第25卷 第3期 力学进展 Vol. 25 No. 3
1995年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1995

湍流的重正化群理论*

吴 烨 王晓宏
中国科学技术大学力学和机械工程系，合肥 230026

提要 简要回顾了湍流重正化群理论的发展，介绍了该理论的主要内容及得到的主要结果，并评述了该理论存在的问题．同时也简单介绍了笔者为解决这些问题而做的一些工作．

关键词 湍流；重正化群；对应原理；远程相互作用近似

1 重正化群理论的物理背景

70年代初，Wilson[1,2] 成功地利用重正化群方法研究了临界现象．在此之后，重正化群方法在物理的许多领域发挥了重要作用．能成功地利用重正化群方法来研究的物理现象，其共同的特征是无特征尺度，它的动力学过程可用下列标度关系描述：

$$G(k,\omega)=k^{-a}\varphi\left(\frac{\omega}{k^z}\right) \tag{1.1}$$

k 为波数，ω为圆频率．推导出形如（1.1）标度关系中的指数是重正化群方法的主要目的．由于系统无特征尺度，经研究发现标度关系（1.1）具有普适性，只依赖于系统的对称性，与原微观参数（裸参数）无关．

人们从各种实验观察中发现，不同的物理系统在临界点附近具有相类似的性质，并由此归结出标度律，其基本思想是临界点附近的长程相关决定了所有奇异性质．系统接近临界点时，关联长度$\zeta\to\infty$，各种物理量在临界点附近的奇异性质是由关联长度ζ在临界点的发散性质所引起的，关联长度ζ是唯一决定各物理量在临界点附近奇异性质的量．小范围的细节与临界现象无关．既然在临界点关联长度$\zeta\to\infty$，故用任何有限的自然尺度来描述物理系统都能得到相同的结果．正由于临界点的这种性质，可以成功地运用重正化群方法处理临界现象问题．

以铁磁相变为例，可以概括重正化群变换的基本步骤为（1）进行粗粒平均，缩小分辨率．就是使用的“尺子变长”，变为原先尺子的 s 倍．这即是自旋集团归并，将含 s^d 个自旋

* 国家自然科学基金资助项目．

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的集团作为一个整体(d为空间维数),用粗粒平均找到集团的有效自旋.(2)将尺寸和自旋重新标度,使其与原来模型一致.我们简称重正化群变换为R_s手续,即$R_s(H_0)=H_1$,其中H为系统哈密尔顿量.这样循环做下去.可以得到一个重正化群变换序列$H_{n+1}=R_s(H_n)$.在临界点,自旋涨落的关联长度ξ为无穷大,有限尺度效应被抹掉,系统呈自相似性,这样自然有$R_s(H_n)=H_n$,这表明了在临界点,重正化群变换出现不动点.通过分析不动点附近的变换性质,从而可抓住相变的主要特征.我们把R_s的集合称为重正化群(renormalization group),简称$RNG=\{R_s|s>1\}$.通常给定一个哈密尔顿量H中,往往含有一组确定的参数,可以用这些参数为坐标轴,构成一个"参数空间",其中每个点代表一个哈密尔顿量.重正化群的作用对象就是这样的参数空间,可以形象地把重正化群变换看成是参数空间中代表点的运动.

重正化群具有如下基本性质:

①封闭性

$$\text{若 } R_s,\ R_{s'}\in RNG,\ \text{则 } R_{ss'}=R_sR_{s'}\in RNG \tag{1.2}$$

②结合律

$$(R_sR_{s'})R_{s''}=R_s(R_{s'}R_{s''}) \tag{1.3}$$

③交换律

$$R_sR_{s'}=R_{s'}R_s \tag{1.4}$$

④有单位元

$$I=R_1 \tag{1.5}$$

由于重正化群变换的第一步骤为粗粒平均,而物理上不存在相反方向的处理,故重正化群RNG为半群,因为是单参数半群,交换律自然满足,故为Abel半群.为研究重正化群作为单参数半群的结构,引入一无穷小算子,令$t=\ln s$,$U_t=R_s$,由(1.2)知重正化群$RNG=\{U_t|0<t<\infty\}$对于t具有可加性,即

$$U_tU_{t'}=U_{t+t'} \tag{1.6}$$

在单位元$R_1=U_0$附近定义生成元

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{U_t-U_0}{t} \tag{1.7}$$

由(1.7)得

$$R_s=U_t=e^{At}=s^A \tag{1.8}$$

作用在参数空间上

$$A\mu=\frac{d}{dt}(U_t\mu)|_{t=0}=\frac{d}{d\ln s}(R_s\mu)|_{s=1} \tag{1.9}$$

令$\mu(t)=e^{At}\mu=U_t\mu$,对群参数t求导得

$$\frac{d\mu(t)}{dt}=A\mu(t) \tag{1.10}$$

这即为重正化群微分方程,在一般情形下,它很复杂.如果参数空间中的一点μ^*在重正化群变换R_s作用下保持不变,即

$$R_s\mu^*=\mu^* \tag{1.11}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

则点 μ^* 称为不动点．重正化群方法之所以能描述连续相变，就因为临界点与不动点对应．

利用重正化群方法，并结合具体的物理模型研究铁磁相变问题，可以推得各临界指数，得到与实验相符的结果[1-4]，若利用重正化群方法分析动力系统，则可得到形如（1.1）标度关系中的指数[5]．

2 湍流重正化群理论的发展

1958年，Kraichnan[6,7]开始将量子场论中的方法应用于湍流研究中，推导出了一套封闭的积分微分方程，建立了使湍流问题封闭的直接相互作用理论．在该理论中，随机Galilei变换下的动力学关系的不变性条件被破坏，在计算各向同性湍流场惯性子区域的能谱函数 $E(k)$ 时得到 $E(k)\propto k^{-3/2}$，和 Kolmogorov $-5/3$ 律相矛盾．Kraichnan[8,9]为了克服上述弱点，沿着流体质点的路径对直接相互作用理论进行修正，得到了拉格朗日-历史直接相互作用理论．修正后的理论中，伽利略不变性得到了保证，计算湍流惯性子区域时，得到能谱函数

$$E(k)=C_K\bar{\varepsilon}^{2/3}k^{-5/3}$$

其中 $C_K=1.77$ 和实验范围相符．Kraichnan[6-11]的一系列工作对人们认识湍流现象有着一定的帮助，利用 Kraichnan 理论计算湍流场得到了一些和实验相符的结果[12]，但该理论数学上过于复杂，又只是采用逼近的方法及一些假设使湍流问题封闭．

