

# 多孔介质中的粘性指进与分形学

江体乾 侯望奇

华东理工大学流变学研究室 (邮政编码200237)

**提要** 本文概述了多孔介质中粘性指进现象的研究成果, 并对 Hele-Shaw 装置的模拟和三维多孔介质实体的实验进行了评价; 介绍了分形学的基本概念以及近年来在指进研究中的应用。最后, 对研究粘性指进与分形学的关系提出了一些建议。

**关键词** 多孔介质; 粘性指进; 分形学; 自相似

## 1 前言

油田中原油充满地下岩矿的微孔, 这些微孔结构形状各异, 由大小不同的孔道与空隙交织相联。经过一次和二次采油后, 收率不足原油储量的 50%<sup>[1]</sup>。许多复杂的强化采油技术其目的就是开采出残留在多孔岩矿中的原油。一般是将一种液体 (例如, 聚合物水溶液) 压到多孔岩矿中, 驱替出其中粘性较大的油。当两种流体相接触时, 若驱替流体 1 和被驱替流体 2 的流度比  $k_1/\mu_1 > k_2/\mu_2$  时 ( $k$  是渗透率,  $\mu$  是粘度) 其界面不稳定, 最后能发展成为形同指状的复杂图案, 称为“粘性指进”现象。当驱替流体超越原油后, 采收率显著降低了<sup>[2]</sup>。由于粘性指进对经济效益有重大影响, 近年来对此现象进行了大量的实验及理论研究。

## 2 实验研究及理论分析

指进现象除了在强化石油采收及其他方面具有实际应用外, 还有理论研究的价值, 其机理至今尚未完全弄清楚。由于绝大多数多孔介质不透明、难于观察, 实验室广泛采用 Hele-Shaw 装置。该装置由两块相距约为 0.5mm 的透明板组成。两板之间充满高粘性流体, 然后注射进一种低粘性流体, 流体流动类似于多孔介质中的流体流动。通常两流体之间的界面张力很大, 低粘性流体会形成类似手指状的图形 (图 1)。Hele-Shaw 装置自 Hele-Shaw 1898 年在《大自然》杂志首次发表之后, 近百年来在其装置上进行了广泛的理论及实验研究。

Allen 和 Boger<sup>[1]</sup> 在 Hele-Shaw 装置上研究了流体的流变学性质对指进的影响, 他们发现牛顿流体与非牛顿流体所产生的指进图形不一样 (图 1), 他们的研究还表明, 在实验条件下弹性对指进影响很小。何红海、惠立新、江体乾<sup>[3]</sup> 推导出牛顿流体驱替牛顿流体时排出率与其物性的经验关联式

$$S_e = 1.66 \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{0.303} \cdot \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{1.414} \cdot \left( \frac{\mu_1}{b\sigma_1\sigma_2} \right)^{0.11} \quad (1)$$

