

奇异积分方程在裂纹体 弹性波散射问题中的应用*

汪越胜 王 铎 马兴瑞 邹振祝

北方交通大学力学所, 北京 100044 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

提要 结合20多年来国内外的研究成果, 评述奇异积分方程在裂纹体弹性波散射问题中的应用, 特别是在界面裂纹散射问题中的应用. 讨论如何将裂纹散射问题归结为奇异积分方程, 如何用数值法求解这些方程等问题, 并指出奇异积分方程法与其他积分方程法的关系. 最后展望了奇异积分方程在裂纹体散射问题中可能的应用前景.

关键词 奇异积分方程; 裂纹; 界面裂纹; 弹性波散射; 断裂动力学

1 引言

积分方程是研究许多物理问题的一个重要的数学工具. 所谓积分方程即指在积分号下包含未知函数的方程. 当其中的积分为广义积分时则称为奇异积分方程 (SIE). 但我们通常所说的 SIE 专指以下两类方程:

$$A(t_0)Q(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{Q(t)}{t-t_0} dt + \int_L K(t_0, t) Q(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in L \quad (1.1)$$

$$A(t_0)Q(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L Q(t) \operatorname{ctg} \frac{t-t_0}{a} dt + \int_L K(t_0, t) Q(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in L \quad (1.2)$$

它们分别称为 Cauchy 型和 Hilbert 型奇异积分方程. 其中 $\frac{1}{t-t_0}$ 和 $\operatorname{ctg} \frac{t-t_0}{a}$ 分别称为 Cauchy 核和 Hilbert 核, 二者奇性相同; 常规核 $K(t_0, t)$ 除可能具有对数奇性外没有其他奇性. 当 $K(t_0, t) = 0$ 时方程为特征方程. $A(t_0) = 0$ 时称为第1类 SIE, 否则称为第2类 SIE. 关于 SIE 的理论经过四五十年代前苏联格鲁吉亚学派的努力已逐渐完善. 在其专

*国家自然科学基金和国家教委博士点专项基金资助项目.

著^[1]中给出了非常系统的总结,国内学者如路见可^[2]等也在这方面做出了卓著贡献 在数值解方面 Erdogan^[3]的工作非常突出

奇异积分方程技术在弹性力学中获得了广泛的应用,已成为求解弹性力学混合边值问题的有力工具之一.特别是对于一些带有奇性的问题,如接触问题、裂纹问题等.60年代末发展起来的作为断裂动力学和弹性波散射理论重要内容之一的裂纹体弹性波散射问题也同样得益于SIE技术的发展与成熟.诚然,裂纹散射问题发展至今,已有不少有效的方法,包括各种纯数值方法、积分方程法以及各种近似解法(如T-矩阵法,几何射线法,渐近匹配法等).其中积分方程法由于在给出任意频率下的远近场特性方面具有优越性而受到重视.奇异积分方程作为积分方程法的一种,由于在处理奇异性方面具独到之处,更是被广泛应用.本文在总结国内外二十几年研究成果以及笔者近几年在这方面的研究工作基础上评述了SIE方法在裂纹体散射问题中的应用,特别是在界面裂纹散射问题中的应用.重点讨论了如何将不同问题归结为SIE、可适用于解决哪些问题等等,并与其他积分方程法相比,指出了它们之间的区别、联系和各自特点.对于SIE的数值求解及求解过程中可能遇到的困难也做了简要评述.至于最终结果及所揭示的物理特性本文很少涉及,有兴趣的读者可参阅本文提到的参考文献.文章最后还讨论了SIE方法现存的问题及可能的应用前景.

2 奇异积分方程的导出

目前求解裂纹散射问题的积分方程法主要有3种: Copson-Sih 方法, COD 方法和SIE方法.其中Copson-Sih法由Sih及其合作者发展而来,它利用积分变换最终将问题化为第2类Fredholm积分方程求解.Sih的专著^[4]给出了全面总结,国内范天佑^[5]也进行了深入研究.该方法可用于求解圆柱中的圆片裂纹^[6]、圆筒中的圆环裂纹^[7,8]、有限平板中的裂纹^[9]以及各向异性介质中的裂纹^[10]等复杂问题.但后面的分析指出该方法对界面裂纹的平面问题不适用. COD方法则将问题归结为关于裂纹张开位移(COD)的积分方程,然后根据裂纹尖端的平方根奇性将COD作第2类Chebyshev多项式级数展开求得结果.该方法得到非常广泛的应用,如应用于无限空间和半无限空间的裂纹散射^[11-13]、界面裂纹的SH波散射^[14-16]、周期分布裂纹的散射^[17,18]、圆片裂纹的非轴对称散射^[19,20]、矩形裂纹的散射^[21,22]以及任意分布多裂纹的散射^[23]等问题.对于界面裂纹的P波或SV波散射问题,由于裂纹尖端的复奇异性,该方法将遇到困难.

本文主要评述SIE法,首先以一个简单的例子阐述如何将裂纹散射问题归结为SIE,并与CopsonSih方法和COD方法进行比较.

2.1 积分变换法推出SIE

如图1所示,一无限大均匀介质中有一直裂纹,一角频率为 ω 的SH波以 θ_0 的角度入射,其形式为

$$W^{(i)}(x, y) = A \exp[iK_T(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)] \quad (2.1)$$

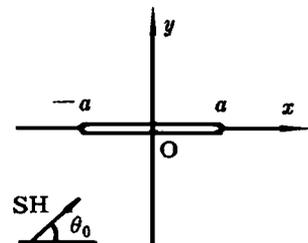


图1 均匀介质裂纹的散射

其中 K_T 为横波波数 式中省略了因子 $\exp[-i\omega t]$, 以下亦如此 介质的总波场 W 由入射波场 $W^{(i)}$ 和散射波场 $W^{(d)}$ 合成, 其中 $W^{(d)}$ 满足方程

$$\nabla^2 W^{(d)} + K_T^2 W^{(d)} = 0 \quad (2.2)$$

利用 Fourier 变换 (简称 F 变换, 用 $\bar{f}(s)$ 表示 $f(x)$ 的 F 变换), 并考虑辐射条件得

$$\begin{aligned} W^{(d)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^+(s) \exp[-isx - \beta_T y] ds, & y \geq 0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^-(s) \exp[-isx + \beta_T y] ds, & y \leq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $\beta_T = (s^2 - K_T^2)^{1/2} = -i(K_T^2 - s^2)^{1/2}$ $A^+(s)$ 与 $A^-(s)$ 的关系可由条件

$$T_{yz}^{(d)}(x, 0^+) = T_{yz}^{(d)}(x, 0^-), \quad |x| < a \quad (2.4)$$

确定, 结果为 $A^+(s) = -A^-(s)$. 再引入裂纹面的张 (撕) 开位移—— $\Delta W(x)$, 即

$$W(x, 0^+) - W(x, 0^-) = \Delta W(x), \quad |x| < a \quad (2.5)$$

可得

$$A^+(s) = -A^-(s) = \frac{1}{2} \Delta W(s) \quad (2.6)$$

利用边界条件

$$T_{yz}^{(i)}(x, 0) + T_{yz}^{(d)}(x, 0) = 0, \quad |x| < a \quad (2.7a)$$

$$W^{(d)}(x, 0^+) = W^{(d)}(x, 0^-), \quad |x| > a \quad (2.7b)$$

可得对偶积分方程组

$$\left. \begin{aligned} -\frac{i\beta_T}{4\pi} \int_{-a}^a \Delta \bar{W}(s) e^{-isx} ds &= -T_{yz}^{(i)}(x, 0), & |x| < a \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \Delta \bar{W}(s) e^{-isx} ds &= 0, & |x| > a \end{aligned} \right\} \quad (2.8a)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{i\beta_T}{4\pi} \int_{-a}^a \Delta \bar{W}(s) e^{-isx} ds &= -T_{yz}^{(i)}(x, 0), & |x| < a \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \Delta \bar{W}(s) e^{-isx} ds &= 0, & |x| > a \end{aligned} \right\} \quad (2.8b)$$

