第 27 卷 第 4 期 力 学 进 展 Vol. 27 No. 4
1997 年 11 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 1997

Birkhoff 系统动力学的研究进展 *

梅凤翔
北京理工大学应用力学系, 北京 100081

摘 要 提出一个新力学 ——Birkhoff 系统动力学的基本理论框架, 介绍近年的研究成果, 建议相关的未来研究方向.

关键词 Birkhoff 方程, Pfaff-Birkhoff 原理, Noether 理论, 动力学逆问题, 运动稳定性

1 引 言

1927 年美国著名数学家 Birkhoff G D 在其名著《动力系统》中给出比 Hamilton 方程更为普遍的一类新型动力学方程, 并给出比 Hamilton 原理更为普遍的一类新型积分变分原理[1]. 1978 年美国物理学家 Santilli R M 建议将这个新方程命名为 Birkhoff 方程. 这个新原理可称为 Pfaff-Birkhoff 原理. 1989 年苏联学者 Галиуллин А С认为, 对 Birkhoff 方程的研究是近代分析力学的一个重要发展方向[3].

以 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理为基础, 可以提出一个新力学 ——Birkhoff 系统动力学的基本理论框架, 包括

· Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理
完整力学系统的 Birkhoff 动力学
非完整力学系统的 Birkhoff 动力学
· Birkhoff 系统的积分理论
· Birkhoff 系统动力学逆问题
· Birkhoff 系统的运动稳定性
· Birkhoff 系统的代数和几何表示

Birkhoff 系统动力学是 Hamilton 力学的自然推广, 可在原子分子物理, 强子物理中找到应用[2]. 同时, 在非相对论经典力学范围内, 约束力学系统 ——完整的和非完整的, 可纳入 Birkhoff 系统的框架.

---

* 国家自然科学基金和高校博士点专项基金资助课题.

Hamilton 系统理论犹如一颗参天大树，已经根深叶茂，成为当今非线性科学研究中一个最富成果而又生机勃勃的研究方向[4]. 相信，Birkhoff 系统动力学亦将在非线性科学中扮演一个重要角色.

2 Birkhoff 系统动力学的基本理论框架

下面提出 Birkhoff 系统动力学的基本理论框架.

2.1 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理

2.1.1 Birkhoff 方程

Birkhoff 方程的一般形式为[2]

更为
$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu(t,a)}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\left(\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial t}\right)=0,\ (\mu=1,\cdots,2n) \tag{1}$$

其中 a^μ 为变量，t 为时间，R_μ（t，a）称为 Birkhoff 函数组，B（t，a）称为 Birkhoff 函数，而

$$\omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \tag{2}$$

称为 Birkhoff 张量. 如果函数 R_μ，B 都不显含时间 t，则 Birkhoff 方程称为自治的，有形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega_{\mu\nu}(a)\,\dot{a}^\nu-\frac{\partial B(a)}{\partial a^\mu}=0\qquad(\mu=1,\cdots,2n) \tag{3}$$

如果函数 R_μ 不显含时间 t，则 Birkhoff 方程称为半自治的，有形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\omega_{\mu\nu}(a)\,\dot{a}^\nu-\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu}=0\qquad(\mu=1,\cdots,2n) \tag{4}$$

一般形式的 Birkhoff 方程（1）称为非自治的. 通常假设 Birkhoff 方程是规则的，即设

$$\det(\omega_{\mu\nu})\neq 0 \tag{5}$$

众所周知，Hamilton 正则方程有形式

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\qquad(k=1,\cdots,n) \tag{6}$$

令

$$a^\mu=\begin{cases} q_\mu & (\mu=1,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,\cdots,2n)\end{cases}$$

则方程（6）可表为 Birkhoff 方程（4）的形式. 因此, Hamilton 正则方程（6）是半自治 Birkhoff 方程（4）的特殊情形.

2.1.2 Pfaff-Birkhoff 原理

积分

$$A = \int_{1}^{2}$$

论 框

,

t

$$, \quad R_\nu^0 = \begin{cases} p_\nu & (\nu = 1, \cdots, n) \\ 0 & (\nu = n+1, \cdots, 2n) \end{cases}$$

程形式，它自然是 Birkhoff 系统.