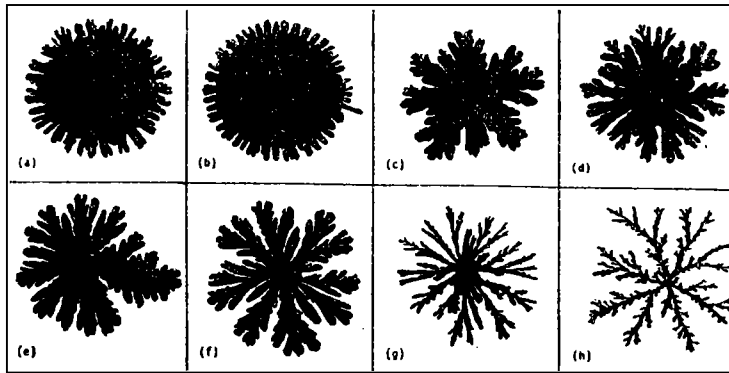


图 1 指进图形

(c)与(b), (c)与(d), (e)与(f)为粘度比  $v_r = \mu_1/\mu_2$ , 相同条件下的图形对比。(a) 牛顿流体驱替牛顿流体,  $v_r \sim 10$ ; (b) Boger 流体驱替牛顿流体,  $v_r \sim 10$ ; (c) 牛顿流体驱替牛顿流体,  $v_r \sim 500$ ; (d) 牛顿流体驱替 Boger 流体,  $v_r \sim 500$ ; (e) 牛顿流体驱替牛顿流体,  $v_r \sim 10^5$ ; (f) 牛顿流体驱替 Boger 流体,  $v_r \sim 10^5$ ; (g) 牛顿流体驱替剪切变稀流体,  $v_r = 700 \sim 5000$ 。(h) 牛顿流体驱替剪切变稀流体(多糖类溶液),  $v_r = 10^4 \sim 10^5$

式中,  $\sigma$  为液体的表面张力,  $b$  为缝隙宽度。

上式中没有出现代表流动过程中粘性力与表面张力之比的毛细管数  $N_{ca}$ , 这是因为他们发现当  $\mu_1/\mu_2 > 10^4$  时, 毛细管数几乎不影响排出率  $S_e$ 。此结论也得到了 Blunt 与 King<sup>[4]</sup> 的验证。

在方形的 Hele-Shaw 装置上, Stokes 等人<sup>[5]</sup> 研究了指进图形的不稳定性。结果表明介质的润湿性对单个的指进宽度有很大的影响, 进而影响到整个图形。如果被驱替流体能较好地湿润介质, 那么指进宽度与孔径差不多大小, 与其他参数无关。相反, 如果驱替流体能较好地湿润介质, 指进的宽度比孔径大得多。用渗透率的平方根标准化之后发现, 宽度大约为毛细管数  $N_{ca}^{-0.5}$ 。Daccord 等<sup>[6]</sup> 的另一项研究证明影响指进的主要参数为流变性质、流速及两板间隙大小。Van Damme 等<sup>[7]</sup> 在圆形 Hele-Shaw 装置中用水驱替泥浆, 指出指进图形与泥浆的浓度有很大关系。Paterson<sup>[8]</sup> 观察外指进(注入流体)和内指进(抽出流体)之后, 建立了验证可能形成的指进波长, 推导出可能形成的指进生长图形, 并且推导了一个长指拟合方程

$$\gamma^a = \cos(\theta\eta) \quad (2)$$

式中,  $\gamma, \theta$  为根坐标轴,  $a$  和  $\eta$  为实验拟合常数。

Mclean 和 Saffman<sup>[9]</sup> 用流线方法研究界面有表面张力影响的二维势流, 其自由表面的形状用一非线性积分-微分方程的解来表达。用数值法求解, 结果与实验比较发现, 计算值能很好地描述实验图形, 但表面张力对指进宽度的影响尽管可以很好地定性描述, 却不能准确地定量描述。他们还指出了数值解与形式奇异摄动分析存在的矛盾, 同时检查了指进对小干扰的稳定性。线性化稳定分析表明, 二维指进由于表面张力的影响而变得不稳定。这一结论与实验观察不符。

上述各项研究均在 Hele-Shaw 装置上进行。然而应予指出, Hele-Shaw 装置中的指进与实际介质中的指进存在差异, 有些现象明显表现出这种不同。有些数学模型也缺乏理论基础。虽然宏观状态流体运动的微分方程相同(都服从 Darcy 定律), 但是在多孔介质中, 流

动是在相互独立,十分混乱的孔隙及孔道网络中发生的,平均流动应加上一个很大的噪声指数,而在 Hele-Shaw 流中无法得到反映。因此,许多研究者就在实际的多孔介质中进行实验。Paterson<sup>[10,11]</sup>在填料床中研究相溶流体的指进现象,所得图形类似于扩散限制聚凝(DLA)图形。此外,有些研究者用砂堆<sup>[12]</sup>、玻璃粉组成的透明多孔介质<sup>[13,14]</sup>以及连在一起的透明介质<sup>[15]</sup>来研究三维指进现象。所有这些研究均表明,三维指进现象均产生分叉,重力影响在三维系统中不能忽略。