与 Sih 的结果比较 (可参见 [5] 中 14.3—14.11 式), 形式完全相同, 将 $\Delta \bar{W}(s)$ 分为奇偶两部分之和, 沿用 Copson-Sih 法可获得第 2 类 Fredholm 积分方程, 从而得到最终解答 详细过程见文献 [4] 和 [5]. 若利用

$$\Delta \bar{W}(s) = \int_{-a}^a W(u) e^{isu} du,$$

则 (2.8a) 化为

$$-\frac{\mu}{4\pi} \beta_r e^{-isx} \int_{-a}^a \Delta W(u) e^{isu} du ds = -\frac{(i)}{yz}(x, 0), \quad |x| < a \quad (2.9)$$

此即为关于 COD 的积分方程, 许多学者都是从此方程出发将 $W(x)$ 展为第 2 类 Chebyshev 多项式而得到关于未知系数的线性方程组, 通过数值计算获得最终结果, 如文献 [15] (其中若令两介质相同则其方程与式 (2.9) 完全一样).

进一步引入裂纹面的位错密度函数 $\Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta W)$, 亦可写为 $\Delta W(x) = \int_{-a}^x \Phi(u) du$.

显然有

$$\int_{-a}^a \Phi(u) du = 0 \quad (2.10)$$

利用分部积分得 (亦可通过交换积分次序)

$$\Delta \overline{W}(s) = \int_{-a}^a \Delta W(u) e^{isu} du = \int_{-a}^a \int_{-a}^u \Phi(\xi) e^{is\xi} d\xi du = is^{-1} \int_{-a}^a \Phi(u) e^{isu} du \quad (2.11)$$

代入 (2.8a) 或 (2.9) 得

$$-\frac{i\mu}{4\pi} s^{-1} \beta_r \int_{-a}^a \Phi(u) e^{is(u-x)} du ds = -\frac{(i)}{yz}(x, 0), \quad |x| < a \quad (2.12)$$

由于积分 $\int_{-a}^a s^{-1} \beta_r e^{is(u-x)} ds$ 不是一致收敛的, 所以欲交换式 (2.12) 的积分顺序, 需将发散部分提出作单独讨论, 发散部分由 $s \rightarrow \pm$ 时被积函数 $s^{-1} \beta_r$ 的性态决定, 注意到当 $s \rightarrow \pm$ 时

$$s^{-1} \beta_r = \text{sgn}(s) + O(s^{-2}) \quad (2.13)$$

再利用 Riemann-Lebesgue 公式^[25], 则有

$$\text{sgn}(s) \int_{-a}^a \Phi(u) e^{is(u-x)} du ds = 2i \int_{-a}^a \frac{\Phi(u)}{u-x} du \quad (2.14)$$

于是从 (2.12) 中提出发散部分可得到 Cauchy 奇异积分方程

$$\frac{\mu}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\Phi(u)}{u-x} du + \int_{-a}^a \Phi(u) K(u, x) du = -\frac{(i)}{yz}(x, 0), \quad |x| < a \quad (2.15)$$

其中

$$K(u, x) = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^\infty (s^{-1} \beta_r - 1) \sin[s(u-x)] ds \quad (2.16)$$

此 SIE 附加条件 (2.10) 可唯一确定 $\Phi(x)$.

2.2 Green 函数法推出 SIE

利用 Green 函数和积分表示定理 (或 Betti 互易定理) 同样可导出 SIE. 仍考虑上述问题, 无限大均匀弹性体中在 $r_0 = (x_0, y_0)$ 处作用反平面简谐线载荷时的 Green 函数为方程

$$\nabla^2 W^G + K_T^2 W^G = -\delta(r - r_0) \quad (2.17)$$

的解^[26]:

$$W^G(x, y; x_0, y_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(K_T |r - r_0|) \quad (2.18)$$

其中 $H_0^{(1)}(\cdot)$ 为第 1 类 Hankel 函数, $r = (x, y)$. 由积分表示定理^[26]得

$$W^{(d)}(x, y) = \frac{i}{4} \int_{-a}^a \Delta W(x_0) \left[\frac{\partial}{\partial y_0} W^G(x, y; x_0, y_0) \right]_{y_0=0} dx_0 \quad (2.19)$$

利用边界条件 (2.7b), 并注意 $\frac{\partial}{\partial y_0} H_0^{(1)}(K_T |r - r_0|) = -\frac{\partial}{\partial y_0} H_0^{(1)}(K_T |r - r_0|)$, 得

$$-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{i\mu}{4} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^a \Delta W(x_0) H_0^{(1)}(K_T \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}) dx_0 = -\frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, 0), \quad |x| < a \quad (2.20)$$

此即为关于 COD 的积分方程, 很多学者从此方程直接求解最终结果, 如文献 [11—13] 等. 实际上, 只要利用

$$H_0^{(1)}(K_T \sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{\pi i} \int_{\beta_r} \beta_r^{-1} e^{-i\alpha x - \beta_r |y|} d\alpha \quad (2.21)$$

便可将式 (2.20) 化为式 (2.9). 同样可将 (2.20) 化为 (2.8a), 即由 Green 函数法同样可得到式 (2.8) 所示的对偶积分方程组, 详见 [26]. 若再引入同前定义的位错密度函数—— $\Phi(x)$ 则有

$$T_{yz}^{(d)}(x, y) = \frac{i\mu}{4\pi} \int_{-a}^a \Phi(u) \int_{\beta_r} \beta_r^{-1} e^{i\alpha(u-x) - \beta_r |y|} d\alpha du \quad (2.22)$$

代入 (2.20) 即可得式 (2.15) 所示的 SIE. 注意从 (2.20) 到 (2.8)、(2.9) 或 (2.15) 的过程中实际隐含了极限 $\lim_{y \rightarrow 0}$ 与积分 $\int_{-a}^a ds$ 交换顺序的问题, 其详细证明请参阅文献 [24].

至此, 我们分别利用两种方法导出对偶积分方程、关于 COD 的积分方程和 Cauchy 奇异积分方程. 两种方法是等价的, 可求解同样的问题. 一般来说, 对较复杂的问题, Green 函数法推导较繁, 因 Green 函数的求解本身可能就是个困难的问题, 其极限分析和数值处理则更困难. 所以只要问题允许, 积分变换法可带来许多方便. 但 Green 函数法更具普通性, 如半空间中任意分布的裂纹问题, 积分变换法就会遇到困难, 宜用 Green 函数法^[12, 13]. 另外 Green 函数法还是边界元法的基础.