2.2.2 一般完整系统的 Birkhoff 动力学

一般完整力学系统的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{14}$$

它可展开为

$$\ddot{q}_s=g_s(q_k,\dot{q}_k,t) \qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{15}$$

有多余坐标的完整力学系统，变质量完整力学系统，完整系统的相对运动动力学等都有形如（15）的方程. 令

$$a^s=q_s \qquad a^{n+s}=\dot{q}_s$$

则方程（15）表为标准一阶形式

$$\begin{aligned}&\dot{a}^\nu=\sigma^\nu \qquad (\nu=1,\cdots,2n)\\&\sigma^s=a^{n+s},\quad \sigma^{n+s}=g_s(a^k,a^{n+k},t)\end{aligned} \tag{16}$$

欲使方程（16）有 Birkhoff 形式（1），即要求

$$\dot{a}^\mu-\sigma^\mu\equiv\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)=0$$

于是有

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu(t,\mathrm{a})=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t} \qquad (\mu=1,\cdots,2n) \tag{17}$$

对于给定的 Birkhoff 函数 B，无论 Birkhoff 函数组 R_μ 是否显含 t，方程（17）总可表为 Cauchy- Ковалевская型的. 根据 Cauchy- Ковалевская定理知，方程（17）的解总是存在的[2]. 因此，一切完整力学系统的运动方程总有 Birkhoff 表示. 当然，对具体力学问题如何构造 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ，这是一个困难问题. 文献［2］给出一些构造方法.

2.3 非完整力学系统的 Birkhoff 动力学

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s（$s=1,\cdots,n$）来确定，它的运动受有 g 个理想双面 Четаев型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \tag{18}$$

则系统的运动方程可表为 Routh 形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{19}$$

在运动微分方程积分之前，可由方程（18）、（19）求出乘子 λ_β 作为 q，$\dot{q}$，t 的显函数[7]，记作

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(q_s,\dot{q}_s,t) \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{20}$$

将式（20）代入方程（19）并解出所有 $\ddot{q}_s$，记作

$$\ddot{q}_s = g_s(q_k, \dot{q}_k, t) \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{21}$$

称方程（21）为与非完整系统（18），(19）相应的完整系统的运动方程. 如果运动初始条件满足约束方程（18），即

$$f_\beta\left(q_s^0, \dot{q}_s^0, t^0\right) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{22}$$

那么方程（21）的解就给出所论非完整系统的运动. 因此，非完整系统运动方程的 Birkhoff 化问题转化为相应完整系统方程（21）的 Birkhoff 化问题. 类似于2. 2 节中的讨论知，一切一阶非完整系统的运动方程都有 Birkhoff 表示[8].

关于 Чаплыгин 非完整系统的 Birkhoff 表示问题参见文献 [9].

关于高阶非完整系统的 Birkhoff 化问题，可利用文献 [10] 的方法，转化为相应完整系统的 Birkhoff 化问题.

2.4 Birkhoff 系统的积分理论

Birkhoff 系统的积分理论主要包括 Birkhoff 方程的变换理论，广义 Hamilton-Jacobi 方法，Birkhoff 系统的 Noether 理论，积分 *Birkhoff* 方程的场方法，*Birkhoff* 系统的 *Poisson* 理论等.

2.4.1 *Birkhoff* 方程的变换理论

变换理论是一种重要的积分理论. 在等时变换

$$t \to t' \equiv t, \qquad a^\mu \to a'^\mu(t, a) \tag{23}$$

下，新的 *Birkhoff* 函数 B 和新的 *Birkhoff* 函数组 R'_ρ 分别选为

$$\begin{aligned} B'(t, a') &= \left[B - \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial a^\alpha}{\partial t} R_\alpha\right](t, a) \\ R'_\rho(t, a') &= \left[\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\rho} R_\alpha\right](t, a) \end{aligned} \tag{24}$$

则在新变量下 *Birkhoff* 方程保持其形式

$$\sum_{\sigma=1}^{2n}\left(\frac{\partial R'_\sigma(t, a')}{\partial a'^\rho} - \frac{\partial R'_\rho(t, a')}{\partial a'^\sigma}\right)\dot{a}'^\sigma - \left(\frac{\partial B'(t, a')}{\partial a'^\rho} + \frac{\partial R'_\rho(t, a')}{\partial t}\right) = 0$$

$$(\rho = 1, \cdots, 2n) \tag{25}$$

在非等时变换

$$t \to t'(t, a), \quad a^\mu \to a'^\mu(t, a) \tag{26}$$

下，新的 Birkhoff 函数 B' 和新的 Birkhoff 函数组 R'_ρ 分别选为

件　　运动

$$B'(t',a') = \left(B\frac{\partial t}{\partial t'} - \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial a^\mu}{\partial t'}\right)(t',a')$$

题转　应　完整

$$R'_\rho(t',a') = \left(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \frac{\partial a^\mu}{\partial a'^\rho} - B\frac{\partial t}{\partial a'^\rho}\right)(t',a') \tag{27}$$

