第 27 卷　第 3 期　　力 学 进 展　　Vol. 27　No. 3
1997 年 8 月 25 日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Aug. 25, 1997

非线性模态理论的研究进展 *

陈予恕　吴志强

天津大学力学系, 天津 300072

摘　要　对非线性模态理论的研究进展做了较全面的综述, 指出了该领域研究中存在的一些问题和今后的研究方向

关键词　非线性模态, 模态分岔, 模态动力学

1　非线性模态研究的发展概况

非线性模态的研究始于 50 年代末, 并且从一开始即与工程应用的需要密切相关. 当前线性模态理论已经成熟, 并且在工程应用中取得了重大成果. 然而, 线性理论忽略了实际系统固有的非线性, 有时会导致定性的理论错误, 特别是在共振情形下, 出现了除线性模态以外的模态. 正是在这种情况下, 力学工作者开始了非线性模态的研究. 研究的兴趣, 首先集中在非线性共振方面, 并且着眼于保守系统的非线性模态的研究. 这种研究还与数学家进行的关于 Hamilton 系统的周期解数目和稳定性的研究密切相关, 但为了保持合理的篇幅, 也为了不使所涉及的问题范围太大, 我们的综述将不包含这方面的工作.

非线性模态的概念, 最早由 Rosenberg 等 (1960 ～ 1965) [1～5] 引入, 研究离散、无阻尼、保守非线性系统的自由振动. 他们认为非线性模态是一种运动, 并根据这种运动在系统构型 (configuration) 空间中, 是对应通过平衡位置处的直线 (段) 还是曲线 (段), 将非线性模态分为相似的 (对应直线)、非相似的 (对应曲线).

非线性模态最早的研究应从 Kauderer (1958) [6] 的工作算起. Rosenberg 等人的工作[1～5] 之后, Atkinson 和 Taskett[7], Szemplinska (1990) [8], Rand (1971, 1974) [9～11], Mikhlin (1974) [12], Greenberg 和 Yang (1971) [13], van derVarst (1982) [14], Yen (1974) [15] 等都在这方面做了研究. Vakakis 与其同事 (1990 ～ 1992) 在一系列的研究中[11～16] 首先引入动力系统理论, 系统地分析了一类双质量弹簧保守强非线性系统的非线性模态及模态上的局部、全局动力学. 我国学者刘练生、黄克累 (1988) 的工作[17], 则将相似模态的概念作了推广, 使之能用于非线性保守系统、非线性自治系统及非线性非自治系统. 另外, 刘济科、陈振藩 (1995) 等人也作了一些工作.

Rosenberg 关于非线性模态的理论, 主导了该领域将近三十年的研究. 前面提到的工作

*国家自然科学基金、博士点基金资助项目

大都属于这一系列，并且主要针对保守系统进行分析．然而这种理论有其局限性，比如相似模态不是通有的，即是说相似模态实际存在的可能性很小，另外，Rand，Pak 和 Vakakis 的工作[11]，证明了另一种周期运动（EO）的存在，这种运动在构型空间的投影为包含原点的椭圆，因而既不是相似模态，也不是非相似模态．

直到 1993 年，Shaw 和 Pierre[18]引用动力系统理论中不变流形的概念来定义非线性模态，将非线性模态定义为系统相空间中二维不变流形上的运动．这一开创性的工作，将该领域的研究带入了新的发展阶段．

Shaw 和 Pierre 定义的非线性模态，不仅包含了相似模态及非相似模态，还包括了一类更广泛的行波运动．他们提出的构造非线性模态的方法，不仅可用于保守系统，还可用于非保守系统、陀螺系统．

最近，吴志强、陈予恕（1996）[19]将 Shaw 和 Pierre 的思想做了推广．他们认为非线性模态为系统模态空间中偶数维不变流形上的运动，并根据模态上的动力学方程，将非线性模态分为：非耦合模态、内共振模态．他们将[20]提出的直接求解非线性动力系统规范形（Normal Form）的方法用于非线性模态的构造，得到的模态上的动力学方程（即模态振子）具有 Normal Form 形式，这种形式最简的方程，不仅能反映系统在非线性模态上的动力学行为，而且还易于得到模态上运动的非线性频率、非线性稳定性等信息．而 Shaw 的方法得到模态振子是普通的单自由度非线性方程，要获得模态运动的非线性特征，如频率等，还须用摄动方法作进一步的分析．