[16,17,18]对三维及准二维多孔介质中不相溶驱替研究表明:①润湿性十分重要。驱替流体能否湿润介质对所产生的指进图形有很大的影响。对于前者,指进图形可用宏观的连续尺度来描述,而后者所产生的指进图形更可能是在微孔尺度。②随毛细管数增大,若还存在特征宏观尺度,则特征宏观尺度变小。③当驱替流体根本不湿润介质时,指进图形具有微观结构的拓扑模型,并且有渗滤特性,其干流具有分形特点。④在驱替前缘,若存在一个可以确定的前缘,在此前缘后部的某一区域中两相均同时发生流动。

Homsy<sup>[19]</sup>评价了 Hele-Shaw 装置中相溶及不相溶体系的驱替。详细资料可见该文献。

### 3 多孔介质中粘性指进的分形性质

#### 3.1 分形几何及 DLA 模型

分形几何研究的是几何尺度 (scaling) 及自相似性。图 2<sup>[20,21]</sup>作为一个例子说明了自相似分形的构成。在欧氏空间中,欧氏维数

$$d = \log(l^d) / \log(l) \quad (3)$$

其中  $l$  为度量尺度。一般说来,如果一个在各个方向上放大  $l$  倍的自相似分形体,可以被  $N$  个原型所覆盖,则分数维

$$d_f = \log(N) / \log(l) \quad (4)$$

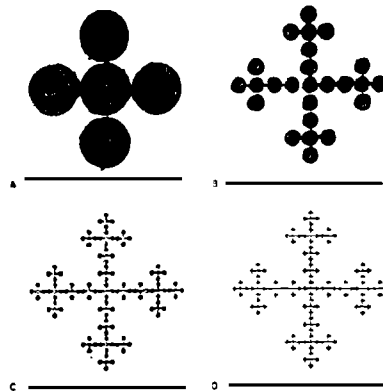


图 2 颗粒聚凝时的简单四步分形结构图

A 5个颗粒组成十字形(3倍直径)。B 5个十字形组成一个大的十字形(9倍直径)。C,D 依次为平面上第三次(27倍直径)及第四次增长(81倍直径)。每增长一次,总质量以5的倍数递增,总体积(长度)则以3的倍数递增。图中的分形维数为  $d_f = \log 5 / \log 3 \approx 1.45$

粘性指进形状的随机结构与图 2 中的结构有很大不同,其自相似很差(经放大或缩小后,结构与原型不同了)。然而可以采用平均或统计自相似。也就是说,用于描述粘性指进的关联函数具有尺度不变的形式(即具有指数函数的形式)。例如两点密度-密度关联函数  $c(r)$  对于相距  $r$  的点,

$$c(r) \approx r^{-\alpha} \quad (5)$$

式中，指数  $\alpha = d - d_f$ 。

分形指进的一大特点是它与其他混沌生长过程，如绝缘体的电击穿，扩散限制聚凝过程相似。由于许多分形生长都是基于 DLA 模型，下面作一简单介绍。

Witten 和 Sander<sup>[22]</sup> 提出的 DLA 模型中，颗粒经过随机路径一次一颗地聚集在一起。图 3 表示的是方形晶格上的 DLA 模型，图 3 中已聚集了一小团颗粒。生长时，设想颗粒是从无限远处来的，实际上是从围绕聚集中心一环上随机弹射出来的（图中颗粒弹射半径为  $r_{max} + 5$ ， $r_{max}$  是以“晶种”或生长中心所测出的聚集团 (cluster) 的最大半径)。图 3 标出了两个典型的随机轨迹。沿轨迹  $t_1$  最终随机颗粒聚集到一个空位置上，此时聚集团生长。然后从弹射环（其半径随着聚集团的增大而增大）再射出一个新的随机颗粒。轨迹  $t_2$  表明，颗粒运动到离聚集团很远的地方，最终消失在“杀死”环上。杀死环半径为  $3r_{max}$ （对于小模拟  $3r_{max}$  已足够了。对于大模拟，最近已大到  $100r_{max}$ ）。上述步骤重复多次，直到聚集成一个大团。二维晶格条件下一般 DLA 具有自相似性，其分数维为  $d_f = 1.68 \pm 0.05$ <sup>[23]</sup>。

