应该指出的是, 单侧界面问题的实验, 目前除了松本等人有关杆的结果之外, 可以说完全是个空白。这表明必须对单侧界面问题作深入的研究。在此, 我们应该注意到, 无论是单侧界面还是双侧界面都是对介质间真实连接关系的一种理想化, 而且是两个极端情况的理想化。在实际问题中有的近于单侧界面, 有的近于双侧界面, 但绝对不可能与两者之一完全吻合。我们可以想象得出, 两个相连的介质, 其性质不可能从一边经过一个无厚度的数学平面突然跳跃到另一边, 其间必有一个过渡层, 即使再薄也不可能是一个数学平面。正是这样的原因, 1977 年 Atkinson^[68]在介质间首先引入了界面层的概念, 他把该层的性质用粘弹性来描述。后来, Erdogan 等人引入剪、拉非耦合弹簧界面模型^[69]以及更一般的非均匀连续介质界面层模型^[70~72], 还有 1994 年杨卫等人^[73]提出的非均匀界面模型。这些模型在断裂或细观力学问题的研究中起了很大作用。介质间界面层的存在不但是真实的, 而且对弹性波的传播也有重要的影响, 这一点在我们最近的研究中已展示出来^[76]。在弹性波与界面相互作用问题的研究中, 如果我们把界面层也引进来,

1) 将在 ASMEJ. Appl. Mech. 发表。

可能是既真实也可行的方法。基于这样的考虑，最近我们把单侧界面视为具有不同拉压性能材料的介质层^[74]，重新研究了 Comninou 和 Dundurs 等人^[36]的工作，初步显示，Comninou 和 Dundurs 等人^[36]作出的，诸如在分离区尾缘（trailing edge）介质突然闭合（slam close）等结论是需要作进一步考虑的^[77]。

在单侧界面条件下，弹性波的传播问题是一个重要的理论与工程实际问题，但目前人们对它的认识还很肤浅，我们指待在这方面的研究会有更大的进展。

参 考 文 献

- 1 Poisson S D. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastiques. *Mem Acad Sci Paris*, 1829, 18: 357 ~ 570
- 2 Rayleigh Lord. On waves propagated along the plane surface of anelastic solid. *Proc London Math Soc*, 1885, 17: 4 ~ 11
- 3 Ewing W M. *Elastic Wave in Layered Media*. New York: McGraw-Hill, 1957
- 4 Brekhovskich L M. *Wave in Layered Media*. Moscow: Izdat, Akad, Nauk SSSR, 1960
- 5 Miklowitz J. *Theory of Elastic Waves and Waveguides*. Amsterdam: North Holland, 1978
- 6 Goldsmith W. *Impact*. London: Edward Arnold Ltd, 1960
- 7 Pao Y H, Mow C C. *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*. New York: Crane and Russak, 1973
- 8 Achenbach J D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland, 1973
- 9 Eringen A C, Suhubi E S. *Elastodynamics (Volume 2, linear theory)*. New York: Academic Press, 1975
- 10 Pao Y H. Elastic waves in solids. *J Appl Mech*, 1983, 50: 1152 ~ 1164
- 11 徐植信. 弹性波传播理论一些问题的研究现状和展望. *上海力学*, 1989, 10 (3): 6 ~ 10
- 12 盖秉政. 弹性波绕射与动应力集中. *力学进展*. 1987, 17 (4): 447 ~ 465
- 13 Fischer H C. On longitudinal impact I. *Appl Sci Res*, 1959, A-8 (2): 105 ~ 139
- 14 Fischer H C. On longitudinal impact II. *Appl Sci Res*, 1959, A-8 (4): 278 ~ 308
- 15 Fischer H C. On longitudinal impact III. *Appl Sci Res*, 1960, A-9 (1): 9 ~ 42
- 16 Fischer H C. On longitudinal impact IV. *Appl Sci Res*, 1960, A-9 (2): 93 ~ 138
- 17 Fischer H C. On longitudinal impact V. *Appl Sci Res*, 1960, A-9 (4): 213 ~ 247
- 18 Fischer H C. On longitudinal impact VI. *Appl Sci Res*, 1960, A-9 (4): 248 ~ 274
- 19 松本浩之, 三室弘, 松森保雄, 中原一郎. を受けた丸に生じる力およびそのば 日本機械学会論文集, 1963, 29 (197): 49 ~ 59
- 20 松本浩之, 荒井靖平, 中原一郎. によって生ずる力とそのば 日本機械学会論文集, 1964, 30 (215): 756 ~ 762
- 21 Sesawa K, Kanai K. A fault surface or a block absorbs seismic wave energy. *Bull Earthquake Res Inst, Tokyo Univ*, 1940, 18: 465 ~ 482
- 22 Kanai K. A new problem concerning surface waves. *Bull Earthquake Res Inst, Tokyo Univ*, 1961, 39: 359 ~ 366
- 23 Walsh J B. Seismic wave attenuation in rock due to friction. *J Geophys Res*, 1966, 71: 2591 ~ 2599
- 24 White J E. *Seismic Waves*. New York: McGraw-Hill, 1965
- 25 Knopoff L, MacDonald. Models for acoustic loss in solids. *J Geophys Res*, 1960, 65: 2191 ~ 2197
- 26 Knopoff L, Porter L D. Attenuation of surface waves in granular material. *J Geophys Res*, 1963, 68: 6317 ~ 6321
- 27 Knopoff L. Earth tides as triggering mechanism for earthquakes. *Bull Seism Soc Am*, 1964, 54: 1865 ~ 1870
- 28 Caughey T K. Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis. *J Appl Mech*, 1960, 27: 640 ~ 643
- 29 Iwan W D. A generalization of the concept of equivalent linearization. *Int J Non-Linear Mech*, 1973, 8: 279 ~ 287
- 30 Miller R K. An approximate method of analysis of the transmission of elastic waves through a frictional boundary. *J Appl*