Nayfeh，Chin，Nayfeh（1994）[21]研究线性部分解耦的有限多自由度系统的内共振非线性模态时，也使用了 Normal Form 方法（原文称为复不变流形法），不过采用的是文［20］方法的一种特殊形式．

连续系统的非线性模态的研究，近来也日趋活跃．King 和 Vakakis 于 1993 提出了保守非线性系统基于能量的非线性模态的计算公式[22]．Shaw 和 Pierre 于 1994 年将他们的构造非线性模态的方法推广到一维连续系统[23]．最近，他们又用理论分析和数值计算方法，考察了非线性模态的不变性及模态动力学近似，表明系统作纯非线性模态运动时，该非线性模态的三阶近似即能精度很高地反应系统的‘‘真实’’响应，而要得到相同程度的近似则要利用五个线性模态来分析，说明利用非线性模态分析系统的响应可以大大减少工作量．Nayfeh[24]用多种方法分析了连续系统的非线性模态．最近 Nayfeh（1995）[25]又提出了构造非线性模态的规范形方法，并对多尺度法、规范形方法、Shaw 和 Pierre 法[23]，King 和 Vakakis 法作了比较[22]，与此同时吴（1996）[20]又将［19］的工作推广到连续系统的情形．

上述研究涉及到非线性模态的三种定义、各种构造非线性模态的方法、非线性模态分岔、非线性模态的稳定性等诸方面的问题．下面我们分别从上述几方面，对我们所掌握的资料作些分析．

2　三种非线性模态概念的比较

本节叙述三种非线性模态的定义：Rosenberg[1～5]、Shaw 和 Pierre[18]，吴、陈[19]，并略作比较．

2.1 Rosenberg[1～5]定义

Rosenberg 理论认为非线性保守自治系统

$$\ddot{x} + f_i(x) = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{1}$$

的非线性模态是这样的一种运动:

①所有质点都进行同一周期的运动（不必是简谐的）,

②所有质点都在同一时刻通过其平衡位置,

③所有质点同时达到位移最大.

因而所有质点 x_i 的位置都可用任一质点（记为 x_0）的位置确定,

$$x_i = X_i(x_0) \tag{2}$$

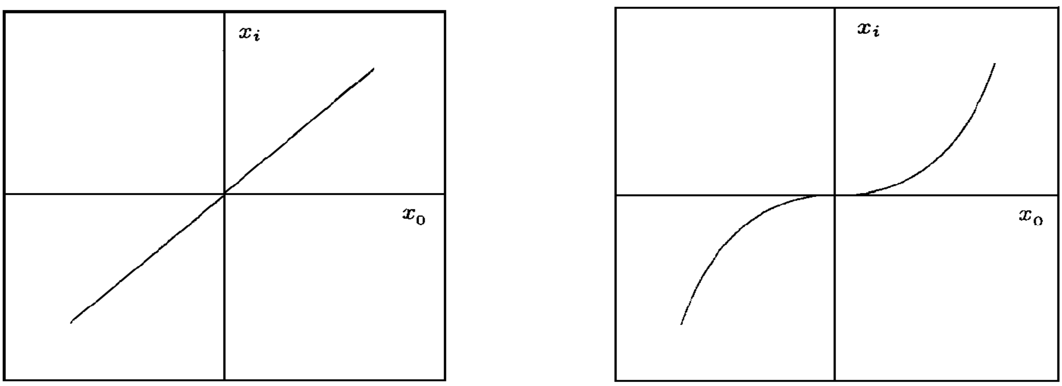
在这种定义下, 非线性模态分为

（1）相似模态

$$x_i = c_i x_0 \quad (c_i\text{为实常数}) \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{3}$$