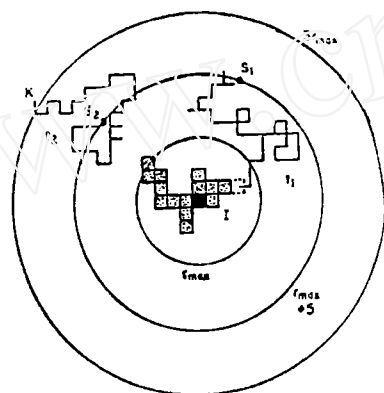


图 3 方形晶格上扩散限制聚凝模型生长示意图

晶种（生长中心）为图中黑色小方格，生长出的地方为阴影小方格。颗粒轨迹  $t_1$  生长在聚集团的空位上（用点画线方格表示）。轨迹  $t_2$  在终止环结束，终止环半径为  $3r_{max}$ ， $r_{max}$  为聚集团的最大半径。 $t_1$  结束后，从弹射环上的任意位置再发射出一新的颗粒。

### 3.2 粘性指进的分形特性及模型

多孔介质中不可压缩的牛顿流体服从 Darcy 定律

$$\mathbf{V} = (k/\mu)\nabla\phi \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (7)$$

式中  $\mathbf{V}$  表示流体速度， $k$  代表渗透率， $\phi$  表示压力势能， $\mu$  是流体粘度。

压力服从拉普拉斯方程  $\nabla^2\phi = 0$ 。对于不相溶驱替，忽略表面张力，那么两流体的边界压力及法向速度均是连续的。

按照 DLA 理论，聚集团之外运动颗粒的浓度服从稳态扩散方程， $\nabla^2 c(r) = 0$ ，在聚集团上  $c(r) = 0$ ，无限远处  $c(r)$  为常数。聚集团圆周的平生长速率  $V_{AG}$  由颗粒通量确定，

$$V_{AG} = \nabla c(r) \cdot \mathbf{n} \quad (8)$$

式中  $\mathbf{n}$  为聚集团的法向单元矢量。

Paterson<sup>[11]</sup>指出, 当被驱替流体有无限大粘度时, 上述方程同样适用于粘性指进流。实验证明了在随机的多孔介质中粘性指进具有 DLA 图型。

Nittman 等<sup>[24]</sup>第一次用自相似(或分形)的概念分析了粘性指进现象, 他们采用一个等于粘性指进特征厚度的象元将指进图形数字化, 在不同的多糖类物质、聚合物浓度及流速下, 得出指进分数维  $d_f = 1.40 \pm 0.4$ 。他们还建立了一个统计模型, 与 DLA 模型有些类似。该模型得出计算值  $d_f = 1.41 \pm 0.4$ , 此值非常接近于实验值, 但与 DLA 模型的结果  $d_f = 1.68$ <sup>[23]</sup> 相差甚远。在他们用的线性驱替中, 两个侧面的宽度  $w$  控制了指进, 当指进长度远大于  $w$  时, 分维数  $d_f \rightarrow 1$ 。然而 Stanley 等人<sup>[25]</sup>所得出的分维数  $d_f = 1.70 \pm 0.05$ , 与 DLA 模型的分维数一致。Van Damme<sup>[7]</sup>则发现分维数与他们实验用的流体浓度有很大关系。Chen 等<sup>[26]</sup>提出了一简单的多孔介质中指进的计算模型, 并在浸蚀的玻璃网络多孔介质中用油驱替甘油, 所得到的实验结果  $d_f = 1.72$ 。