Mech, 1977, 44: 652 ~ 656

- 31 Miller R K, Tran H T. Reflection, refraction and absorption of elastic waves at a frictional interface: SH motion. *J Appl Mech*, 1979, 46: 625 ~ 630
- 32 Miller R K, Tran H T. Reflection, refraction and absorption of elastic waves at a frictional interface: P and SV motion. *J Appl Mech*, 1981, 48: 155 ~ 160
- 33 Miller R K. The effects of boundary friction on the propagation of elastic waves. *Bull Seism Soc Am*, 1978, 68: 987 ~ 998
- 34 Miller R K. An estimate of the properties of Love-type surface waves in a frictionally bonded layer. *Bull Seism Soc Am*, 1979, 69: 305 ~ 317
- 35 Jackson D D. The attenuation of Love wave and toroidal oscillations of the earth. *Geophys J*, 1971, 25: 25 ~ 34
- 36 Comninou M, Dundurs J. Reflection and refraction of elastic waves in presence of separation. *Proc Roy Soc Lond*, 1977, A356: 509 ~ 528
- 37 Comninou M, Dundurs J. Singular reflection and refraction of elastic waves due to separation. *J Appl Mech*, 1978, 45: 548 ~ 552
- 38 Comninou M, Dundurs J. Elastic interface waves and sliding between two solids. *J Appl Mech*, 1978, 45: 325 ~ 330
- 39 Comninou M, Dundurs J. Interface separation in the transonic range caused by a plane stress pulse. *J Sound Vib*, 1979, 62: 317 ~ 325
- 41 Comninou M, Dundurs J. Interface slip caused by an SH pulse. *Int J Solids Struct*, 1980, 16: 283 ~ 289
- 42 Chez E L, Dundurs J, Comninou M. Reflection and refraction of SH waves in presence of slip and friction. *Bull Seism Soc Am*, 1978, 68: 999 ~ 1011
- 43 Chez E L, Dundurs J, Comninou M. Energy relations for SH waves interacting with a frictional contact interface. *Int J Solids Struct*, 1983, 19: 579 ~ 586
- 44 Comninou M, Dundurs J, Chez E L. Total reflection of SH wave in presence of slip and friction. *J Acoust Soc Am*, 1979, 66: 789 ~ 793
- 45 Dundurs J, Comninou M. Interface separation caused by a plane elastic wave of arbitrary form. *Wave Motion*, 1979, 1: 17 ~ 23
- 46 Comninou M, Dundurs J. Elastic interface wave involving separation. *J Appl Mech*, 1977, 44: 222 ~ 226
- 47 Comninou M, Barber J R, Dundurs J. Disturbance at a frictional interface. *J Appl Mech*, 1982, 49: 361 ~ 365
- 48 Erdogan F, Gupta G D. On the numerical solution of singular integral equation. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1972, 29: 525 ~ 534
- 49 Krenk S. On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kind. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1975, 33: 225 ~ 232
- 50 龚育宁. 平面应力脉冲打击运动接触面的问题. *华东工学院学报*, 1986, 3: 18 ~ 27
- 51 龚育宁. SH波在滑动接触面上的反射与折射. *固体力学学报*, 1987, 8 (2): 174 ~ 178
- 52 龚育宁. SH波在平面受剪单向接触面上的再极化. *固体力学学报*, 1990, 11 (3): 253 ~ 258
- 53 Lowengrub M, Sneddon I N. The stress field near a Griffith crack at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. *Int J Engng Sci*, 1973, 11 (9): 1025 ~ 1034
- 54 England A H. On stress singularities in linear elasticity. *Int J Engng Sci*, 1971, 9 (6): 571 ~ 585
- 55 Comninou M. The interface crack. *J Appl Mech*, 1977, 44: 631 ~ 636
- 56 Achenbach J D, Keer L M, Khetan R P, Chen S H. Loss of adhesion at the tip of an interface crack. *J Elasticity*, 1979, 9 (4): 397 ~ 424
- 57 王晓东. 层状介质中裂纹的弹性波散射和运动边界问题: [博士论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学力学系, 1988
- 58 Wang X D. The effects of interfaces on propagating crack. *Int J Fract*, 1990, 45: 23 ~ 26
- 59 Wang X D. The interaction of elastic wave near the interface crack. *Int J Fract*, 1990, 43: 29 ~ 32
- 60 王晓东, 邹振祝, 王铎. 有限长界面裂纹对冲击载荷的响应. *爆炸与冲击*, 1991, 9 (3): 193 ~ 205
- 61 周振功. 界面接触型裂纹的动态响应问题研究: [博士论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学力学系, 1992