则在新变量下 Birkhoff 方程保持其形式[2]

$$\sum_{\sigma=1}^{2n}\left(\frac{\partial R'_\sigma}{\partial a'^\rho} - \frac{\partial R'_\rho}{\partial a'^\sigma}\right)\frac{\mathrm{d}a'^\sigma}{\mathrm{d}t'} - \left(\frac{\partial B'}{\partial a'^\rho} + \frac{\partial R'_\rho}{\partial t'}\right) = 0 \qquad (\rho = 1, \cdots, 2n) \tag{28}$$

如果等时变换 (23) 满足以下等式

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu(t,a)\,\mathrm{d}a^\mu - B(t,a)\,\mathrm{d}t - \sum_{\mu=1}^{2n} R'_\mu(t,a')\,\mathrm{d}a'^\mu + B'(t,a')\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}F(t,a,a') \tag{29}$$

其中 F 为 t, a, a' 的某函数，则变换 (23) 为广义正则变换.

2.4.2　广义 Hamilton-Jacobi 方法

研究半自治 Birkhoff 方程 (4). 假设在广义正则变换

$$t \to t' \equiv t,\quad a^\mu \to a_0^\mu(t,a) \tag{30}$$

下，新的 Birkhoff 函数恒为零，即

$$B(t,a) \to B'_0(t,a_0) = \left(B - \sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial a^\alpha}{\partial t}R_\alpha\right)(t,a_0) \equiv 0 \tag{31}$$

则变换后的 Birkhoff 方程给出

$$\dot{a}_0^\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \cdots, 2n)$$

于是

$$a_0^\nu = a_0^\nu(t,a) = \text{const.} \tag{32}$$

而原方程 (4) 的解由逆变换

$$a^\mu = a^\mu(t,a_0)$$

来得到，其中 a_0^ν 起着积分常数作用.

广义 Hamilton-Jacobi 方程为[2]

$$\frac{\partial A^g}{\partial t} + B(t,a) = 0 \tag{33}$$

$$R_\mu(\mathrm{a}) = \frac{\partial A^g}{\partial a^\mu}, \quad R_\mu(\mathrm{a}_0) = -\frac{\partial A^g}{\partial a_0^\mu} \tag{33}$$

其中

$$A^g(\widetilde{E}) = \int_0 \mathrm{d}t \left[\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu(\mathrm{a})\,\dot{a}^\mu - B(t,\mathrm{a}) \right](\widetilde{E}) \tag{34}$$

在

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu} \neq 0$$

下，方程 (33) 总可归为关于$\frac{\partial A^g}{\partial t}$，$\frac{\partial A^g}{\partial a^\mu}$的一个偏微分方程.

2.4.3　Birkhoff 系统的 Noether 理论

寻求力学系统守恒量的近代方法是研究 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性，这就是所谓 Noether 对称性理论. 用 Pfaff 作用量替代以往研究中的 Hamilton 作用量，引进 r-参数变换群的无限小变换的广义准对称性，可以建立 *Birkhoff* 系统的 Noether 理论.

对 Birkhoff 系统 (1)，如果有限群 G_r 的无限小变换

$$t^* = t + \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t,\mathrm{a}), \quad a^{\mu *} = a^\mu + \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \xi_\mu^\alpha(t,\mathrm{a}) \tag{35}$$

是准对称变换，则系统有 r 个独立的第一积分[11]

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + \lambda^\alpha = C^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{36}$$

其中 λ^α 称为规范函数. 生成函数 ξ_0^α，ξ_μ^α 和规范函数 λ^α 满足如下广义 Killing 方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial a^\nu} + \sum_{\mu=1}^{2n}\left(R_\mu \frac{\partial \xi_\mu^\alpha}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu^\alpha \right) + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0^\alpha - B\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, 2n)\\
&-\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t}\xi_0^\alpha + B\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2n}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu^\alpha - R_\mu \frac{\partial \xi_\mu^\alpha}{\partial t} \right) = 0
\end{aligned}\right\}$$

2.5 **Birkhoff 系统动力学逆问题**

动力学逆问题是经典力学的主要问题之一，同时又与许多新兴学科密切相关[15]．对于 Birkhoff 系统动力学可提出如下 4 类逆问题：

(1) 已知系统运动性质来组成 Birkhoff 方程，或者根据已知一部分运动方程和一些运动性质来封闭方程组；

(2) Birkhoff 系统的对称与动力学逆问题；

(3) 根据 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理组建运动方程；

(4) 广义 Poisson 方法与动力学逆问题．

2.6 **Birkhoff 系统的运动稳定性**

Birkhoff 系统的稳定性问题，包括系统的平衡稳定性和运动稳定性．

设自治 Birkhoff 系统 (3) 有平衡位置

$$a^\mu = a_0^\mu,\ \dot a^\mu = 0 \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n)$$