由于高 Reynolds 数湍流场中的高波数小涡处于统计定常和统计平衡状态，特别在惯性子区域能谱函数是普适的，流动和边界无直接关系，这样该区域的流动无特征尺度．由于该性质，人们看到湍流现象和临界现象之间具有某种相似性，在研究临界现象问题中发挥重要作用的重正化群方法自然被用到湍流研究中．

1975 年 Ma 和 Mazenko[5]应用重正化群方法分析动力系统．Forster、Nelson 和 Stephen[13,14]（通称 FNS）首次利用 Ma 和 Mazenko 提出的重正化群方法研究在 Gauss 分布随机力作用下，其 Navier-Stokes 方程的速度场脉动在大尺度、长时间情况下的红外渐近（infrared limit）特性．他们对 Navier-Stokes 方程进行 Fourier 变换，将速度分量 v 和随机力分量 f 按波数属于 $q<\Lambda e^{-r}$ 和 $\Lambda e^{-r}<q<\Lambda$ 分解为 $v^<$、$f^<$ 和 $v^>$、$f^>$，然后将高波数速度分量 $v^>$ 用 $v^<$、$f^<$ 和 $f^>$ 表示，代入 Navier-Stokes 方程，对 $f^>$ 求平均，得到仅包含 $v^<$ 和 $f^<$ 的方程，这即是粗粒平均．FNS 再对粗粒平均后的方程进行重新标度，得到形式上和原 Navier-Stokes 方程相类似的方程，这即为重正化群方法的重新标度步骤．通过这样的重正化群变换，他们找到对应于不同随机扰动下的不动点，并推出 $k\to0$、$\omega\to0$ 时对应于不同随机力作用下的能谱函数，发现在不同随机力作用下的 Navier-Stokes 方程的红外渐近性质是不同的．但是由于未能将随机力的特性和湍流场的可观测量联系起来，FNS没有得到湍流场的有关常数的具体数值结果．

Fournier 和 Frish[15]从另外角度出发，利用 EDQNM（eddy damped quasi-normal mode）逼近，得到和 FNS 相同的红外渐近下的能谱函数形式，他们还对FNS未曾考虑的更广泛随机力作用的情况作了研究．DeDominics 和 Martin[16,17]将 FNS 理论进行了推广．他们应用场论的方法对更广泛形式的随机力作用下的 Navier-Stokes 方程进行了研究，在随机力两点关联正比于 k^{-d} 时，推导出能谱函数 $E(k)\propto k^{-5/3}$，和湍流惯性子区域 Kolmogorov $-5/3$ 律相吻合．

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当利用重正化群方法分析在随机力作用下，其Navier-Stokes方程的速度脉动在 $k\to\infty$、$\omega\to\infty$ 时的紫外渐近（ultraviolet limit）特性时，由于耦合参数 $\bar{\lambda}(r)$ 越来越大，致使以 $\bar{\lambda}(r)$ 为参数的微扰失败[17]．Yakhot[18] 在随机力作用下的 Navier-Stokes 方程的左边增添一附加项 $-\Gamma_0 k^{2/3} v(k,\omega)$，亦即引进一正比于 $k^{2/3}$ 的负粘性耗散项，然后逐次对低波数随机力分量求平均，研究 $k\to\infty$、$\omega\to\infty$ 紫外渐近下的流体行为，得到能谱函数

$$E(k)\propto k^{-5/3}[\ln(kL)]^{-1}$$

其中 L 为流场的特征尺度．Levich[19-22] 在随机力作用下的 Navier-Stokes 方程的左边增添一项用以表征大涡对小涡卷带作用的项，然后用重正化群方法研究流体紫外渐近下的行为，得到能谱函数

$$E(k)\propto k^{-5/3}(kL)^{-\mu/3}$$

并算得 $\mu=0.4$，较好地描述了湍流场中实验所观测到的间隙现象．建筑在分数维理论基础上的湍流 β 模型得到了类似的结果[23]，若将湍流运动和多分枝聚合态物理作类比，可以得到相同的 μ 值[24]，Levich还指出他们理论中出现的非整数维数即为 Mandelbrot 所引进的分数维数，而并非 Wilson 重正化群理论中用于连续分析的非整数维数．

Rose[25] 利用重正化群方法分析得到了湍流场标量输运的亚格子模型，在他的方法中没有引进随机扰动力，而直接对 Navier-Stokes 方程中的高波数速度分量求平均，推得与低波数速度分量弱相关的涡输运系数．McComb 等人[26-32] 采用 Rose 的方法，并假设速度分量的能谱分布服从 Kolmogorov-5/3 律，推导出了用以表征小涡对大涡作用的重正化涡粘性公式．Y.Zhou 等人[32,33] 对随机力作用下的 Navier-Stokes 方程采用 Rose 方法推导出了重正化涡粘性公式．

上述的工作为人们系统地利用重正化群方法研究湍流现象奠定了基础．Yakhot 和 Orszag[34-45] 在 FNS 等人工作的基础上，较系统地利用重正化群方法分析了湍流场．高 Reynolds数湍流场中的小涡是各向同性，处于统计定常和统计平衡状态，并不直接依赖于边界条件．为了表征边界对这些小涡的作用和保证这些小涡处于统计定常状态，就必须在 Navier-Stokes 方程中附加相当于产生湍流能量的随机扰动力．Yakhot 和 Orszag 认为湍流运动在惯性子区域可以用随机力作用下的 Navier-Stokes 方程描述，这即是所谓的对应原理（correspondence principle）．他们按 FNS 的方法对高波数随机力分量进行逐次平均．在平均过程中，高波数速度分量对低波数速度分量的作用相当于粘性，这样就出现重正化粘性（renormalized viscosity）．他们假设高波数随机力分量对低波数速度分量的作用很弱，采用远程相互作用近似（distant-interaction approximation），忽略在对高波数随机力分量平均过程中出现的三阶非线性项，并通过对惯性项所作的微扰展开计算了湍流场，在随机力的两点关联正比于 k^{-d} 时，导出了 Kolmogorov-5/3 律，并利用 Kraichnan 湍流直接相互作用理论的结果，求得湍流Kolmogorov常数 $C_K=1.617$．他们还计算了湍流速度偏斜因子，并利用重正化群方法处理湍流标量输运，求得 Batchelor 常数 $C_{Ba}=1.161$．Yakhot 和 Orszag 还利用他们的理论结果推得湍流大涡模拟中的亚格子模型，导出了Smargorinsky涡粘性公式．