（2）非相似模态

$$x_i = X_i(x_0) \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{4}$$



(a) 相似模态　　(b) 非相似模态

图 1 Rosenberg 非线性模态

式 (4) 中至少有一个 $x_s(s \in \{1, 2, \cdots, N\})$ 是非线性函数. 这两种模态上的运动在系统构型空间中投影分别为直线（图 1a）和曲线（图 1b）. 而非线性模态上的动力学, 则由单自由度保守系统方程（5）来描述

$$\ddot{x}_0 + f_0(x_0) = 0 \tag{5}$$

Shaw 和 Pierre[18]分析了更一般的多自由度系统

$$\ddot{x}_i + f_i(x, \dot{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{6}$$

即

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i \\ \text{算公} &= - f_i(x, y) \end{aligned}\right\}$$

给出了基于动力系统理论中不变流形这一概念的非线性模态的定义.

2.2 Shaw 和 Pierre[18] 模态

Shaw 和 Pierre 理论认为, 非线性自治系统 (6) 的非线性模态为发生在系统相空间中二维不变流形上的运动. 该流形具有如下性质: 通过系统稳定的平衡点, 且在该点处与相应线性化系统的二维特征子空间相切.

在此定义下, 非线性模态表示为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u \\ y_1 &= v \\ x_i &= X_i(u, v) \\ y_i &= Y_i(u, v) \quad (i = 2, 3, \cdots, N) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

在 (6) 中 $f_i(x, \dot{x})$ 不一定为有势力 (与速度项 $\dot{x}$ 无关), 因此 Shaw 和 Pierre 关于非线性模态的这种定义, 除适用于保守系统外, 还适用于非保守系统. 然而, 自然界中还存在大量的系统, 其运动方程

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in R^n \tag{9}$$

不能化成二阶微分方程组 (6) 的形式, 而其行为又经常表现出振荡性, 如生命系统, 化学反应系统, 机电系统等等, 对这类系统 Shaw 和 Pierre 的定义, 显然已不再成立.

2.3 吴、陈[19] 定义

他们认为, 非线性自治振动系统 (9) 的非线性模态为发生在系统模态空间中偶数维 ($2M$) 不变流形 (10) 上的运动.

$$x = X(Z, \bar{Z}) \tag{10}$$

该流形具有如下性质: 通过系统的平衡点, 并在该点处与相应线性化系统的 $2M$ 维线性特征子空间相切. (10) 中 Z 为 M 维复变量

$$Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_M)$$

而 $\bar{Z}$ 则表示其复共轭,

$$\bar{Z} = (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \cdots, \bar{Z}Z_M)$$

该流形上的运动方程为

$$\dot{Z} = JZ + C(Z) \tag{11}$$

其中 $J = \mathrm{diag}(i\omega_1, i\omega_2, \cdots, i\omega_M)$, $\omega_j (j = 1, 2, \cdots, M)$ 表示频率, 而 $C(Z)$ 则由满足 Poincare 共振条件

$$\langle m^+ - m^-, i\omega\rangle - i\omega_s = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, M)$$

的共振项 $Z^{m^+}\bar{Z}^{m^-}$（m^+, m^- 分别为 Z, $\bar{Z}$ 的指数向量）组成．根据模态动力学方程（11）的不同，非线性模态分为

(1) 非耦合模态（$M = 1$）

$$\dot{Z} = i\omega Z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (Z\bar{Z}) Z \tag{11a}$$

(2) 耦合模态（$M \geq 2$）

$$\dot{Z}_s = i\omega_s Z_s + f_s (Z_1\bar{Z}_1, Z_2\bar{Z}_2, \cdots, Z_M\bar{Z}_M) Z_s \quad (s = 1, 2, \cdots, M) \tag{11b}$$

(3) 内共振模态（$M \geq 2$）

$$\dot{Z}_s = i\omega_s Z_s + f_s (Z_1\bar{Z}_1, \cdots, Z_M\bar{Z}_M) Z_s + f_{sr}(Z, \bar{Z}) \quad (s = 1, 2, \cdots, M) \tag{11c}$$