将其代入方程 (3)，得到平衡方程

$$\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)_0 = 0 \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{38}$$

令

$$a^\mu = a_0^\mu + \xi^\mu \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{39}$$

将式 (39) 代入方程 (3) 并注意到式 (38)，得到系统的受扰运动方程

$$\dot\xi^\mu = \sum_{\nu=1}^{2n}\left(\omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\right)_1 \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{40}$$

其中下标 1 表示其中的 a^μ 用式 (39) 替代的结果，而 $\omega^{\mu\nu}$ 为 $(\omega_{\mu\nu})$ 的逆矩阵元素．方程 (40) 的一次近似方程写成形式

$$\sum_{\nu=1}^{2n}(\Omega_{\mu\nu})_0\,\xi^\nu - \sum_{\nu=1}^{2n}(\omega_{\mu\nu})_0\,\dot\xi^\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{41}$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 B}{\partial a^\mu \partial a^\nu} \tag{42}$$

由方程 (40)、(41)，利用 Ляпунов 直接法和一次近似法，可得如下结论：

如果 $a^\mu = a_0^\mu$ ($\mu = 1, \cdots, 2n$) 是自治 Birkhoff 系统的平衡位置，若 Birkhoff 函数 B 满足 $B(a_0^\mu) = 0$，且 B 在 $a^\mu = a_0^\mu$ 的邻域内为定号函数，则系统平衡位置是稳定的．自治 Birkhoff 系统一次近似方程 (41) 的特征方程的根总是成对互为反号出现的；如有实部不为零的根，则平衡是不稳定的[16]．

对 Birkhoff 系统的运动稳定性问题亦可进行类似讨论[17]．

2.7 Birkhoff 系统的代数和几何描述

2.7.1 代数表示

将余切丛 T^*M 上的函数 $A(a)$ 按自治 Birkhoff 方程 (2) 或半自治 Birkhoff 方程 (3) 对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial a^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu} \Delta A \circ B \tag{43}$$

它满足右分配律，左分配律和标律

$$\begin{aligned} &A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C \\ &(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \\ &(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha (A \circ B) \end{aligned} \tag{44}$$

因此，自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程具有相容代数结构．进而，有

$$\begin{aligned} &A \circ B + B \circ A = 0 \\ &A \circ (B \circ C) + B \circ (C \circ A) + C \circ (A \circ B) = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

因此，代数结构归为 Lie 代数结构[2].

对非自治形式 Birkhoff 方程 (1) 来说，没有相容代数结构.

2.7.2 几何表示

Birkhoff 方程以局部坐标中的恰当辛形式为特征．对自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程定义微分 1-形式

$$R_1 = R_\nu(a)\, \mathrm{d} a^\nu \tag{46}$$

它的外微分 $\mathrm{d}R_1$ 是余切丛 T^*M 上的 2-形式

$$\Omega = \mathrm{d}R_1 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\, \mathrm{d}a^\mu \wedge \mathrm{d}a^\nu \tag{47}$$

它有恰当特性．对非自治形式的 Birkhoff 方程，定义微分 1-形式

$$\hat{R}_1(\hat{a}) = \hat{R}_\nu(\hat{a})\, \mathrm{d}\hat{a}^\nu, \text{接}\ \hat{R}_\nu(\hat{a})^{\text{次近}} \begin{cases} -B & (\nu = 0) \\ R_\nu & (\nu = 1, \cdots, 2n) \end{cases}$$

X 为恰当辛流形 T^*M 上的全局 Birkhoff 向量场. 半自治形式 Birkhoff 方程的全局特性表为

$$
\begin{aligned}
& i_{\tilde{X}}\Omega_B \equiv \tilde{X} \rfloor \Omega_B = 0 \\
& t(\tilde{X}) = 1
\end{aligned}
\tag{51}
$$

其中

$$
\Omega_B = \tilde{\Omega} - \mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}t, \quad \tilde{\Omega} = \pi^* \Omega
\tag{52}
$$

称 $\tilde{X}$ 为半自治全局 Birkhoff 向量场. 一般形式的 Birkhoff 方程的全局特性表为

$$
\begin{aligned}
& i_{\tilde{X}}\mathrm{d}R \equiv X \rfloor \mathrm{d}R = 0 \\
& \mathrm{d}t(\tilde{X}) = 1
\end{aligned}
\tag{53}
$$

称 $\tilde{X}$ 为一般全局 Birkhoff 向量场[2].