Yakhot 和 Orszag 利用重正化群方法研究一般剪切湍流场，他们利用所推得的重正化粘性公式导出了湍流模式理论中的代数 K-$\bar{\varepsilon}$ 模型，并推得湍流能量 K 和湍流耗散率 $\bar{\varepsilon}$ 所满足的方程，在此基础上进一步计算湍流场的 Von Karman 常数和均匀湍流场的能量随时间的衰

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

变指数，并推导出湍流模式理论中的湍流微分输运模型。Rubinstein 和 Barton等人[46-49]利用 Yakhot 和 Orszag 湍流重正化群方法及其理论结果，推导出一般剪切湍流场中的二阶封闭模式和湍流标量场的输运模型。

Y. Zhou 等人[50-52]利用 Yakhot 和 Orszag 湍流重正化群方法和 Rose 重正化群方法研究磁流体中的湍流现象及其湍流亚格子模型。在磁流体运动以及分层流动中，流场呈各向异性，Rubinstein 等人[53-54]试图研究各向异性随机扰动力对湍流速度场和标量场的影响。另外，重正化群方法还被用来研究可压缩流体的长时间、大尺度下的红外渐近行为[55]。

3 湍流重正化群理论

本节我们将稍为详细地介绍湍流 RNG 理论。虽然湍流 RNG 理论得到很大发展，加深了人们对湍流的认识，但也存在一些问题，人们提出了一些疑问[56-59]。在解决这些问题的过程中，笔者给出了一些结果，下面也将作介绍。

3.1 动力学方程

在 FNS[13,14] 及 DeDominicis 和 Martin[16,17] 等人工作的基础上，Yakhot 和 Orszag[35] 提出对应原理，即湍流运动在惯性子区域可以用下列方程予以描述：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu_0\nabla^2\mathbf{v}+\mathbf{f} \tag{3.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{3.2}$$

其中 ρ 为流体密度，p 为压力，ν_0 为流体运动粘性系数，$\mathbf{f}$ 为随机扰动力，其两点关联满足

$$\langle f_i(\mathbf{k},\omega)f_j(\mathbf{k}',\omega')\rangle=2D_0(2\pi)^{d+1}k^{-y}P_{ij}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta(\omega+\omega') \tag{3.3}$$

其中 $f_i(\mathbf{k},\omega)$ 为随机力 $f_i(\mathbf{x},t)$ 的 Fourier 变换，d 为空间维数，D_0 为常数。

选择一足够高的波数 $\Lambda_0=O(k_d)$ 作为截断波数，这里 k_d 为 Kolmogorov 耗散波数。由于当 $k'>O(k_d)$ 时，湍流能谱按指数衰减，故其对 $k\ll\Lambda_0$ 波数范围上的大涡影响极小，可以忽略。速度 $v_i(\mathbf{x},t)$ 的 Fourier 变换为

$$v_i(\mathbf{x},t)=\int_{k\leqslant\Lambda_0}\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\omega}{2\pi}v_i(\mathbf{k},\omega)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t) \tag{3.4}$$

由（3.1），（3.2）可以推得湍流速度在 Fourier 变换下的动力学方程为

$$v_l(\hat{k})=G^0(\hat{k})f_l(\hat{k})-\frac{i\lambda_0}{2}G^0(\hat{k})P_{lmn}(\mathbf{k})\int_{q,|k-q|<\Lambda_0}v_m(\hat{q})v_n(\hat{k}-\hat{q})\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{3.5}$$

其中：$P_{lmn}(\mathbf{k})=k_mP_{ln}(\mathbf{k})+k_nP_{lm}(\mathbf{k})$

$P_{ln}(\mathbf{k})=\delta_{ln}-\dfrac{k_lk_n}{k^2}$

$G^0(\hat{k})=G^0(\mathbf{k},\omega)=(-i\omega+\nu_0k^2)^{-1}$

$\hat{k}=(\mathbf{k},\omega)$，$\lambda_0(=1)$ 是为了微扰展开而设置的参数。

Yakhot-Orszag[35] 利用（3.3），取 $y=d$，对方程（3.5）进行重正化群变换，在此基础上研究湍流现象。

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.   http://www.cnki.net

3.2 重正化群变换

按重正化群方法进行粗粒平均，将速度 v 和随机力 f 分成高波数和低波数两部分，即

$$v_\alpha(\mathbf{k},\omega)=\begin{cases} v_\alpha^<(\mathbf{k},\omega) & 0<k<\Lambda_0 e^{-r} \\ v_\alpha^>(\mathbf{k},\omega) & \Lambda_0 e^{-r}<k<\Lambda_0 \end{cases}$$

$$f_\alpha(\mathbf{k},\omega)=\begin{cases} f_\alpha^<(\mathbf{k},\omega) & 0<k<\Lambda_0 e^{-r} \\ f_\alpha^>(\mathbf{k},\omega) & \Lambda_0 e^{-r}<k<\Lambda_0 \end{cases}$$

则式（3.5）化为

$$v_l^<(\hat{k})=G^0(\hat{k})f_l^<(\hat{k})-\frac{i\lambda_0}{2}G^0(\hat{k})P_{lmn}(\mathbf{k})\int[v_m^<(\hat{q})v_n^<(\hat{k}-\hat{q})+2v_m^>(\hat{q})v_n^<(\hat{k}-\hat{q})$$
$$+v_m^>(\hat{q})v_n^>(\hat{k}-\hat{q})]\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \qquad (3.6)$$

$$v_l^>(\hat{k})=G^0(\hat{k})f_l^>(\hat{k})-\frac{i\lambda_0}{2}G^0(\hat{k})P_{lmn}(\mathbf{k})\int[v_m^<(\hat{q})v_n^<(\hat{k}-\hat{q})+2v_m^<(\hat{q})v_n^>(\hat{k}-\hat{q})$$
$$+v_m^>(\hat{q})v_n^>(\hat{k}-\hat{q})]\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \qquad (3.7)$$