其中 f_{sr} 由内共振项组成，内共振项满足内共振条件（12）

$$\omega_s = \langle m^+ - m^-, \omega \rangle \tag{12}$$

其中 $m^+ - m^- \neq e_s$（e_s 为第 s 个元素不为 0 的单位向量）．

在上述定义下，非线性模态可用于更广泛的非线性系统的分析，如奇数维系统的分析．每共振模态的提出，解决了 Shaw 和 Pierre 法不能分析内共振系统的问题．

更为重要的一点是，在这种模态定义下，模态上的动力学由形式最简的微分方程来描述．这种具有 Normal Form 形式的模态动力学方程，有助于简化模态上的动力学分析，并且这种形式的方程具有“标准性”，因而对它的分析结果，可用于任何非线性系统的模态分析，极大地避免了重复，从而为非线性模态分析走向工程应用奠定了基础．

以上三种模态的定义，都是针对离散系统而言的，但其思想在应用于连续系统时同样有效．这三种模态定义向连续系统推广时[20,22,23,25]，只是模态表达式的形式发生了变化，而模态上的动力学方程则保持形式不变．

在定义了非线性模态之后，面临的问题首先是如何求得系统的非线性模态，即构造系统的非线性模态．

3 构造系统非线性模态的方法

自从非线性模态概念提出以来，为了求解各种非线性系统的非线性模态，人们不仅引入了经典的摄动法，如谐波平衡法[8]、多尺度法[16,25]等，以及现代数学理论提供的方法如不变流形法[18,23]，规范形（Normal Form）法[19,25]，群论方法，还提出了一些新的方法，如几何法，参数匹配法．在具体的构造非线性模态的过程中，主要根据系统非线性强弱来采用不同的方法．

对保守非线性系统，文献［10，26，27］用几何方法确定构型空间中直（曲线）线（模线）存在时充分条件，［28，29］用参数匹配方法来确定系统的相似模态．［30，31］用群论的方法研究了对称弹簧系统的正交模态，证明了某些机械系统的空间构型的几何对称性反映了势函数的对称性．这三种方法可用于强非线性保守系统的分析．文［16］用 Mikhlin - Manevich 渐近法分析了系统非相似模态．

对弱非线性多自由度系统，摄动法被成功地用于构造保守系统及非保守系统的自由与强迫响应（含共振情况）的非线性模态．Shaw 和 Pierre[18]用不变流形的级数近似来构造非线性模态．而规范形方法的应用则见 [19，21]．

对弱非线性连续系统

$$\ddot{w} + L(w) + N(w, \dot{w}) = 0 \tag{13a}$$

$$B(w) + BN(w, \dot{w}) = 0 \quad (\text{边界条件}) \tag{13b}$$

(13a) 还可写为

$$\left.\begin{aligned} \dot{w} &= v \\ Z\dot{v} &= -[L(w) + N(w, v)] \end{aligned}\right\}$$

一当求得 $W(x, x_0, w_0(t))$ 非线性模态上的动力学方程，即可由 (13) 得到

$$\ddot{w}_0(t) = -[L(W) + N(W)]_{x=x_0} \tag{18}$$

而 $W(x, x_0, w_0(t))$ 满足的奇异边值问题有两种推导方法:

(i) 利用系统的总能不变的条件[22]

求得参考点处的速度 $\dot{w}_0$ 为

$$\dot{w}_0 = \frac{2\int [P_l(w) + P_n(w)]\,\mathrm{d}x - \int [P_l(w) + P_n(w)]_{w_0^{\bullet}}\,\mathrm{d}x}{\int \left(\frac{\partial w}{\partial w_0}\right)^2 \mathrm{d}x}$$

考虑到

$$\ddot{w} = \frac{\partial w}{\partial w_0}\ddot{w}_0 + \frac{\partial^2 w}{\partial w_0} \cdot \ddot{w}_0^2 \tag{19}$$

将 $\dot{w}_0$ 的表达式及 (18) 代入 (13a)，即得 w 满足的偏微分方程.