- 62 周晶, 倪汉根. 裂纹结构在地面运动下的反应分析. 地震工程与工程振动, 1986, 6 (2): 52 ~ 58
- 63 李庆斌, 周鸿均, 林皋. 异弹模界面裂纹的动断裂分析. 地震工程与工程振动, 1990, 10 (4): 63 ~ 72
- 64 周建人. 动接触减震法及其工程应用: [博士论文]. 大连: 大连理工大学力学系, 1987
- 65 Pekau O A, Zhang C H, Feng L M. Seismic fracture analysis of concrete gravity dams. *Earthq Eng Struct Dyn*, 1991, 20: 335 ~ 354
- 66 Liu J B, Wang D, Yao L. A contact force model in the dynamic analysis of contactable crack. *Acta Mechanica Sinica*, 1993, 6 (4): 439 ~ 452
- 67 刘晶波, 王铎, 姚玲. 动、静摩擦对可接触型裂纹动态影响的一种算法. 力学学报, 1994, 26 (4): 495 ~ 502
- 68 Atkinson C. On stress singularities and interface in linear elastic fracture mechanics. *Int J Fract*, 1977, 13: 807 ~ 820
- 69 Cecit M R, Erdogan F. The effect of adhesive layers on the fracture of laminated structures. *ASME J Eng Mater Tech*, 1978, 100: 2 ~ 9
- 70 Delale F, Erdogan F. On the mechanical modeling of the interfacial region in bonded half planes. *J Appl Mech*, 1988, 55: 317 ~ 324
- 71 Erdogan F, Kaya A C, Joseph P F. The mode III crack problem in bonded materials with a nonhomogeneous interfacial zone. *J Appl Mech*, 1991, 58: 419 ~ 427
- 72 Murat Ozturk, Fazil Erdogan. Antiplane shear crack problem in bonded materials with a graded interfacial zone. *Int J Engng Sci*, 1993, 31 (12): 1641 ~ 1657
- 73 Yang W, Shin C F. Fracture along an interlayer. *Int J Solids Struct*, 1994, 31: 985 ~ 1002
- 74 Ambartsumyan C A. 不同模量弹性理论. 邬瑞锋, 张允真译. 北京: 中国铁道出版社. 1986
- 75 Simmons J A, et al. Fundamental Spectra of Dislocation Theory, National Bureau of Standards Special Publication, 1970, 1 (317): 71 ~ 82
- 76 Gai Bingzheng. Scattering of SH wave by a crack in nonhomogeneous interlayer. In: Zhong Wanxie, et al. The Advances in Computational Mechanics. Beijing: International Academic Publishers, 1996. 347 ~ 354
- 77 汪越胜. 奇异积分方程在弹性动力学中的若干应用, 博士后研究报告 (第三部分), 哈尔滨: 哈尔滨建筑大学, 1995

THE STUDY OF THE PROPAGATING LAW OF ELASTIC WAVE UNDER UNILINEAR INTERFACE

Gai Bingzheng

Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

Abstract The interface is the separatrix between two media. It is only as an extreme in the model descriptions to be regarded as being bilateral. There are many cases in which its another extreme, i. e., the so-called unilateral model may possibly be more close to the reality. The propagation of elastic wave under unilateral interface are still not sufficiently investigated. It is the purpose of this paper to present a review on the current situations, problems and prospects in this research sphere.

Key words elastic wave, unilateral interface, interactions