为了消除式 (3.6) 中的高波数速度分量 $v^>$，将式（3.7）代入（3.6)，然后对高波数随机力 $f^>$ 求平均，精确到 $O(\lambda_0^2)$，可得[35]

$$(-i\omega+\nu_0k^2)v_l^<(\hat{k})=f_l^<(\hat{k})-\frac{i\lambda_0}{2}P_{lmn}(\mathbf{k})\int v_m^<(\hat{q})v_n^<(\hat{k}-\hat{q})\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}}$$
$$+8\left(\frac{i\lambda_0}{2}\right)^2D_0P_{lmn}(\mathbf{k})\int\limits_{\Lambda_0 e^{-r}<q,|\mathbf{k}-\mathbf{q}|<\Lambda_0}|G^0(\hat{q})|^2G^0(\hat{k}-\hat{q})P_{n\bar{\mu}\rho}(\mathbf{k}-\mathbf{q})$$
$$\cdot P_{m\mu}(\mathbf{q})q^{-y}v_\rho^<(\hat{k})\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}}+2\left(\frac{i\lambda_0}{2}\right)^2P_{lmn}(\mathbf{k})\int\limits_{\Lambda_0 e^{-r}<q<\Lambda_0}P_{m\bar{\mu}\nu}(\mathbf{q})$$
$$\cdot G^0(\hat{q})v_\mu(\hat{j})v_\nu^<(\hat{q}-\hat{j})v_n^<(\hat{k}-\hat{q})\frac{d\hat{q}\,d\hat{j}}{(2\pi)^{2d+2}} \qquad (3.8)$$

上面对高波数随机力 $f^>$ 求平均的规则如下：

①低波数分量统计上不依赖于高波数分量，对 $f^>$ 求平均保持不变，即 $\langle f^<\rangle=f^<$，$\langle v^<\rangle=v^<$；

②随机力 f 的统计平均值为零，即 $\langle f^>\rangle=0$；

③由于随机力 f 为 Gauss 型的，故 $\langle f^>f^>f^>\rangle=0$；

④$\langle f^>f^>\rangle$ 按式（3.3）计算.

Yakhot-Orszag 略去式（3.8）中三阶非线性项，即右端第四项．为对式（3.8）右端第三项积分，FNS 及 Yakhot-Orszag 作变量替换 $\mathbf{q}\to\mathbf{q}+\frac{1}{2}\mathbf{k}$，且以积分域 $\Omega=\{\mathbf{q}\,|\,\Lambda_0 e^{-r}<q<\Lambda_0\}$ 取代 $\Omega''=\left\{\mathbf{q}\,|\,\Lambda_0 e^{-r}<|\mathbf{q}-\frac{1}{2}\mathbf{k}|<\Lambda_0,\ \Lambda_0 e^{-r}<|\mathbf{q}+\frac{1}{2}\mathbf{k}|<\Lambda_0\right\}$，这样计算得到式 (3.8) 右端第三项为[35]

$$R_l=-\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu_0^3\Lambda_0^{4+y-d}}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{d^2-d-\varepsilon}{2d(d+2)}\frac{e^{\varepsilon r}-1}{\varepsilon}k^2v_l^<(\hat{k}) \qquad (3.9)$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

显然，式（3.9）提供了附加粘性

$$\Delta\nu_0(0)=A_d\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu_0^2\Lambda_0^\varepsilon}\ \frac{e^{\varepsilon r}-1}{\varepsilon} \tag{3.10}$$

其中

$$A_d=\tilde{A}_d\frac{S_d}{(2\pi)^d},\ \tilde{A}_d=\frac{d^2-d-\varepsilon}{2d(d+2)},\ \varepsilon=4+y-d \tag{3.11}$$

S_d 为 d 维空间单位球表面积．于是，对高波数随机力 $f^>$ 平均后，粘性将由 ν_0 变为 ν_r，而

$$\nu_r=\nu_0+\Delta\nu_0(0)=\nu_0\left(1+A_d\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu_0^3\Lambda_0^\varepsilon}\ \frac{e^{\varepsilon r}-1}{\varepsilon}\right) \tag{3.12}$$

则式（3.8）化为

$$v_l^<(\hat{k})=G_r(\hat{k})f_l^<(\hat{k})-\frac{i\lambda_0}{2}G_r(\hat{k})P_{lmn}(\mathbf{k})\int v_m^<(\hat{q})v_n^<(\hat{k}-\hat{q})\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{3.13}$$

其中

$$G_r(\hat{k})=(-i\omega+\nu_rk^2)^{-1} \tag{3.14}$$

接下来，Yakhot-Orszag 不是像 FNS[13-14] 那样对式（3.13）进行重新标度，而是走的另外一条路，他们令 $r\to0$，逐次对很窄范围的高波数随机力 $f^>$ 求平均，由式（3.10）可以建立关于重正化粘性 $\nu(r)$ 的循环迭代微分关系式

$$\frac{d\nu(r)}{dr}=A_d\ \nu(r)\bar{\lambda}^2(r) \tag{3.15}$$

其中

$$\bar{\lambda}^2(r)=\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu^3(r)\Lambda_0^\varepsilon}e^{\varepsilon r} \tag{3.16}$$

$\varepsilon>0$ 时，可以解得

$$\nu(r)=\nu_0\left[1+\frac{3}{\varepsilon}A_d\bar{\lambda}_0^2(e^{\varepsilon r}-1)\right]^{1/3} \tag{3.17}$$

$$\bar{\lambda}(r)=\bar{\lambda}_0e^{\varepsilon r/2}\left[1+\frac{3}{\varepsilon}A_d\bar{\lambda}_0^2(e^{\varepsilon r}-1)\right]^{-1/2} \tag{3.18}$$

式中 $\bar{\lambda}_0=\bar{\lambda}(0)$

当 $k\to0$，$\omega\to0$ 时，对 $\Lambda_0e^{-r}<q<\Lambda_0$ 波数范围的随机力逐次平均后，方程（3.5）化为

$$v_l^<(\hat{k})=G^r(\hat{k})f_l^<(\hat{k})-\frac{i\lambda_0}{2}G^r(\hat{k})P_{lmn}(\mathbf{k})\int v_m^<(\hat{q})v_n^<(\hat{k}-\hat{q})\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{3.19}$$