式 (2.15) 所示的是第 1 类 SIE. 根据 SIE 理论^[1, 2] 易知未知函数 $\Phi(x)$ 在 $x = \pm a$ 处具有 $-1/2$ 奇异性, 这即是普通裂纹尖端的奇性. 可见 SIE 在分析解的奇性时简单明了. 方程 (2.15) 具有明确的物理意义: $\Phi(x)$ 为裂纹的位错分布密度, 积分核 (奇异和非奇异部分) 正是对应单个位错的基本解, 其中奇异部分表示了裂纹尖端的奇异特性, 与静态问题相同, 非

奇异部分则反映了波动的影响, 在较复杂的问题中还包括了材料组合和几何尺寸的影响。关于 (2.15) 的数值解文献 [3] 有详尽的讨论, 一般有两种方法, 一是 Chebyshev 级数展开法, 相当于 Galerkin 方法; 另一种方法是直接积分法, 相当于配置法。当 $K(u, x)$ 足够光滑时, 两种方法均可获得同样好的精度, 但直接积分法所用 CPU 时间只有级数展开法的 1/10 左右。而当 $K(u, x)$ 的 n ($n \geq 1$) 阶导数无界时, 直接积分法存在较大的误差, 不宜使用。在数值计算时, 可能遇到的一个困难是关于 s 的无穷积分, 当被积函数在积分路径上有极点时, 需特殊处理, 这将在下节详细讨论。

尽管这里仅给出一个简单实例的推导, 但其方法和思路同样适用于其他问题。从本节的分析不难看出, 对于裂纹尖端具有 $-1/2$ 奇性的散射问题, Copson-Sih 法、COD 法和 SIE 法同样有效, 几乎无优劣之分。但在个别情况如边裂纹的散射利用 SIE 法求解则要方便得多, 如文献 [27—30]。对于下边将谈到的界面裂纹问题, SIE 法则是其他两种方法所不能替代的。

3 层状介质界面裂纹的散射问题

界面裂纹尖端所具有的振荡奇异性为问题的求解增加了难度, 许多方法也因此失效。复变函数方法对静态问题是有效的, 但在动态问题中遇到困难。唯有 SIE 方法可成功地解决该问题。Srivastava 等^[31, 32] 首先利用 SIE 方法求解了界面 Griffith 裂纹和圆片裂纹的散射问题。以后经过众多学者的努力, SIE 方法已经推广应用于多层介质、多个界面裂纹、周期界面裂纹等较复杂的问题。

3.1 层状介质中的 Griffith 界面裂纹

Srivastava 等^[31] 最早求解了两半无限体之间交界面上的 Griffith 裂纹的散射问题, 他们利用积分变换法导出关于位错密度的 SIE, 然后借助 Erdogan^[33] 发展的方法获得数值结果。该方法由马等^[34] 推广到多层介质的情况, 他们考虑的问题如图 2 所示, 利用 F 变换借助传递矩阵的思想, 可获得如下形式的对偶积分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s[M_{11}(s)\Delta\bar{u}_z(s) + M_{12}(s)\Delta\bar{u}_x(s)]e^{-isx}ds &= -\alpha_z^{(0)}(x, 0), & |x| < 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s[M_{21}(s)\Delta\bar{u}_z(s) + M_{22}(s)\Delta\bar{u}_x(s)]e^{-isx}ds &= -T_{xz}^{(0)}(x, 0), & |x| < 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\bar{u}_z(s)e^{-isx}ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\bar{u}_x(s)e^{-isx}ds & |x| < 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $\Delta\bar{u}_z(s)$ 和 $\Delta\bar{u}_x(s)$ 为裂纹面沿 z 轴和 x 轴之 COD 的 F 变换, $\alpha_z^{(0)}, T_{xz}^{(0)}$ 为无裂纹时的值。考查 $M_{ij}(s)$ 的性质可知: $i = j$ 时为关于 s 的奇函数, $i \neq j$ 时为偶函数, 且当 $s \rightarrow +\infty$ 时, $M_{11}(s), M_{22}(s) \rightarrow \beta$; $M_{12}(s) = -M_{21}(s) \rightarrow ia$, 其中 α, β 分别为

$$a = -\frac{u_0u_1[u_0(k_1 - 1) - u_1(k_0 - 1)]}{(u_0k_1 + u_1)(u_1k_0 + u_0)}, \quad \beta = -\frac{u_0u_1[u_0(k_1 - 1) + u_1(k_0 - 1)]}{(u_0k_1 + u_1)(u_1k_0 + u_0)} \quad (3.2)$$

式中 $k_j = 3 - 4\nu_j$, ν_j 为 poisson 比

利用[4]或[5]所述的 Copson- Sih 方法不能将对偶积分方程组(3.1)化为 Fredholm、积分方程,除非 $a = 0$,此时裂纹尖端具有普通的 $-1/2$ 奇性 参照上节的论述也不难将(3.1)转化为关于 COD 的积分方程,但由于裂纹尖端的复奇异性,方程的求解将很困难,至今尚未见有关的报道. 唯一可行的做法是引入位错密度函数

$$\Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta u_z), \quad \Psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta u_x)$$

将(3.1)化为 SIE,有

$$\left. \begin{aligned} -\gamma \Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(u)}{u-x} du + \int_{-1}^1 [P_{11}\Phi(u) + P_{12}\Psi(u)] du &= -\beta^{-1} \sigma_z^{(0)}(x, 0), \quad |x| < 1 \\ \gamma \Phi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi(u)}{u-x} du + \int_{-1}^1 [P_{21}\Phi(u) + P_{22}\Psi(u)] du &= -\beta^{-1} \tau_{xz}^{(0)}(x, 0), \quad |x| < 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

和单值条件

$$\int_{-1}^1 \Phi(u) du = \int_{-1}^1 \Psi(u) du = 0 \quad (3.4)$$

式(3.3)中 $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ 即是熟知的 Dundurs 数^[35],它反映了不同材料组合界面裂纹尖端所具有的振荡奇异性 当 $\gamma = 0$ 时,振荡性消失,(3.3)变为第1类 SIE

式(3.3)所示的第2类 SIE 将主部解耦后可沿用 Erdogan 的方法^[33]数值求解 其方法是将未知函数展为相应的 Jacobi 多项式的级数,获得关于未知系数的线性代数方程组 当方程右端载荷项以复函数表示时, $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 均是复函数,不能象文献[36]处理静态问题那样将(3.3)合为一个方程进行求解

上述处理单个界面裂纹的方法由章等^[37]推广到多层介质中多个非共面界面裂纹的情况 轴对称圆筒状界面裂纹的散射问题也可用类似的方法求解,见文[49]的推导 最近 Qu^[38,39]利用几乎完全相同的方法对界面裂纹散射问题进行了更详尽的研究 另外,除了上述积分变换法, Bogy 及其合作者^[40-42]还利用 Green 函数法推导 SIE,研究了加层半空间中界面裂纹的散射问题 Kuo 等^[43,44]还利用 SIE 对各向异性界面裂纹的瞬态响应进行了分析

裂纹散射问题同时注重近场和远场特性,近场的动应力强度因子是断裂动力学的重要参量,而远场的位移模式则对无损检测具有重要意义 以上提到的文献有的给出了近场解,更多的则同时分析了远近场特性 界面裂纹的应力强度因子一直是有争议的问题,静力分析中常以 $K_{I+} + iK_{II}$ 的复形式表示 文[34]通过引入等效应力强度因子给出其计算公式,是行之有效的 [38]也采用类似的定义