(ii) 利用描述模态上的非线性动力学方程对 m 阶非线性模态，有

$$\ddot{w}_0 + \omega_m^2 w_0 + \varepsilon f(w_0) = 0 \tag{20}$$

其中 ω_m 为 m 阶正交模态的线性频率，函数 $f(w_0) = N[W(x_0, x_0, w_0)]$ 在分析过程中确定. 积分 (20) 整理得

$$\dot{w}_0^2 = w_m^2(w_0^{*2} - w_0^2) + 2\varepsilon F(w_0^*) - 2\varepsilon F(w_0) \tag{21}$$

其中 $F' = f$, w_0^* 为 w_0 的最大值. 将 (13a), (18), (21) 代入 (19)，得奇异泛函方程

$$[\omega_m^2(w_0^{*2} - w_0^2) + 2\varepsilon F(w_0^*) - 2\varepsilon F(w_0)]\frac{\partial^2 w}{\partial w_0^2} -$$

$$[L(W) + N(W)]_{x=x_0}\frac{\partial w}{\partial w_0} = -L(W) - N(W) \tag{22}$$

方程 (22) 加边界条件

$$B(W) + BN(W) = 0$$

连同相容条件 (17)，可用来求解 w 关于 ε 的级数解.

(B) Shaw 和 Vakakis 法

记 $w_0(t)$, $v_0(t)$ 为参考点 $x = x_0$ 处的位移和速度 (x_0 不在非线性模态的结点处)，假设整个位移场和速度场均可表示为

$$\left.\begin{aligned} w(x,t) &= W(x, x_0, w_0(t), v_0(t)) \\ v(x,t) &= V(x, x_0, w_0(t), v_0(t)) \end{aligned}\right\} \qquad nM$$

(24)

且由（13a）可得模态上的动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{w}_0 &= v_0 \\ \dot{v}0 &= -\left[L(W) - N(W_N, V)\right]_{x = x_0} \end{aligned}\right\}$$

4 非线性模态的分岔

非线性模态的分岔，主要指模态数目的变化及一种模态向另一种模态的转化，还包括全局分岔、混沌. 在已有的相关研究中，Vakakis 的工作引人注目，在其博士论文及文 [11，13～15] 中，对一类两质量弹簧非线性保守系统做了系统的研究，包括相似模态数目的变化，不同类型模态间的转化，分岔解的局部稳定性分析及低能、高能情况下的全局动力学（含混沌）. 非线性模态最重要的特点是，系统模态的数目可以超过自由度数. 因而，模态数目的变化是三十多年来人们研究最多的一种非线性模态分岔.

Anand[34]分析非线性弹簧连接的两质量系统的自由振动时发现系统参数改变时可能产生模态分岔. Rosenberg[2]指出对同样的系统由相同的弹簧连接时，可能存在多于两个的模态. Yen[35]通过考虑势能函数展开式中控制大幅度运动、小幅度运动的项，分析了这种分岔的物理本质. 相似模态的轨道取决于势能中的参数，而与能量无关，因此给势能以摄动可能导致相似模态轨道的出现或消失[34～38]. 非相似模态，不仅其周期与系统的能量有关[9，26，39]，而且其数目也依赖于系统的能量（能量分岔）[26，37，39，40]. Johnson 和 Rand[26]指出存在多种能量分岔机制. Van Grosen[40]证明了两个（或更多）相似模态可能由于能量的影响联合成一个或多个非相似模态. 他[41]还证明一类经典的 Hamilton 系统（Hamilton 函数为偶函数）的正交模态的数目可能超过系统的自由度数.

Shaw 和 Pierre[18]指出有阻尼双质量弹簧系统的模态数目在一定条件下甚至能达到六个. Nayfeh，Chin，Nayfeh[21，42]指出内共振情况下非线性模态的数目可能多于线性模态的数目，并对非线性模态进行了计算.

5 非线性模态的稳定性及模态的动力学模拟

目前，有关模态稳定性的讨论，大部分是关于轨道稳定性的，且主要针对相似模态. 详细的文献请看陈予恕所做的综述[43].