Malφy<sup>[6]</sup>在二维多孔圆板上用气体驱替高粘液体所产生的指进图形与 DLA 结构相似, 因此他们得出结论, 在二维多孔介质中高毛细管数  $N_{ca}$  条件下, 所产生的指进图形具有分数维  $d_f = 1.62 \pm 0.4$ 。这一结论与 Lenormand 和 Zarcone<sup>[27]</sup>所观察的  $N_{ca} < 1$  时渗滤形成的分维  $d_f = 1.82$  有很大的差别。

Kadanoff<sup>[28]</sup>同样也证明了在表面张力为零粘度比无限大时, 一般的 DLA 与粘性指进一致。表面张力不为零时, 通过一些指进间的扩散即可在 Kadanoff 提出的通用化 DLA 模型上反映出来, 结果是指进变宽, 边界变得平滑。Daccord<sup>[29]</sup>应用梯度控制生长(GGG)模型, 对于有限粘度比也可以进行类似的修正。在 GGG 模型上, 沿局部压力梯度上界面生长可通过解 Hele-Shaw 装置中一般的势流方程进行计算。

$$\nabla \cdot [(1/\mu)\nabla\phi] = 0 \quad (9)$$

此方程在低粘及高粘条件下均成立。

江体乾、李向方<sup>[30]</sup>提出的动量控制生长模型(MGGM)是在 DLA 模型上引进动量修正项, 得出了模拟参数  $k$  与粘度比  $v_r$  关系

$$v_r = 0.204 k^{-4.21} \quad (10)$$

分数维  $d_f$  与  $k$  值有关, 大约为 1.70, 与 DLA 模型接近。

以上的研究主要集中在无限粘度比的指进与 DLA 类似性, 因此得出的分数维均在 1.70 左右。关于有限粘度比条件下的指进性质, 除了 Daccord<sup>[29]</sup>提出的(GGG)模型涉及这一问题外, King<sup>[31]</sup>设计的多孔介质网络模型也回答了这一问题。多孔介质模拟为具有随机半径的毛细管的晶格, 相溶驱替就在毛细管中发生。在高粘比下产生 DLA 指进图形。在有限的粘度比  $v_r$  下, 表面维数

$$d_f = 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{v_r - 1}{v_r + 1} \right)^{2/3} \quad (11)$$

迄今为止, 最有意思的工作似乎是 Blunt 和 King<sup>[4]</sup>所为。他们模拟了多孔介质中的二维流动, 该模型由二维或者三维的网络系统组成。其模拟大到足以预测宏观流动性质, 第一次将随机的多孔介质中微观流体运动与宏观流动行为联系起来。更详尽的资料参阅[4]。

尽管对多孔介质的指进现象作了大量研究仍存在许多问题尚未解决。其中包括: ①如何定量描述指进? ②多介孔质中指进产生的微观机理; ③数值模拟时, 怎样判别模拟的图形与

实际指进图案是否一致?