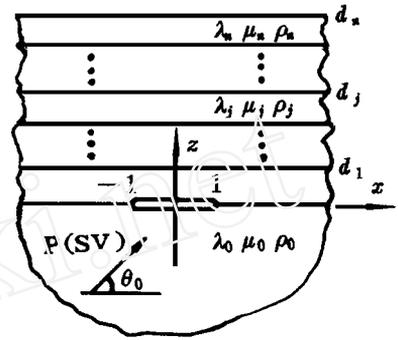


图2 多层介质中界面裂纹的散射

3.2 层状介质中的圆片界面裂纹

圆片界面裂纹是最简单的三维界面裂纹之一, 其弹性波散射问题求解比较困难, 当入射波为轴对称波时, 控制方程变为二维的, 问题大大简化. Srivastava 等^[32]最先求解了两半无限体之间的圆片形界面裂纹的轴对称散射问题, 利用 Hankel 积分变换 (简称 H 变换) 导出一组对偶积分方程组, 然后利用 Abel 积分变换并引入辅助函数将对偶积分方程组化为一组 SIE, 并进行数值求解. 该方法由马等^[45]推广到多层介质的情况. 仍如图2所示, 其中裂纹为圆片形, 而非穿透形的. 轴对称弹性纵波垂直裂纹面入射. 首先利用 H 变换并借助传递矩阵的思想, 获得如下形式的对偶积分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s [N_{11}(s) \hat{\Delta}u_z(s) + N_{12}(s) \hat{\Delta}u_r(s)] J_0(sr) ds &= \alpha_z^{(0)}(r, 0), & r < 1 \\ \int_0^s [N_{21}(s) \hat{\Delta}u_z(s) + N_{22}(s) \hat{\Delta}u_r(s)] J_1(sr) ds &= 0, & r < 1 \\ \int_0^s \hat{\Delta}u_z(s) J_0(sr) ds &= \int_0^s \hat{\Delta}u_r(s) J_1(sr) ds = 0 & r < 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

其中, $s^{-1} \hat{\Delta}u_z(s)$ 为 $\Delta u_z(r)$ 的零阶 H 变换, $s^{-1} \hat{\Delta}u_r(s)$ 为 $\Delta u_r(r)$ 的一阶 H 变换, $\Delta u_z(r)$ 和 $\Delta u_r(r)$ 分别为裂纹面的法向和径向 COD. 当 $s \rightarrow +\infty$ 时, $N_{11}(s), N_{22}(s) \rightarrow \beta$; $N_{12}(s), N_{21}(s) \rightarrow -\alpha$ (α, β 见式 (3.2)). 式 (3.5) 不适宜利用 Copson-Sih 法和 COD 法求解, 只有将其转化为 SIE 求解. 为此, 先对式 (3.5) 作第1类和第2类 Abel 变换, 将其转化为如下的对偶积分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s [N_{11}(s) \hat{\Delta}u_z(s) + N_{12}(s) \hat{\Delta}u_r(s)] \sin sx ds &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \tilde{f}(x), & |x| < 1 \\ \int_0^s [N_{21}(s) \hat{\Delta}u_z(s) + N_{22}(s) \hat{\Delta}u_r(s)] \cos sx ds &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} C_0, & |x| < 1 \\ \int_0^s \hat{\Delta}u_z(s) \sin sx ds &= \int_0^s \hat{\Delta}u_r(s) \cos sx ds = 0, & |x| > 1 \end{aligned} \right\}$$

其中 $\tilde{f}(x)$ 为 $r\alpha_z^{(0)}(r, 0)$ 的第1类 Abel 变换, C_0 参见文 [32] 或 [45]. 进一步引入辅助函数

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s \hat{\Delta}u_z(s) \sin sx ds &= \frac{2}{\pi} \Phi_1(x) H(1-x) \\ \int_0^s \hat{\Delta}u_r(s) \cos sx ds &= \frac{2}{\pi} \Psi_1(x) H(1-x) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

并记 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 分别为 $\Phi_1(x)$ 和 $\Psi_1(x)$ 的偶延拓和奇延拓. 则可得关于 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 的奇异积分方程和单值条件

$$\left. \begin{aligned} - \Phi(x) - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi(u)}{u-x} du + \int_{-1}^1 [Q_{11}\Phi(u) + Q_{12}\Psi(u)] du &= -\beta^{-1} \tilde{f}(x), \quad |x| < 1 \\ - \Psi(x) - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(u)}{u-x} du + \int_{-1}^1 [Q_{21}\Phi(u) + Q_{22}\Psi(u)] du &= -\beta^{-1} C_0, \quad |x| < 1 \\ \int_{-1}^1 \Phi(u) du = \int_{-1}^1 \Psi(u) du &= 0 \end{aligned} \right\} (3.8)$$

与(3.3)所示的方程不同, 这里 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 不是位错密度函数, 而且当 $\gamma=0$ 时, 上述方程退化为第2类 Fredholm 方程. 但当 $\gamma \neq 0$ 时(3.8)也是标准的第2类 SIE, 求解仍可采用 Erdogan 的方法^[33]. 另外, 不难证明对无限大均匀介质中的圆片裂纹方程(3.8)退化为第2类 Fredholm 方程, 且与 Copson-Sih 方法得到的方程一致^[4,5]. 以上方法由章等^[46]推广到多层介质多个非共面裂纹的情况.

3.3 周期排布的界面裂纹

界面上周期性排布的裂纹对 SH 波的散射由邹^[47]、Zhang^[17,18] 等研究. 其中[47]用有限 F 变换将问题归结为 SIE 求解. 而 Zhang 则由单个裂纹出发导出关于 COD 的积分方程进行求解. 文[48]还利用[47]的方法对 P 波或 SV 波垂直入射进行了分析. 我们考虑图3所示的一般情况. 由于在 x 方向具有周期性, 故可将位移势函数写成如下

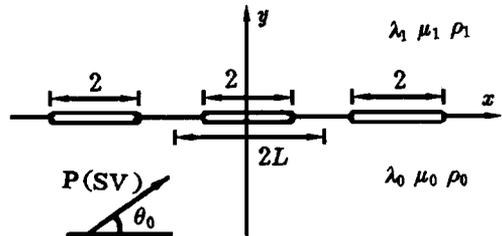


图3 周期排布界面裂纹的散射

Fourier 级数的形式 (相当于 [48] 中有限 F 变换和反演的结果):

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_{jm}^-(y) e^{-im\pi x/L} \\ \Psi_j(x, y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}_{jm}^-(y) e^{-im\pi x/L} \end{aligned} \quad j = 0, 1 \quad (3.9)$$