其中

$$G^r(\hat{k})=(-i\omega+\nu(r)k^2)^{-1} \tag{3.20}$$

当 $r\to\infty$ 时，将 $q>k=\Lambda_0e^{-r}$ 范围的高波数随机力逐次平均后，由（3.17），（3.19）和（3.20）可得

$$v_l^<(\hat{k})=G(\hat{k})f_l^<(\hat{k})-\frac{i\lambda_0}{2}G(\hat{k})P_{lmn}(\mathbf{k})\int v_m^<(\hat{q})v_n^<(\hat{k}-\hat{q})\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{3.21}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.   http://www.cnki.net

这里

$$G(\hat{k}) = (-i\omega + \nu(k)k^2)^{-1} \tag{3.22}$$

$$\nu(k) = \left(\frac{3}{\varepsilon} A_d D_0\right)^{1/3} k^{-\varepsilon/3} \tag{3.23}$$

由于对 λ_0 的微扰展开等价于对无量纲耦合参数 $\bar{\lambda}$ 的展开，这样在不动点处，也可看成为对参数 ε 的展开；取 ε 展开的零次项，亦即(3.21)中 λ_0 的零次项作为湍流速度的近似，于是有

$$v_i^<(\hat{k}) \approx G(\hat{k}) f_i^<(\hat{k}) \tag{3.24}$$

式(3.19)—(3.24)为湍流重正化群理论的计算基础．本理论是建立在远程相互作用近似基础上的，该近似认为，低波数速度分量和高波数随机力分量之间相关很弱．而这只有在两波数相差很大时才能成立[58,60]；另外，在 Yakhot-Orszag 理论中，将 $k\to 0$，$\omega\to 0$ 情况下得到的结果应用到整个湍流运动的波数区域上，亦即将在远程相互作用情况下得到的关于大涡的动力学结果作为湍流运动的近似．目前对于远程相互作用近似的正确程度还不清楚[58,59]．

3.3 用重正化群理论计算湍流场

3.3.1 利用重正化群方法计算湍流 Kolmogorov 常数

湍流速度的关联函数定义为

$$v_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\langle v_i(\mathbf{k},\omega) v_j(\mathbf{k}',\omega')\rangle}{(2\pi)^{d+1}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta(\omega+\omega')} \tag{3.25}$$

能谱函数为

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{1}{2}\frac{S_d k^2}{(2\pi)^{d+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Tr}\, v_{ij}(\mathbf{k},\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{S_d k^2}{(2\pi)^{d+1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\frac{\langle v_i(\mathbf{k},\omega) v_j(\mathbf{k}',\omega')\rangle}{(2\pi)^{d+1}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta(\omega+\omega')}\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{3.26}$$

将 (3.22)—(3.24) 代入上式，取 $\varepsilon=4$ ($y=d=3$) 可得

$$E(k) = (3\bar{A}_3)^{1/3}\left[2D_0\frac{S_3}{(2\pi)^3}\right]^{2/3} k^{-5/3} \tag{3.27}$$

再取 $\bar{A}_3 = 0.2$ (即取 $\varepsilon=0$)，则得

$$E(k) = 1.186\left[2D_0\frac{S_3}{(2\pi)^3}\right]^{2/3} k^{-5/3} \tag{3.28}$$

在湍流惯性子区域，能谱函数为普适的，所以

$$E(k) = C_K \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3} \tag{3.29}$$

其中 $\bar{\varepsilon}$ 为湍流耗散率．Yakhot-Orszag[35-37] 还从 (3.23)，(3.25)—(3.29) 以及利用 Kraichnan 直接相互作用理论中涡粘性公式[12]

$$\nu(k) = N\bar{\varepsilon}^{1/3} k^{-4/3} \tag{3.30}$$

其中 N 满足

$$N/C_K^2 = 0.1904 \tag{3.31}$$

他们推导出

$$2D_0\frac{S_3}{(2\pi)^3} = 1.594\bar{\varepsilon} \tag{3.32}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这样就得到 Kolmogorov 常数

$$C_{K} = 1.617 \tag{3.33}$$

C_{K} 的实验值范围是 $1.2 < C_{K} < 2.2$，这样 Yakhot-Orszag 认为他们的计算与实验相符.

Yakhot 和 Orszag 还利用湍流 RNG 方法推导湍流大涡模拟（large-eddy simulation）中的亚格子（subgrid scale）模型和湍流模式理论中的代数 K-$\bar{\varepsilon}$ 模型以及计算湍流速度偏斜因子[35]，他们得到 Smargorinsky 涡粘性公式为

$$\nu = C_{S}\Delta^{2}\left|\frac{\partial v_{i}^{<}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial v_{j}^{<}}{\partial x_{i}}\right| \tag{3.34}$$

其中

$$C_{S} = 0.0062 \tag{3.35}$$

得到广泛应用于湍流模式理论中的代数 K-$\bar{\varepsilon}$ 模型：

$$\nu = \frac{C_{\nu}k^{2}}{\bar{\varepsilon}} \tag{3.36}$$

系数值

$$C_{\nu} = 0.0837 \tag{3.37}$$

计算湍流速度偏斜因子的结果为

$$S_{3} = -\frac{\overline{(\partial v_{l}/\partial x_{l})^{3}}}{[\overline{(\partial v_{l}/\partial x_{l})^{2}}]^{3/2}} = 0.4878 \tag{3.38}$$

这些均与经验值相符.

3.3.2 湍流标量输运的重正化群分析

湍流标量输运满足方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)T = \chi_{0}\nabla^{2}T \tag{3.39}$$

χ_{0} 为扩散系数，选择截断波数 Λ_{0}，标量 $T(\mathbf{x},t)$ 的 Fourier 变换为

$$T(\mathbf{x}\cdot t) = \int_{k\leqslant\Lambda_{0}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d}}\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}T(\mathbf{k},\omega)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t) \tag{3.40}$$

则（3.39）的 Fourier 变换为

$$T(\hat{k}) = -i\lambda_{0}'g^{0}(\hat{k})\int_{q,|\mathbf{k}-\mathbf{q}|<\Lambda_{0}}k_{l}v_{l}(\hat{q})T(\hat{k}-\hat{q})\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{3.41}$$

其中 $\lambda_{0}'(=1)$ 是为进行微扰展开而设置的参数. 将 $T(\hat{k})$ 分成高波数和低波数两部分，即

$$T(\hat{k}) = \begin{cases} T^{<}(\hat{k}) & 0 < k < \Lambda_{0}e^{-r} \\ T^{>}(\hat{k}) & \Lambda e^{-r} < k < \Lambda_{0} \end{cases} \tag{3.42}$$