这些问题等待着更多的研究者去探索。

### 参 考 文 献

- 1 Allen E, Boger D V. Xth International Congress on Rheology. Sydney (1988) : 146
- 2 Sarma H K. *Powder Technol.*, **48**, 1 (1967) : 39
- 3 He H H, Hui L X, Jiang T Q. A study on viscous fingering phenomenon in a Hele-Shaw apparatus. *J. Chem. Eng. Chin. Univ.*, **4**, 2 (1990) : 101
- 4 Blunt M, King P. Macroscopic parameters from simulations of pore scale flow. *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 8 (1990) : 4780
- 5 Stokes, J P, et al. Interfacial stability of immiscible displacement in a porous medium. *ibid*, **57** (1986) : 1718
- 6 Daccord G, et al. CA 104: 96007 Fractal viscous fingers: experimental results. *NATO ASI Ser., Ser. E.* (1986): 100, 203-210
- 7 Van Damme H, et al. Fractal viscous fingering in clay slurries. *Nature*, **320**, (1986) : 731
- 8 Paterson L. Radical fingering in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, **113** (1981) : 513
- 9 McLean J W, Saffman P G. The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele-Shaw cell. *ibid*, **102** (1981) : 445
- 10 Paterson L, Hornof V, Neale G A. A consolidated porous medium for the visualization of unstable displacements. *Power Technol.*, **33** (1982) : 265
- 11 ——. Diffusion-limited aggregation and two-fluid displacement in porous media. *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) : 1621
- 12 Engelberts W F, Klippenberg U J. Proc. III World Petroleum Congress, Sec., 2 (1951) : 544
- 13 Van Meurs P, Van der Poel C. *Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Eng.*, **213** (1958) : 103
- 14 ——. *ibid*; 210 (1957) : 295
- 15 Habermann B. *Trans. Metall. Soc. AIME*, **219** (1960) : 264
- 16 Malþy K J, Feder J, Jþssang T. Viscous fingering fractals in porous media. *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985) : 2688
- 17 Peters E J, Flock D L. The onset of instability during two-phase immiscible displacement in porous media. *J. Soc. Pet. Eng.*, **21** (1981) : 249
- 18 Paterson L, Hornof V, Neale G. Visualization of a surfactant flood of oil saturated porous medium. *ibid*, **24** (1984) : 325
- 19 Homsy G M. Viscous fingering in porous media. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **19** (1987) : 271
- 20 Meakin P. Fractal aggregate. *Adv. Colloid. Interface Sci.*, **28**, 4 (1988) : 249
- 21 ——. Models for colloidal aggregate. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, **39** (1988) : 237
- 22 Witten T A, Sander L M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 19 (1981) : 1400
- 23 Meakin P. Diffusion-controlled cluster formation in 2—6 dimensional space. *Phys. Rev.*, **A27** (1983) : 1495
- 24 Nittmann J, Daccord G, Stanley E. Fractal growth of viscous fingers: quantitative characterization of a fluid instability phenomenon. *Nature*, **314**, 14 (1985) : 141
- 25 Daccord G, Nittmann J, Stanley E. Fractal growth sites and dimension, radical viscous fingers and DLA. *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) : 336
- 26 Chen J D, Wilkinson, D. Pore-scale viscous fingers in porous media. *ibid*, **55** (1985) : 1892
- 27 Lenormand R, Zarcone C. Invasion percolation in an etched network measurement of a fractal dimension. *ibid*, **54** (1985): 2226
- 28 Kadancff L J. Simulating hydrodynamics: a pedestrian model. *J. Statist. Phys.*, **39** (1985) : 267
- 29 Daccord G, Nittmann J, Stanley E. *Springer. Proc. Phys.*, **5** (1985) 245
- 30 Jiang T Q, Li X F. A Monte-Carlo Simulation of Unstable Viscous Fingering. Proc. IXth Int. Congr. on Rheol. Brussels, Belgium (1993) : 186—188
- 31 King P R. The fractal nature of viscous fingering in porous media. *J. Phys. A. Math. Gen.*, **20**, L529 (1987)

# VISCOUS FINGERING IN POROUS MEDIA AND ITS FRACTAL NATURE

Jiang Ti-qian    Hou Wang-qi

East China University of Science and Technology, Shanghai 200237

**Abstract** In this paper, first of all, a review is made on some important achievements in the studies of viscous fingering phenomena in literature, together with a discussion on the simulation with Hele-Shaw device and in the bed of three-dimensional porous media. Consequently, the basic concepts of fractal and its applications in the studies of viscous fingering phenomena in recent years are introduced. Finally, some suggestions for the research on viscous fingering and fractal are made.

**Keywords** *Porous media; viscous fingering; fractal; self-similarity*