其中 $\bar{\Phi}_{jm}^-(y)$ 和 $\bar{\Psi}_{jm}^-(y)$ 分别具有形式 $A_{jm} e^{(-1)^j \beta_{Lj}(m)y}$ 和 $B_{jm} e^{(-1)^j \beta_{Rj}(m)y}$, 其中 $\beta_{Lj}^2(m) = (m\pi/L)^2 - K_{Lj}^2$, $\beta_{Rj}^2(m) = (m\pi/L)^2 - K_{Rj}^2$ (要求 $\text{Im} \beta_{Rj}, \text{Im} \beta_{Lj} \leq 0$), K_{Rj} 和 K_{Lj} 分别为横波和纵波波数. 将界面上的位移间断 Δu_y 和 Δu_x 也展为 F 级数, 则有

$$\begin{aligned} \Delta u_y(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta \bar{u}_{ym}^- e^{-im\pi x/L} \\ \Delta u_x(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta \bar{u}_{xm}^- e^{-im\pi x/L} \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $\Delta \bar{u}_{ym} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \Delta u_y(u) e^{im\pi u/L} du$, $\Delta \bar{u}_{xm}$ 类似 由边界条件可得对偶级数方程组

$$\left. \begin{aligned} m = - & \left. \begin{aligned} [M_{11}(m) \Delta \bar{u}_{ym} + M_{12}(m) \Delta \bar{u}_{xm}] e^{-im\pi/L} &= -\sigma_y^{(0)}(x, 0), & |x| < 1 \\ [M_{21}(m) \Delta \bar{u}_{ym} + M_{22}(m) \Delta \bar{u}_{xm}] e^{-im\pi/L} &= -\sigma_{xy}^{(0)}(x, 0), & |x| < 1 \end{aligned} \right\} (3.11) \\ m = - & \left. \begin{aligned} \Delta \bar{u}_{ym} e^{-im\pi/L} &= \Delta \bar{u}_{xm} e^{-im\pi/L} = 0, & |x| > 1 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

其中当 $i = j$ 时, $M_{ij}(m)$ 为 m 的偶函数, $i \neq j$ 时则为奇函数 当 $m \rightarrow +\infty$ 时, 有 $M_{11}(m) \rightarrow \beta$, $M_{22}(m) \rightarrow -\beta$, $M_{12}(m) = -M_{21}(m) \rightarrow im\alpha$ (α, β 见式 (3.2)). 于是引入位错密度函数 $f(x) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_y)$ 和 $g(x) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_x)$, 并注意重要关系式

$$\operatorname{sgn}(m) e^{im\theta} = i \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad |m| = 1 \quad (3.12)$$

$$e^{im\theta} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi m)$$

则可得第2类 Hilbert 型奇异积分方程

$$\left. \begin{aligned} - & \left. \begin{aligned} \gamma g(x) - \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 f(u) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2L}(u-x) du + \int_{-1}^1 [P_{11}f(u) + P_{12}g(u)] du \\ &= -\beta^{-1} \sigma_y^{(0)}(x, 0), & |x| < 1 \\ \gamma f(x) - \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 g(u) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2L}(u-x) du + \int_{-1}^1 [P_{21}f(u) + P_{22}g(u)] du \\ &= -\beta^{-1} \sigma_{xy}^{(0)}(x, 0), & |x| < 1 \end{aligned} \right\} (3.13) \\ & \int_{-1}^1 f(u) du = \int_{-1}^1 g(u) du = 0 \end{aligned}$$

方程中 Hilbert 核的出现体现了问题的周期性, 由于 Hilbert 核与 Cauchy 核具有同样的奇性, 上述方程可转化为形如式 (3.3) 的 Cauchy 型奇异积分方程, 并利用相同的方法进行数值求解 借助传递矩阵的思想, 不难将上述推导过程推广到多层介质、多个周期排布等复杂情况

顺便指出, 波透过双周期分布裂纹群传播时会出现一种有趣而又重要的现象——某些频率段的波不能通过裂纹面, 称为“滞止带” (stopping band), 另外一些频率段的波则能通过, 称为“通过带” (passing band)^[50, 51]. 对周期界面裂纹的类似特性尚无人研究

3.4 其他界面裂纹模型

界面裂纹尖端所具有的振荡性在物理上是不合理的, 因此许多学者提出了各种模型以消除这种不合理性, 如著名的 Comninou 模型^[52]等。奇异积分方程为建立和研究这些界面裂纹模型提供了一个有力的工具。王晓东等^[53, 54]利用 SIE 法研究了用 Comninou 界面裂纹模型时弹性波的散射问题。如图4所示, 设裂纹尖端 $(-1, a_1)$ 和 $(a_2, 1)$ 的区域内裂纹面无摩擦闭合, 其他区域裂纹面是自由的。根据这一假设, 经过与 [34] 相似的推导过程, 可获得下列形式的第2类 SIE:

$$\left. \begin{aligned} & -\gamma_g \Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\Phi(u)}{u-x} du + \int_{a_1}^{a_2} P_{11} \Phi(u) du + \int_{-1}^1 P_{12} \Psi(u) du \\ & = -\beta^{-1} \alpha^{(0)}(x, 0), \quad a_1 < x < a_2 \\ & \gamma_g \Phi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi(u)}{u-x} du + \int_{a_1}^{a_2} P_{21} \Phi(u) du + \int_{-1}^1 P_{22} \Psi(u) du \\ & = -\beta^{-1} \alpha_z^{(0)}(x, 0), \quad |x| < 1 \\ & \int_{a_1}^{a_2} \Phi(u) du = \int_{-1}^1 \Psi(u) du = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

其中各符号意义同式 (3.3)。 a_1 和 a_2 未知, 需由方程的解在该点有界时满足的相容条件来确定。 a_1 和 a_2 是频率 ω 的函数。该模型裂尖前沿拉应力有限而剪应力有 $-1/2$ 奇性, 即破坏为剪切形式, 有学者对此提出质疑。

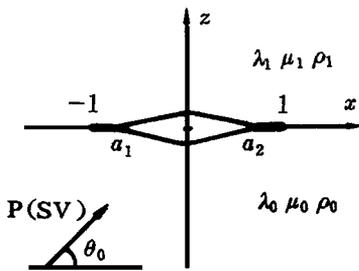


图4 Comninou 界面裂纹模型

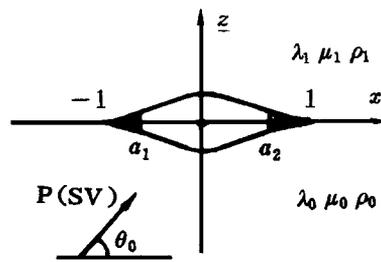


图5 尖端吸附界面裂纹模型

周振功等^[55, 56]求解了用由 Achenbach 等^[57]提出的尖端吸附模型时弹性波的散射问题。模型见图5所示, 裂纹尖端区 $(-1, a_1)$ 和 $(a_2, 1)$ 内有吸附力作用, 其分布假设为线性或非线性的, 其强度由裂纹尖端解有界的条件确定, a_1 和 a_2 则由该点解有界的条件确定。求解方法与 [34] 和 [53] 基本类似, 此处不再重复。该模型在裂尖无任何奇异性, 但吸附区的本构关系尚需进一步研究。

本节我们简述了将几种典型的界面裂纹散射问题归结为 SIE 的过程。从中看到最终获得的方程具有同样的形式, 均可用 Erdogan 的方法^[33]求解, 也可用 Miller 等^[58]和 Kurtz 等^[59]提出的方法, 已经证明这些方法具有收敛性和稳定性。需要注意的是在计算广义积分核时遇到的