在模态上的动力学模拟方面，现在见到的只有 Shaw 和 Pierre 的工作[18，23，44]. 这些数值模拟的结果，非常清晰地表明了非线性模态的不变性. 一个有趣的例子[18]是，利用非线性模态叠加来模拟两自由度大阻尼系统的衰减响应时，得到了比线性模态精确得多的逼近. 另一个有趣的例子[44]，则表明连续系统作纯模态运动时，非线性模态的三阶近似即可很好地模拟系统的“真实”响应，而线性模态分析要得到相同的精度则需要用 5 个模态，利用非线性模态分析减少的工作量是很可观的. 之所以说这两个例子有趣，是因为一当这两个结论可以推广的话，其工程应用的潜在的价值将是巨大的. 非线性模态理论，也只有在能比线性模态理论，提供精度更高的对系统响应的模拟以及更经济的分析手段的情况下，才能有生命力，才能实现提出非线性模态这一概念的初衷.

6 非线性模态研究中存在的一些问题及发展方向

应该说，要描述本节命题所包含的内容的全貌不是一件容易的事情. 我们这里给出一些我们对这一问题的粗浅的看法，供大家参考. Shaw 和 Pierre 等人在他们的工作中也就这一问题阐述了他们的观点，有兴趣的读者可参考 [18，23，44].

在“适当”地定义了非线性模态之后，非线性模态理论的研究应该包括如下两方面：

(1) 非线性模态分析

包括非线性模态的求解和模态上的动力学分析模拟

(2) 非线性模态的综合

指利用求得的非线性模态及相应模态上的动力学来构造、模拟系统的整体响应.

此处多言非线性模态定义的“适当性”,是指所定义的非线性模态及相应的模态动力学方程应该易于求解,模态上的动力学分析与模拟都应当是简单的,并且尽可能地利用已有的知识,同时这种模态应该具有正交性,得以使我们利用模态振子的响应来构造系统的整体响应.

在这种意义下,本文中给出的第三种模态定义可能是一种较好的选择. 文献 [20] 提供的求规范形的方法完全在线性代数理论的范围内,即可直接得到非线性模态表达式及模态上的动力学方程. 这种具有 Normal Form 形式的方程,形式最简,因而简化了模态上的动力学分析. 当模态动力学方程维数较低时,这种分析简化到仅仅是引用已有的结论而已. 另外,得到的模态上动力学方程是复坐标形式的,该方程及其相应的模态表达式中都不含有关于时间的正弦余弦函数,因此可更经济地进行模态上的动力学模拟. 基于同样的原因,在构造非线性模态的方法中,规范形方法是一种较好的选择. 多尺度法得到的极坐标系 F 模态表达式及模态上的动力学方程中含有关于以后的正弦、余弦函数,因而直接进行数值模拟时要花费更多的时间.

在模态综合方面,现有的工作还极少. Shaw 和 Pierre 等人的工作是针对特殊的、具体情形进行的,其结论的一般性如何还待深入的分析. 在构造非线性模态的各种方法,发展成熟后,模态的综合将是这一领域研究工作的热点. 因为已有的定义方法,只有能对系统整体响应提供很好的模拟,才真正具有合理性,也只有这样才能实现非线性模态服务于工程应用这一根本宗旨.

非线性模态的分岔,曾经是保守系统非线性模态的研究中非常重要的方面,体现非线性模态与线性模态的根本区别 ——非线性模态的数目超过系统线性模态的数目. 然而,从目前的研究中看,同时出现系统响应中模态的数目不会超过线性模态的数目. 那么另一种模态分岔是否会出现呢? 在这种模态分岔情况下,系统响应中模态的数目将超过线性模态的数目.

关于模态上动力学分析 (在第三种定义下,实际上是分析具有 Normal Form 形式的非线性动力系统),在低维情形已有大量零散的结果,有待进一步整理,并进行高维情形的研究.