像用对速度场的粗粒平均方法一样，将 $T^{>}$ 用 $T^{<}$，$V^{<}$ 表示，并利用 Navier-Stokes 方程，对高波数随机力 $f^{>}$ 求平均，精确到 $O(\lambda_{0}'^{2})$ 有

$$\begin{aligned}(-i\omega + \chi_{0}k^{2})T^{<}(\hat{k}) = & -i\lambda_{0}'k_{l}\int v_{l}^{<}(\hat{q})T^{<}(\hat{k}-\hat{q})\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \\ & -2\lambda_{0}'^{2}D_{0}T^{<}(\hat{k})k_{l}k_{n}\int_{\Lambda_{0}e^{-r}<q<\Lambda_{0}}|G^{0}(\hat{q})|^{2}g^{0}(\hat{k}-\hat{q})P_{ln}(\mathbf{q})q^{-y}\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}}\end{aligned} \tag{3.43}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

该式右边第二项提供附加扩散系数

$$\Delta\chi_0(0)=2\lambda_0'^2D_0\frac{k_lk_n}{k^2}\int_{\Lambda_0e^{-r}<q<\Lambda_0}|G^0(\hat{q})|^2g^0(\hat{k}-\hat{q})P_{ln}(q)q^{-y}\frac{d\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}}$$

$$=\frac{d-1}{d}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\lambda_0'^2D_0}{\nu_0(\chi_0+\nu_0)\Lambda_0^\varepsilon}\frac{e^{\varepsilon r}-1}{\varepsilon}\tag{3.44}$$

再令$r\to0$，逐次对很窄范围的高波数随机力求平均，取$\varepsilon=4$，得到关于重正化扩散系数$\chi(r)$的循环迭代微分关系式为

$$\frac{d\chi(r)}{dr}=\frac{d-1}{d}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\bar{\lambda}'^2\nu^2(r)}{\chi(r)+\nu(r)}\tag{3.45}$$

其中

$$\lambda'^2=\frac{\lambda_0'^2D_0}{\nu^3(r)\Lambda_0^\varepsilon}e^{\varepsilon r}\tag{3.46}$$

由于λ_0'在对高波数随机力的平均过程中保持不变，故有$\bar{\lambda}'=\bar{\lambda}$，而在$r\to\infty$、$d=3$时，取$\tilde{A}_3=\tilde{A}_3(\varepsilon=0)=0.2$，由（3.15）和（3.16），（3.45）和（3.46）则可解得重正化Prandtl数为[36]：

$$Pr^{-1}=\lim_{r\to\infty}\frac{\chi(r)}{\nu(r)}=\frac{1}{2}\left\{-1+\left[1+\frac{4(d-1)}{d}\tilde{A}_d^{-1}\right]^{1/2}\right\}=1.3929$$

亦即

$$Pr=0.7179\tag{3.47}$$

Yakhot-Orszag[35-38]还利用重正化群方法推导出了湍流Kolmogorov常数，重正化Prandtl数和Batchelor数三者之间的关系

$$C_{Ba}=C_KPr\tag{3.48}$$

他们将$C_K=1.617$和$Pr=0.7179$代入上式，得到Batchelor数为

$$C_{Ba}=1.161\tag{3.49}$$

3.4 Yakhot 和 Orszag 湍流计算中存在的问题及对其计算的修正

由前述，使我们看到湍流的RNG理论在认识湍流方面开辟了一条新途径，也取得了许多有意义的成果．但是Yakhot-Orszag的计算中却存在一些明显矛盾之处，主要为：

①利用重正化群方法计算湍流场时，重正化粘性公式（3.17）和（3.23）中的$\tilde{A}_d$取值$\tilde{A}_3=0.2$，也即取$\varepsilon=0$，而在同一计算的其他地方取$\varepsilon=4$，亦即同一计算中采用不同的ε值，这使得理论不自洽[35,56]；

②Yakhot-Orszag利用重正化群方法分析湍流标量输运问题，求得Batchelor数$C_{Ba}=1.161$[35-37]．而J.Qian[57]指出，若按湍流重正化群理论中定义的Batchelor数，其实验范围应为$0.5<C_{Ba}<0.8$，这样理论与实验不符；

③Yakhot-Orszag在计算湍流Kolmogorov常数时，引进Kraichnan直接相互作用理论中关于涡粘性的结果，并将涡粘性和重正化粘性等价起来，但两者并不完全等价，这样使理论产生一定误差．

关于问题③，我们完全从湍流重正化群理论自身出发，求得与实验相符的Kolmogorov

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

常数，详见[61]，这里不赘述，下面将简单介绍一下笔者在解决①和②两个问题方面所做的工作.

为了解决 Yakhot-Orszag 在求 Kolmogorov 常数时理论不自洽问题，我们对重正化粘性公式（3.17），（3.23）进行了重新推导[62]．考虑到低波数速度分量和高波数随机力分量是相关的，所以在对高波数随机力取平均的过程中，不但将（3.6）中的 $v^>$ 用表达式（3.7）代入，而且还将 $v^<$ 中的 $v^>$ 用式（3.7）代入，这样对高波数随机力取平均，精确到 $O(\lambda_0^2)$ 可得相应附加粘性项为

$$R_l = -\frac{D_0\lambda_0^2}{\nu_0} P_{lmn}(\mathbf{k}) \int_{\Omega'} \frac{P_{n\mu\rho}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) P_{m\mu}(\mathbf{q}) q^{-y-2}}{-i\omega + \nu_0 q^2 + \nu_0|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^d} v_\rho^<(\hat{k}) \tag{3.50}$$

其中 $\Omega' = \{\mathbf{q} | \Lambda_0 \mathrm{e}^{-r} < q < \Lambda_0,\ |\mathbf{k}-\mathbf{q}| < \Lambda_0\}$，我们用积分域 $\Omega = \{\mathbf{q} | \Lambda_0 \mathrm{e}^{-r} < q < \Lambda_0\}$ 取代 Ω' 求解积分 R_l，将被积函数展开成关于 $\mathbf{k}$ 的 Taylor 级数，取到 $|\mathbf{k}|$ 的一次项，最后结果为

$$R_l = -\frac{D_0\lambda_0^2}{\nu_0^2 \Lambda_0^{4+y-d}} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{d-1}{2(d+2)} \frac{\mathrm{e}^{(4+y-d)r}-1}{4+y-d} k^2 v_l^<(\hat{k}) \tag{3.51}$$