无穷积分 $\int_0^{\infty} \frac{G(s)}{R(s)} ds$, 其中 $R(s)$ 对于层状介质或半无限介质在 $0—\infty$ 内有有限个一阶零点, 它们分别对应各种表面波, 计算时需特殊处理。通常的做法是在 s 复平面内适当地变换积分路径, 避开这些零点。如文献 [40—42] 采用零点部分的积分路径向下偏移的办法, 见图6所示, 由于在第 IV 象限内 $R(s)$ 没有零点, 故由留数定理得

$$\int_0^{\infty} \frac{G(s)}{R(s)} ds = \sum_{c_1+c_2+c_3} \frac{G(s)}{R(s)} ds + \int_{s_R} \frac{G(s)}{R(s)} ds \quad (3.15)$$

该方法无需求出极点, 因而计算简单, 但偏移路径的选择对计算精度有影响, 应注意适当选取

文献 [27—30] 则将原积分分解为极点的留数值与 Cauchy 主值积分之和, 即

$$\int_0^{\infty} \frac{G(s)}{R(s)} ds = i\pi \sum_{j=1}^n \frac{G(\eta_j)}{R'(\eta_j)} + \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{G(s)}{R(s)} ds \quad (3.16)$$

其中 η_j 为 $R(s)$ 的第 j 个零点 (即被积函数的一阶极点), 右端第1项为极点处的半个留数值, 第2项为 Cauchy 主值积分, 可直接数值计算。也有学者采用其他的方法, 如 [34, 45] 采用围道积分的方法, 考虑了主要的极点贡献, 并用来分析远场特性。只要有表面波出现, 同样的问题在 Copson - Sih 法和 COD 法中也会遇到。可采用同样的方法处理

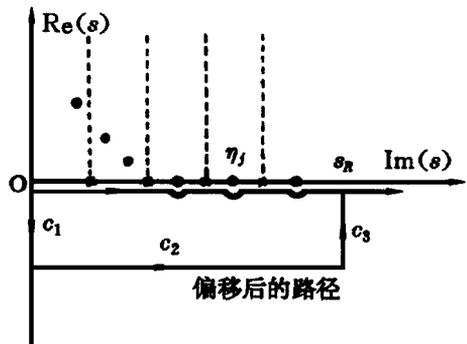


图6 积分路径

4 具有弧形界面裂纹的夹杂对弹性波的散射问题

当在夹杂与基体间的界面上发生部分脱胶时, 可以将此脱胶区看作弧形界面裂纹。这问题较上述问题稍复杂些, 但借助波函数可用类似方法求解。Yang 和 Norris^[16] 利用 COD 方法求解圆夹杂 SH 波散射, 后又建立了关于粘接面应力的积分方程来研究同样的问题^[60], 其方法当然只适用于裂纹尖端具有 $-1/2$ 奇性的问题, 例如他们对纵波散射问题的研究^[61] 局限于某种特殊材料组合的情况, 使裂纹尖端不出现振荡性。而借助 SIE 则不难解决这个问题。我们在 [62, 63] 中用 SIE 法研究了圆夹杂 SH 波散射问题, 获得了与 [16, 60] 同样的结果, 在 [64, 65] 中讨论了 P 波和 SV 波散射问题, 考虑了振荡奇性的情况。在 [66, 67] 中则将该方法推广到椭圆夹杂的情况。这里以图7所示圆夹杂对 P 或 SV

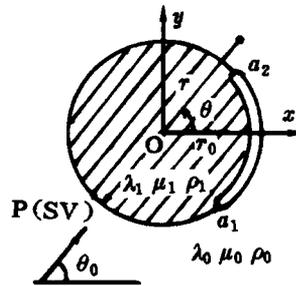


图7 具有弧形界面裂纹的圆夹杂对波的散射

波的散射为例简述其求解思路 此问题关于 θ 坐标的周期性提示我们可借鉴 3.3 节关于周期界面裂纹的求解方法, 根据散射问题中的波函数展开法, 可将位移势函数写为下列 Fourier-Bessel 级数的形式:

$$\Phi_j(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{jm} Z_m^{(j)}(K_{Lj} r) e^{-im\theta}, \quad \Psi(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{jm} Z_m^{(j)}(K_{Tj} r) e^{-im\theta} \quad (4.1)$$

其中 $Z_m^{(1)} = J_m$ 为 Bessel 函数, $Z_m^{(0)} = H_m^{(1)}$ 为第 1 类 Hankel 函数 同 (3.10) 类似将界面上的位移间断 Δu_r 和 Δu_θ 展为 F 级数

$$\Delta u_r(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta \bar{u}_{rm} e^{-im\theta}, \quad \Delta u_\theta(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta \bar{u}_{\theta m} e^{-im\theta} \quad (4.2)$$

根据边界条件得对偶级数方程组:

$$\left. \begin{aligned} m = -\infty & \left. \begin{aligned} r_0^{-1} [N_{11}(m) \Delta \bar{u}_{rm} + N_{12}(m) \Delta \bar{u}_{\theta m}] e^{-im\theta} &= -\sigma_r^{(0)}(r_0, \theta), & \theta & \in (a_1, a_2) \\ r_0^{-1} [N_{21}(m) \Delta \bar{u}_{rm} + N_{22}(m) \Delta \bar{u}_{\theta m}] e^{-im\theta} &= -T_{r\theta}^{(0)}(r_0, \theta), & \theta & \in (a_1, a_2) \end{aligned} \right\} \\ m = -\infty & \left. \begin{aligned} \Delta \bar{u}_{rm} e^{-im\theta} &= \Delta \bar{u}_{\theta m} e^{-im\theta} = 0, & \theta & \in (a_1, a_2) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 $N_{ij}(m)$ 与式 (3.11) 中的 $M_{ij}(m)$ 具有同样的奇偶性和渐近性 引入位错密度函数 $f(\theta) = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta u_r)$ 和 $g(\theta) = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta u_\theta)$, 并利用式 (3.12) 得第 2 类 Hilbert 奇异积分方程

$$\left. \begin{aligned} -\gamma_g(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} f(\zeta) \operatorname{ctg}\left(\frac{\zeta-\theta}{2}\right) d\zeta + \int_{a_1}^{a_2} [Q_{11}f(\zeta) + Q_{12}g(\zeta)] d\zeta \\ = -\beta^{-1} \sigma_r^{(0)}(r_0, \theta), & \theta \in (a_1, a_2) \\ \gamma_f(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} g(\zeta) \operatorname{ctg}\left(\frac{\zeta-\theta}{2}\right) d\zeta + \int_{a_1}^{a_2} [Q_{21}f(\zeta) + Q_{22}g(\zeta)] d\zeta \\ = -\beta^{-1} T_{r\theta}^{(0)}(r_0, \theta), & \theta \in (a_1, a_2) \\ \int_{a_1}^{a_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{a_1}^{a_2} g(\zeta) d\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其形式与式 (3.13) 一样, 其中的 Hilbert 核体现了此问题关于 θ 的周期性 数值结果表明该问题有一个显著的物理特性, 即“低频共振”

5 总结与展望

我们系统地总结了 SIE 方法在裂纹体弹性波散射问题中的应用, 重点讨论了 SIE 方法在界面裂纹散射问题中的应用, 简述了获得 SIE 的大致步骤 文中尽管讨论的都是稳态波散射问题, 但结合 Fourier 变换或 Laplace 变换不难推广到瞬态波的散射问题 文中讨论的方法也

适用于静力学问题 其实, 当频率 $\omega = 0$ 时, 动态解即退化为静态解 此外, SIE 还可应用于包括裂纹动态扩展在内的其他一些弹性动力学问题, 请参阅 [69]