有关更详尽内容可参考文献 [18].

3 结 语

文献 [2] 写道:“Birkhoff 力学是由 Hamilton 力学经过变换理论构造出的最一般可能的力学.”这是首次提出术语“Birkhoff 力学”. 文献 [2] 主要论述了 Birkhoff 方程, Birkhoff 方程的变换理论, Galilei 相对论的推广等三个问题. 本文称为“Birkhoff 系统动力学”, 并给出了它的基本理论框架. 随着科学技术的发展, 这个新力学还会增添许多新的内涵. 文献 [19] 认为, Birkhoff 力学是经典力学的新发展.

Birkhoff 系统动力学的进一步研究, 可考虑以下几个方面:

(1) 广义 Birkhoff 系统. 当系统方程的阶数不是 2n 阶, 而是更高阶时, 如广义经典力学系统, 广义 Hamilton 系统等. 对这类系统可建立广义 Birkhoff 系统动力学. 在这一方面, 文献 [20] 已作了某些研究.

(2) 约束 Birkhoff 系统. 当系统的变量 a^μ ($\mu = 1, \cdots, 2n$) 不是彼此独立的, 而受到一些约束时, 就称约束 Birkhoff 系统. 对约束 Birkhoff 系统, 需组建动力学方程, 研究方程的积分理论, 研究系统的运动稳定性, 研究它的近代数学方法等.

(3) 无限维 Birkhoff 系统. 当系统的阶数增至无限大时, 系统的动力学行为值得研究.

(4) Birkhoff 系统及其各种推广的应用. Birkhoff 系统本身及其各种推广在力学, 物理学以及工程科学中的应用会有广阔前景.

本文作为大会报告曾在 MMM-VI 会议上宣读.

参 考 文 献

1 Birkhoff G D. Dynamical Systems. Providence R I: AMS College Publ, 1927

2 Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag, 1983

3 Гапиуллин А С Аналитическая Цинамика Москва Наука, 1989

4 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1994

5 Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics I. New York: Springer-Verlag, 1978
6 梅凤翔. 分析力学专题. 北京: 北京工业学院出版社, 1988
7 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985
8 梅凤翔, 史荣昌. 关于 Pfaff-Birkhoff 原理. 北京理工大学学报, 1993, 13 (2II): 265～273
9 戴贤扬, 赵关康, 梅凤翔. Чаплыгин非完整系统的 Birkhoff 表示. 见: 陈滨, 梅凤翔. 中国非完整力学三十年. 开封: 河南大学出版社, 1994. 107～109
10 Мей Фунсян. Об одном методе интегрирования уравнений движения неголономных систем со связями высшего порядка. *ПММ*, 1991, 55 (4): 691～695
11 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Noether 理论. 中国科学 (A 辑), 1993, 23 (7): 709～717
12 Vujanovic B. A field method and its application to the theory of vibrations. *Int J Non-linear Mech*, 1984, 19: 383～396
13 梅凤翔. 非完整系统力学积分方法的某些进展. 力学进展, 1991, 21 (1): 83～95
14 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Poisson 理论. 科学通报, 1995, 40 (21): 1947～1950
15 梅凤翔. 动力学逆问题的提法和解法. 力学与实践, 1991, 13 (1): 17～23
16 梅凤翔. Birkhoff 自治系统的平衡稳定性. 科学通报, 1993, 38 (4): 311～313
17 Shi Rongchang, Mei Fengxiang, Zhu Haiping. On the stability of the motion of a Birkhoff system. *Mechanics Research Communications*, 1994, 21 (3): 269～272
18 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学的数学方法. 北京理工大学讲义, 1995
19 梅凤翔. 经典力学从牛顿到伯克霍夫. 力学与实践, 1996, 18 (4): 1～8
20 吴惠彬. Birkhoff 系统的几何理论: [学位论文]. 北京理工大学应用力学系, 1994

THE PROGRESS OF RESEARCH ON DYNAMICS OF BIRKHOFF'S SYSTEM

Mei Fengxiang

Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081

Abstract This paper presents the frame of fundamental theory of a new mechanic ——dynamics of Birkhoff's system. It cites the research results in recent years. It outlines the future directions of research.

Keywords Birkhoff's system, Pfaff - Birkhoff's principle, Noether's theory, inverse problem of dynamics, stability of motion