还应该注意到,已有的非线性模态的定义都是针对自治系统而言的,因而存在如下的问题: 有无必要定义非自治系统的非线性模态? 如有,如何定义?

现有的构造非线性模态的方法只适用于光滑系统的分析,对于非光滑系统只能借助于平均法,这方面的工作还未见报道. 另外,这些方法中,除只适用于保守系统的方法外,大部分只适用于弱非线性系统的分析,如经典的摄动方法,但规范形方法是否只适用于弱非线性系统的分析,还未见有明确的结论.

参 考 文 献

1 Rosenberg R M. Normal modes of non-linear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1960, **27**: 263 ～ 268

2 Rosenberg R M. On normal vibration of a general class of non-linear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1961, **28**: 275 ～ 283

3 Rosenberg R M. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1962, **30**: 7 ～ 14

4 Rosenberg R M. On a geometrical method in non-linear vibrations in Les Vibrations Forces dan les Systems Nonlinearities. Int. Conf. In Nonlinear Vibrations, Marseille, 7～12 September 1964
5 Rosenberg R M. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 1966, **9**: 155～242
6 Kauderer H. Nichtlinear Mechanik. Berlin: Springer, 1958
7 Atkinson C P, Taskett B. A study of the nonlinearly related modal solution of coupled nonlinear system by superposition technique. *Journal of Applied Mechanics*, 1965, **32**: 359～364
8 Szemplinsk W. The behavour of nonlinear vibrating systems (Vol. 2). Dordrecht, Kluwer, 1990
9 Rand R H. Nonlinear normal modes in two degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, **38**: 561
10 Rand R H. A direct method for nonlinear normal modes. *Internal. Journal of Nonlinear Mechanics*, 1974, **9**: 363～368
11 Rand R H, Pak C H, Vakakis A F. Bifurcation of nonlinear normal modes in a class of two degree of freedom systems. *Acta Mechanica*, 1992, [supp. 3]: 129～145
12 Vakakis A F. Analysis and identification of linear and nonlinear modes in vibrating systems. [Ph. D. Thesis]. California: California Institute of Technology, 1990
13 King M E, Vakakis A F. An Energy-based formulation for computing nonlinear normal modes in undamped continuous systems. *Transactions of the ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1994, **116**: 332～340
14 Vakakis A F, Rand R H. Normal modes and global dynamics of a two degree of freedom nonlinear system-II. Low energies. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1992, **27**: 861～874
15 Vakakis A F, Vakakis R H, Rand R H. Normal modes and global dynamics of a two degree of freedom nonlinear system-I. Low energies. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1992, **27**: 875～888
16 Vakakis A F. Nonsimilar normal mode oscillations in a strongly nonlinear discrete systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, **158** (2): 341～361
17 **刘炼生，黄克累．一种用于非线性振动系统的模态分析方法．力学学报**，1988，**20** (1)：41～48
18 Shaw S W, Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratorysystems. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, **164** (1): 85～124
19 **吴志强，陈予恕，毕勤胜．非线性模态的分类与新的求解方法．力学学报**，1996，**28** (3)：298～307
20 **吴志强．多自由度非线性系统的非线性模态及** Normal Form **直接方法：[博士论文]．天津：天津大学力学系**，1996
21 Nayfeh A H, Chin C, Nayfeh S A. Nonlinear normal modes of a cantilever beam. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1995, **117**: 477～481
22 Szemplinska-Stupnicka W. Nonlinear normal modes and the generalized Ritz method in the problems of vibrations of nonlinear elastic continuous systems. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1983, **18**: 149～165
23 Shaw S W, Pierre C. Normal modes of vibration for nonlinear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **169** (3): 319～347
24 Nayfeh A H, Nayfeh S A. On non-linear modes of continous systems. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1994, **116**: 129～136
25 Nayfeh A H. On direct methods for constructing nonlinear normal modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Control*, 1995, **1**: 389～430
26 Johnson T L, Rand R H. On the existence and bifurcation of minimal normal modes. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1979, **14**: 1～12
27 Cooke C H, Struble R A. Perturbations of normal mode vibration. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1966, **1**: 147～155
28 Atkinson C P. On the stability of the linearly related modes of certain nonlinear two-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1961, **28**: 71～77
29 Atkinson C P, Bhatt, Pacitti. The stability of the normal modes of nonlinear systems with polynomial restoring forces of high degree. *Journal of Applied Mechanics*, 1963: 193～198
30 Mishra A K, Singh M C. The normal modes of nonlinear symmetric systems by group representation theory. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1974, 9: 463～480
31 Yang T L. Symmetry theory proprieties and normal modes vibrations. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1968, **3**: 367～381
32 **刘济科，赵令城，方同．非线性系统模态分叉与模态局部化现象．力学学报**，1995，**27** (5)：614～617