从文中的综述和分析可以看出, 适宜用 Copson-Sih 方法和 COD 方法求解的问题, 一般均可用 SIE 方法求解 特别对界面裂纹 SIE 方法具有不可替代的优越性 而在三维裂纹, 如波斜入射的圆形裂纹、矩形裂纹等问题中, SIE 的导出尚有困难, 一般利用 COD 方法求解, 但只适用于裂尖具有 $-1/2$ 奇性的情况 另外半无限长裂纹散射也是 SIE 法难以应用的情况之一, 一般用 Wiener-Hopf 法求解^[4,5], 但对界面裂纹有困难 Angel^[68] 发展了一种求解半无限长裂纹散射的 SIE 方法, 可望用于求解半无限长界面裂纹的情况

奇异积分方程的推导在不同的问题中虽然各有差异, 但步骤大致相同 其中的关键是如何选择适当的辅助函数和如何从无穷积分或无穷级数中分离出发散部分从而获得 SIE 的奇异项 对穿透型裂纹, 辅助函数可选为位错密度函数, 而对三维裂纹如圆形裂纹却不便这样做, 需要选用其他的函数, 这也是三维界面裂纹至今未获很好解决的原因之一

尽管存在一些问题, 但从已获得的成果看 SIE 无疑是求解裂纹散射问题的有效解析工具之一 作者相信它在这个问题上一定会有更广泛的应用, 例如: (1) 用于三维界面裂纹散射问题; (2) 用于含裂纹多连域的散射问题; (3) 用于各向异性介质、非均匀介质中的裂纹和界面裂纹的散射问题; (4) 用于稳态波的非线性边界问题, 包括波作用下的裂纹面接触问题; (5) 发展一种时域的 SIE 用于解决瞬态运动边界问题, 包括裂纹的扩展问题等

本文仅根据笔者掌握的资料对 SIE 在裂纹体弹性波散射问题中的应用进行了评述, 遗漏之处在所难免 另外本文并未涉及裂纹散射问题的研究现状, 有兴趣的读者可参阅文献 [70] 和 [71]

参 考 文 献

- 1 奇异积分方程 朱季讷译 上海科学技术出版社 (1966)
- 2 路见可 解析函数边值问题 上海科学技术出版社 (1987)
- 3 Erdogan F. 复变函数技术 程沅生译 江苏科学出版社 (1982)
- 4 Sih G C. Mechanics of Fracture, Vol 4, Elastodynamic crack problems Noordhoff, Leyden (1977)
- 5 范天佑 断裂动力学引论 北京理工大学出版社 (1990)
- 6 Srivastava K N, Palaiya R M, Gupta Q P. Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack in an infinitely long cylinder *J. Elast*, **12** (1982): 142—152
- 7 Dhaliwal R S, Singh B M, Vrbik J. Interaction of torsional waves with an annular crack in an infinitely long cylinder *Eng. Fract Mech*, **20** (1984): 729—733
- 8 Zhang Z M (章梓茂), Zhou Z Z (邹振祝), Ma X R (马兴瑞), Wang D (王铎). Interaction of axially symmetric waves with an annular crack in an infinitely long hollow cylinder *Int J. Fract*, **48** (1991): 41—48
- 9 Zhang X S. Transient response of an edge crack in a rectangular plate with stress free edges for the tearing mode *Eng. Fract Mech*, **33** (1989): 319—325
- 10 Ang W T. A crack in an anisotropic layered material under the action of impact loading *J. Appl Mech*, **55** (1988): 120—125
- 11 Van der Hijden J H M T, Neerhoof F L. Scattering of elastic waves by a plane crack of finite width *J. Appl Mech*,

- 51 (1984): 646—651
- 12 Neerhoff F L, Van der Hijden J H M T. Diffraction of elastic waves by a subsurface crack (antiplane motion). *J. Sound Vib*, **93** (1984): 523—536
- 13 Van der Hijden J H N T, Neerhoff F L. Diffraction of elastic waves by a subsurface crack (in-plane motion). *J. Acoust Soc Am.*, **75** (1984): 1694—1704
- 14 Neerhoff F L. Diffraction of Love waves by a stress-free crack of finite width in the plane interface of a layered composite. *Appl Sci Res*, **35** (1979): 237—249
- 15 Boström A. Elastic waves scattering from an interface crack: antiplane strain. *J. Appl Mech*, **54** (1987): 503—508
- 16 Yang Y, Norris A N. Shear wave scattering from a debonded fiber. *J. Mech Phys Solids*, **39** (1991): 273—294
- 17 Zhang Ch. Dynamic stress intensity factors for periodically spaced collinear antiplane shear cracks between dissimilar media. *Theor Appl Fract Mech*, **15** (1991): 219—227
- 18 Zhang Ch. Elastodynamic analysis of a periodic array of mode III cracks in transversely isotropic solids. *J. Appl Mech*, **59** (1992): 366—371
- 19 Krenk S, Schmidt H. Elastic wave scattering by a circular crack. *Phil Trans Roy. Soc*, **A308** (1982): 167—198
- 20 Kundu T, Boström A. Elastic wave scattering by a circular crack in a transversely isotropic solid. *Wave Motion*, **15** (1992): 285—300
- 21 Ito S. Dynamic stress concentration around a rectangular crack in an infinite elastic medium. *ZAMM*, **60** (1980): 317—322
- 22 Guan L, Norris A. Elastic wave scattering by rectangular cracks. *Int J. Solids Struct*, **29** (1992): 1547—1565
- 23 Gross D, Zhang Ch. Diffraction of SH-waves by a system of cracks: solution by an integral equation method. *Int J. Solids Struct*, **24** (1988): 41—49
- 24 Angel Y C. On the reduction of elastodynamic crack problems to singular integral equations. *Int J. Eng. Sci*, **26** (1988): 757—764
- 25 Churchill R V, Brown J W. *Fourier Series and Boundary Value Problems* 3rd edn, McGraw-Hill, New York (1978)
- 26 Pao Y H, Mow C C. 弹性波的衍射与动应力集中. 刘殿魁, 苏先榭译. 科学出版社, 北京 (1993)
- 27 Achenbach J D, Keer L M, Mendelsohn D A. Elastodynamic analysis of an edge crack. *J. Appl Mech*, **47** (1980): 551—556
- 28 Angel Y C, Achenbach J D. Reflection and transmission of obliquely incident Rayleigh waves by a surface-breaking crack. *J. Acoust Soc Am.*, **75** (1984): 323—319
- 29 Angel Y C, Achenbach J D. Stress-intensity factors for 3-D dynamic loading of a cracked half-space. *J. Elast*, **15** (1985): 89—102
- 30 Angel Y C. Scattering of Love waves by a surface-breaking crack. *J. Appl Mech*, **53** (1986): 587—592
- 31 Srivastava K N, Gupta O P, Palaiya R M. Interaction of elastic waves in two bonded dissimilar elastic half-planes having Griffith crack at interface—I. *Int J. Fract*, **14** (1978): 145—154
- 32 Srivastava K N, Palaiya R M, Gupta O P. Interaction of longitudinal wave with a penny-shaped crack at the interface of two bonded dissimilar elastic solids—II. *Int J. Fract*, **15** (1979): 591—599
- 33 Erdogan F. Approximate solutions of systems of singular integral equations. *SIAM J. Appl Math*, **17** (1969): 1041—1059
- 34 马兴瑞, 邹振祝, 邵成勋, 黄文虎. 层状介质平面交界裂纹的弹性波 (P 波和 SV 波) 散射研究. *航空学报*, **10** (1989): A 434—447
- 35 Dundurs J. Discussion. *J. Appl Mech*, **36** (1969): 650—652
- 36 Erdogan F, Gupta G D. Layered composites with an interface flaw. *Int J. Solids Struct*, **7** (1971): 1089—1107
- 37 章梓茂, 马兴瑞, 邹振祝, 王铎. 层状介质中多个非共面 Griffith 裂纹的弹性波散射研究. *力学学报*, **22** (1990): 700—