附加粘性则为

$$\Delta\nu_0(0) = A_d' \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu_0^2 \Lambda_0^\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\varepsilon r}-1}{\varepsilon} \tag{3.52}$$

其中

$$A_d' = \tilde{A}_d' \frac{S_d}{(2\pi)^d},\quad \tilde{A}_d' = \frac{d-1}{2(d+2)},\quad \varepsilon = 4+y-d$$

然后建立关于重正化粘性的循环迭代微分关系式，逐次将 $q > k = \Lambda_0 \mathrm{e}^{-r}$ 范围内的高波数随机力分量平均．相应的结果和 Yakhot-Orszag 的结果之间的差别仅在于将 A_d 换为 A_d'，$\tilde{A}_d$ 换为 $\tilde{A}_d'$．由于 $\tilde{A}_d'$ 与 ε 无关，对任何 ε 值 $\tilde{A}_3' = 0.2 = \tilde{A}_3(\varepsilon = 0)$，这样就可以采用单一的参量值 $\varepsilon = 4$ 来计算湍流场，克服了在同一计算中采用不同 ε 值的矛盾．

前述，Yakhot-Orszag 在计算 Batchelor 常数中，用重正化群方法计算 Prandtl 数时，仅取微扰展开到 $O(\lambda_0'^2)$ 项得到 $Pr = 0.7179$．为改进他们的计算，我们保留展开式中的 $\lambda_0'^3$ 和 $\lambda_0\lambda_0'^2$ 项，经过非常复杂的计算[63]，最后得到考虑更高阶影响后的 Prandtl 数

$$Pr = 0.4706 \tag{3.53}$$

而

$$C_{\mathrm{Ba}} = C_{\mathrm{K}} Pr = 0.675 \tag{3.54}$$

这个数值正和 C_{Ba} 的实验值范围 $0.5 < C_{\mathrm{Ba}} < 0.8$ 相吻合．Yakhot-Orszag 利用重正化群方法分析湍流标量输运问题时，只考虑到湍流速度 Gauss 分布的部分对湍流标量输运的影响，但由于速度模式之间的非线性耦合将引起湍流速度偏离 Gauss 分布，这对湍流的标量输运有着重要影响．经计算分析，展开式中 $\lambda_0\lambda_0'^2$ 项反映了湍流速度偏离Gauss分布的影响，而 $\lambda_0'^3$ 项的影响相对小得多．

4 湍流重正化群理论的展望

湍流是一直困扰着人们的理论物理中最困难的问题之一，长期以来国内外许多科学家和

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

学者为此付出了辛勤的劳动．重正化群方法在临界现象的研究中发挥着重要的作用，由于湍流现象与临界现象之间具有一定的相似性，以 Yakhot-Orszag 为代表的一些学者试图利用重正化群方法研究湍流现象．利用重正化群方法分析湍流问题而发展起来的湍流重正化群理论，已经得到了一些与实验相符的结果．但目前湍流重正化群理论是不完善的．

连续相变问题中处理“紫外”发散，而湍流问题中却是“红外”发散，这二者有着巨大的差别，所以到目前湍流重正化群理论还没有得到如 Wilson 在临界现象中取得的成功，众所周知，在强耦合问题中(例如湍流)，RNG展开是不能被控制的，虽然我们可以用 RNG 方法处理湍流问题，但必须取所有展开项，任何截断都有可能导致基本的失误．这些基本的理论问题还没有得到解决，所以在具体应用重正化群方法计算湍流场时所用的一些假设，如远程相互作用近似，是 Yakhot-Orszag 理论中的基本假设 [35-37,58]，而目前人们对其物理背景以及数学上的正确程度还不清楚 [57-59]．另外，关于对应原理也不能给以合理解释，对诸如三阶非线性项（在 Yakhot-Orszag 的工作中是略去这些项的）的作用也不清楚 [35,56]．

尽管如此，对于人们了解、认识复杂的湍流现象，湍流重正化群理论已经和将会起着一定的作用，这是研究湍流的新途径．今后人们仍然会在这一领域开展积极的探索．湍流重正化群理论是建立在各向同性湍流场分析基础上的，但目前人们在将它推广到一般剪切湍流场方面，作出了有益的尝试 [40-49,64,65]．

可以成功地用重正化群方法来研究的物理现象，其特征为无特征尺度，而分形表征的正是具有自相似性、无特征尺度事物的几何结构特征．目前，人们已从较多的实验观测中发现湍流在一定尺度范围内存在分形现象 [66,67]，其上限为表征湍流场几何结构的积分尺度 L，下限为湍流 Kolmogorov 尺度 η．这样，湍流重正化群方法和湍流分形现象之间可能会有一定的联系，Levich [19-22] 利用重正化群方法研究流体的紫外渐近行为时，得到能谱函数 $E(k)\propto k^{-5/3}(kL)^{-\mu/3}$，其中 $\mu=0.4$，这和从分形观点得到的结果相一致 [23,24]．湍流重正化群方法和湍流分形现象之间更深刻的联系以及重正化群方法能否为分形和非线性动力系统之间架起一座桥梁，有待于人们的进一步研究．

由于湍流现象的复杂性，人们正试图用各种新的工具，从各个方面对其进行研究，我们认为重正化群方法作为分析临界现象的有力工具对人们认识、了解湍流现象有着不可忽视的价值．

参 考 文 献

1 Wilson K G. *Phys. Rev.*, B4 (1971) : 3174
2 Wilson K G, Kogut J. *Phys. Rep.*, **12**c (1974) : 77
3 郝柏林，于渌等．统计物理学进展，科学出版社，北京 (1981) : 76
4 史美伦．固体统计力学，科学技术文献出版社重庆分社，重庆 (1984) : 240
5 Ma S K, Mazenko G F. *Phys. Rev.*, B11 (1975) : 4077
6 Kraichnan R H. *Phys. Rev.*, **109** (1958) : 1407
7 Kraichnan R H. *J. Fluid Mech.*, **5** (1959) : 497
8 Kraichnan R H. *Phys. Fluids*, **8** (1965) : 575
9 Kraichnan R H. *Phys. Fluids*, **9** (1966) : 1728
10 Kraichnan R H. *J. Fluid Mech.*, **41** (1970) : 189
11 Kraichnan R H. *J. Fluid Mech.*, **47** (1971) : 525
12 Leslie D C. Developments in the Theory of Turbulence. Clarendon. oxford (1972)
13 Forster D., Nelson D R, Stephen M J. *Phys. Rev. Lett.*, **37** (1976) : 895