33 Benamer R, Bennounw M M K, White R G. The effects of large vibration amplitudes on the mode shape and natural frequencies of thin elastic structures Part I: simply supported and clamped-clamped beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, **142** (2): 179～195
34 Anand G V. Natural mode of a coupled nonlinear systems. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1972, **3**: 81～91
35 Yen D. On the normal modes of nonlinear dual-mass systems. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1974, **9**: 45～53
36 Month L A, Rand R H. The stability of bifurcating periodic solutions in a two-degree-of-freedom nonlinear system. *Journal of Applied Mechanics*, 1977, **44**: 782
37 Pragt G. Some aspects of normal modes in nonlinear systems. [B. Sc Thesis]. Dept Appl Mech Mech Eng. Twente University of Technology, The Netherlands, Enschede: 1981 (in Dutch)
38 Vito R. Similar normal mode vibration in certain conservative systems with two degrees of freedom. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1972, **7**: 473～487
39 Atkinson C P, Beverly T. A study of nonlinear related modal solutions of coupled nonlinear systems by superposition techniques. *Journal of Applied Mechanics*, 1965, **32**: 359
40 Grosen E V. On normal modes in classical Hamiltonian systems. KUN Report 8204, Mathmatical institute Nijmegen University, 1982
41 Grosen E V. Existence of multiple normal mode trajectories on curved energy surfaces of even, classical Hamilton systems. J D E51, 1985, 70～89
42 Chin C. Problems in nonlinear dynamics, [Ph. D dissertation]. Virginia Polytechnic Institute and state university, 1993
43 **陈予恕. 现代工程非线性动力学的现状与展望. 力学与实践**, 1995, **17** (6): 11～19
44 Nicolas B, Pierre C, Shaw S W. Nonlinear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **182** (2): 336～341
45 Caughey T K, Vakakis A F, Sivo J M. Analytical study of similar normal modes and their bifurcations in a class of strongly nonlinear systems. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1990, **25** (5): 521～533
46 Shaw S W. An invariant manifold approach to nonlinear normal modes of oscillation. *Journal of Nonlinear Science*, 1994, **4**: 419～448
47 **陈振藩, 白鸿柏. 结构的模态运动的非线性调制与平均** Lagrange **函数** (A L F). **非线性动力学学报**, 1995, **2** (1): 54～63
48 Mikhlin I. Resonance modes of near-conservative systems. *PMM*, 1974, **38**: 459～464
49 Greenberg H J, Yang T L. Modal subspace and normal mode vibrations. *Internal Journal of Nonlinear Mechanics*, 1971, **6**: 311～326
50 Van der Varst P. On normal mode vibrations of nonlinear conservative systems, [Doctoral Thesis]. Eindinhoven, Germany: Technical University of Eindhoven, 1982
51 Healey T J. Large rotatory oscillations of transversely isotropic rods spatio-temporal symmetry-breaking bifurcation. *SIAM Journal of Applied Mathmatics*, 1992, **52** (4): 1120～1135

ADVANCES IN STUDY ON THEORIES OF NONLINEAR NORMAL MODES

Chen Yushu　　Wu Zhiqiang
Department of mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072

Abstract The study on theories of the nonlinear normal modes is reviewed in this paper. Some problems and further directions in the field are pointed out.

Keywords nonlinear normal mode, modal bifrucation, modal dynamics