- 38 Qu J. Interface crack loaded by a time-harmonic plane wave *Int J. Solids Struct*, **31** (1994): 329—345
- 39 Qu J. Scattering of plane waves from an interface crack *Int J. Eng. Sci*, **33** (1995): 179—194
- 40 Yang H J, Bogy D B. Elastic wave scattering from an interface crack in a layered half-space *J. Appl Mech*, **52** (1985): 42—50
- 41 Gracewski SM, Bogy D B. Elastic wave scattering from an interface crack in a layered half-space submerged in water, Part I Applied tractions at the liquid solid interface *J. Appl Mech*, **53** (1986): 326—332
- 42 Gracewski SM, Bogy D B. Elastic wave scattering from an interface crack in a layered half-space submerged in water, Part II Incident plane waves and bounded beams *J. Appl Mech*, **53** (1986): 333—338
- 43 Kuo A Y. Transient stress intensity factors of an interfacial crack between two dissimilar anisotropic half-space: Part 1—Orthotropic materials *J. Appl Mech*, **51** (1984): 71—76
- 44 Kuo A Y. Transient stress intensity factors of an interfacial crack between two dissimilar anisotropic half-space: Part 2—Fully anisotropic materials *J. Appl Mech*, **51** (1984): 780—786
- 45 马兴瑞, 邹振祝, 黄文虎, 邵成勋 层状介质硬币形交界裂纹的弹性波散射 振动工程学报, **1**, 4 (1989): 1—9
- 46 章梓茂, 马兴瑞, 邹振祝, 王铎 层状介质中多个非共面硬币形裂纹的弹性波散射研究 力学学报, **23** (1991): 685—699
- 47 邹振祝, 章梓茂, 马兴瑞 界面周期裂纹的 SH 波散射 应用科学学报, **9** (1991): 222—230
- 48 章梓茂 周期界面裂纹的弹性波散射研究 上海力学, **15**, 1 (1994): 14—28
- 49 章梓茂 裂纹体弹性波散射的几个问题研究 哈尔滨工业大学博士学位论文 (1989)
- 50 Achenbach J D, Li Z L. Propagation of horizontally polarized transverse waves in a solid with a periodic distribution of cracks *Wave Motion*, **8** (1986): 371—379
- 51 Angel Y C, Achenbach J D. Harmonic waves in an elastic solid containing a doubly periodic array of cracks *Wave Motion*, **9** (1987): 377—385
- 52 Comninou M. The interface crack *J Appl Mech*, **44** (1977): 631—636
- 53 王晓东, 邹振祝, 王铎 界面裂纹尖端的动态奇异特性 固体力学学报, **13** (1992): 235—243
- 54 王晓东, 邹振祝, 王铎 有限长界面裂纹对冲击载荷的响应 爆炸与冲击, **11** (1991): 193—205
- 55 周振功, 邹振祝, 马兴瑞, 王铎, 段祝平 尖端具有非线性吸附接触的界面裂纹的动态特性研究 航空学报, **13** (1992): A 619—629
- 56 周振功, 沈亚鹏, 马兴瑞, 邹振祝 尖端具有线性粘着力作用的加层空间的界面裂纹对稳态弹性波的散射 固体力学学报, **15** (1994): 226—233
- 57 Achenbach J D, Keer J D, Khetan R P, Chen S H. Loss of adhesion at the tip of an interface crack *J Elast*, **9** (1992): 397—424
- 58 Miller G R, Keer L M. A numerical technique for the solution of singular integral equations of the second kind *Q. Appl Math*, **43** (1985): 455—465
- 59 Kurtz R D, Farris T N, Sun C T. The numerical solution of Cauchy singular integral equations with application to fracture *Int J. Fract*, **66** (1994): 139—154
- 60 Norris A, Yang Y. Dynamic stress on a partially bonded fiber *J. Appl Mech*, **58** (1991): 404—409
- 61 Yang Y, Norris A. Longitudinal wave scattering from a partially bonded fiber *Wave Motion*, **15** (1992): 43—59
- 62 汪越胜, 王铎 剪切波作用下圆弧形界面裂纹的动应力强度因子 固体力学学报, **14** (1993): 362—367
- 63 Wang Y S (汪越胜), Wang D (王铎). Scattering of elastic waves by a rigid cylindrical inclusion partially debonded from its surrounding matrix—I SH case *Int J. Solids Struct*, **33** (1996): 2789—2815
- 64 Wang Y S (汪越胜), Wang D (王铎). Scattering of elastic waves by a rigid cylindrical inclusion partially debonded from its surrounding matrix—II P and SV cases *Int J. Solids Struct*, **33** (1996): 2817—2840

- 65 Wang Y S (汪越胜), Wang D (王铎). Elastic wave scattering from a partially debonded elastic cylindrical inclusion. *J. Harbin Inst. Tech.* E-1 (1994): 70—78
- 66 Wang Y S (汪越胜), Wang D (王铎). Dynamic analysis of a buried rigid elliptic cylinder partially debonded from surrounding matrix under shear waves. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1 (1995): 51—63
- 67 Wang Y S (汪越胜), Wang D (王铎). Shear wave scattering from a partially debonded elastic elliptic inclusion. *Mech. Res. Commun.*, 22 (1995): 79—86
- 68 Angel Y C. Singular integral equation for antiplane wave scattering by a semi-infinite crack. *J. Elast.*, 23 (1990): 53—67
- 69 汪越胜. 奇异积分方程在弹性动力学中的若干应用. 博士后研究报告. 哈尔滨建筑大学, 1995
- 70 王铎, 汪越胜. 界面动力学研究近况. *上海力学*, 14 (1993): 1—15
- 71 章梓茂, 陈英俊, 马兴瑞, 邹振祝. 裂纹体弹性波散射. *力学进展*, 23 (1993): 195—205

ON THE APPLICATION OF SINGULAR INTEGRAL EQUATION TO THE SCATTERING PROBLEMS OF ELASTIC WAVES BY CRACKS

Wang Yuesheng Wang Duo Ma Xingrui Zou Zhenzhu
Northern Jiaotong University, Beijing 100044 Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

Abstract This paper reviews the applications of singular integral equation (SIE) to the scattering problems of elastic waves by cracks, especially by interface cracks, which were made during past two decades. Several problems such as the reduction of the scattering problems to the SIE, the solution of the SIE and the relationship between the SIE method and other integral equation methods are discussed. Finally, possible applications of the SIE to the scattering problems of cracks are suggested.

Keywords *singular integral equation; crack; interface crack; elastic wave scattering; fracture dynamics*