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

14 Forster D., Nelson D R., Stephen M J. *Phys. Rev.*, A**16** (1977) : 732
15 Fournier J-D. Frish U. *Phys. Rev.*, A**17** (1978) : 747
16 DeDominicis C, Martin P C. *Phys. Rev.*, A**19** (1979) : 419
17 Martiin P C., DeDominicis C. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **64** (1978) : 108
18 Yakhot V. *Phys. Rev.*, A**23** (1981) : 1486
19 Levich E. *Phys. Lett.*, **79**A (1980) : 171
20 Levich E, Tsinober A. *Phys. Lett.*, **96**A (1983) : 292
21 Levich E. Tsinober A. *Phys. Lett.*, **101**A (1984) : 265
22 Levich E. Levich B. Tsinober A. in Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids (edited by Tatsumi T), Elsevier science publishers, B. V., North-Holland, IUTAM (1984)
23 Frish U, Sulem P-L, Nelkin M. *J. Fluid Mech.*, **87** (1978) : 719
24 Hentschel H G E, Procaccia I. *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982) : 1159
25 Rose H A. *J. Fluid Mech.*, **81** (1977) : 719
26 McComb W D. *Phys. Rev.*, A**26** (1982) : 1078
27 McComb W D, Shanmugasundaram V. *Phys. Rev.*, A**28** (1983) : 2588
28 McComb W D, Shanmugasundaram V. *J. Phys.*, A**18** (1985) : 2191
29 McComb W D. In: Dwoyer, D L, Hussaini M Y. Voigt R G (eds). Theoretical Approaches to Turbulence. Springer, Berlin (1985)
30 Zhou Y, Vahala G, Hossain M. *Phys. Rev.*, A**37** (1988) : 2590
31 Zhou Y, Vahala G. *Phys. Lett.*, **147**A (1990) : 43
32 Zhou Y. *Phys. Rev.*, A**41** (1990) : 5683
33 Zhou Y. Vahala G. Hossain M. *Phys. Rev.*, A**40** (1989) : 5865
34 Yakhot V, Orszag S A. in Non-linear Dynamics of Transcritical Flows (edited by Jordan H L, Oertell H, Robert K), Springer, Berlin (1985)
35 Yakhot V, Orszag S A. *J. Sci. Comp.*, **1** (1986) : 3
36 Yakhot V, Orszag S A. *Phys. Rev., Lett.*, **57** (1986) : 1722
37 Yakhot V, Orszag S A, *Nucl., Phys.*, B (Proc. Suppl.) 2 (1987) : 417
38 Yakhot V, Orszag S A. *Phys. Fluids*, **30** (1987) : 3
39 Yakhot V, Orszag S A, Yakhot A. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30** (1987) : 15
40 Dannevik W P. Yakhot V. Orszag S A. *Phys. Fluids*, **30** (1987) : 2021
41 Yakhot V, Orszag S A, Panda R. *J. Sci. Comp.*, **3** (1988) : 139
42 Yakhot V. Orszag S A, She Z S. *Phys. Fluids*, A**1** (1989) : 186
43 Yakhot V., She Z S, Orszag S A. *Phys. Fluids*, A**1** (1989) : 289
44 Yakhot A, Orszag S A, Yakhot V, Israeli M. *J. Sci. Comp.*, **4** (1989) : 139
45 Panda R, Sonnad V, Clementi E, Orszag S A, Yakhot V. *Phys. Fluids*, A**1** (1989): 1045
46 Rubinstein R, Barton J M. *Phys. Fluids*, A**2** (1990) : 1472
47 Rubinstein R, Barton J M. *Phys. Fluids*, A**3** (1991) : 415
48 Speziale C G, Gatski T B, N. Mhuiris, N M G. *Phys. Fluids*, A**2** (1990) : 1678
49 Speziale C G, Gatski T B, Fitmaurice N. *Phys. Fluids*, A**3** (1991) : 2278
50 Zhou Y, Vahala G. *Phys. Lett.*, **124**A (1987) : 355
51 Zhou Y, Vahala G. *J. Plasma Phys.*, **30** (1988) : 511
52 Zhou Y, Vahala G. *J. Plasma Phys.*, **41** (1989) : 67
53 Rubinstein R, Barton J M. *Phys. Fluids*, **30** (1987) : 2987
54 Carati D, Brenig L. *Phys. Rev.*, A**40** (1989) : 5193
55 Staroselsky Tlya. Yakhot V, Kida S, Orszag S A. *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990) : 171
56 McComb W D. The physics of Fluid Turbulence, Clarendon, Oxford (1990)
57 Qian J. *Phys. Fluids*, A**2** (1990) : 634
58 Smith L M, Reynolds W C. *Phys. Fluids*, A**4** (1992) : 364
59 Avellaneda M, Majda A J. *Phys. Fluids*, A**4** (1992) : 41
60 Kraichnan R H. *Phys. Fluids*, **30** (1987) : 2400
61 王晓宏，吴烽．用重正化群方法计算湍流 Kolmogorov 常数．中国科学技术大学学报，**25** (1995) : 199
62 Wang Xiaohong, Wu Feng. *Phys. Rev.*, E**48** (1993) : 37
63 Wang Xiaohong, Wu Feng. *J. Phys.*, A**27** (1994) : L559
64 Yakhot V. Orszag S A. Thangum S, Gatski T B, Speziale C G. *Phys. Fluids*, A**4** (1992) : 1510
65 Rubinstein R, Barton J M. *Phys. Fluids*, A**4** (1992) : 1759

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

66 Mandelbrot B B. *J. Fluid Mech.*, **62** (1974) : 331
67 Sreenivasan K R. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23** (1991) : 539

RENORMALIZATION GROUP THEORY OF TURBULENCE

Wu Feng Wang Xiaohong
Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026

Abstract In this paper the developments of RNG theory of turbulence are reviewed briefly. The principal contents and the main results of this theory are described. Problems that remain to be solved in this theory are also discussed. And some approaches that present paper's authors have advanced for solving the problems are showed.

Keywords *turbulence; renormalization group (RNG) ; correspondence principle; distant-interaction approximation*

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net